
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

ALGÈBRE

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de ma griffe, sera réputé contrefait.

ANGERS, IMPRIMERIE A. BURDIN ET Cie, 4, RUE GARNIER.

COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

ALGÈBRE

PAR

M. G. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CHARLEMAGNE



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1883

PRÉFACE

Le cours de Mathématiques spéciales que nous publions aujourd'hui est, sauf de légères modifications, celui que nous avons professé au Lycée Charlemagne, dans ces dernières années. Nous l'avons rédigé en nous conformant au dernier programme d'admission à l'École Polytechnique (3 janvier 1882).

Ce cours comprend trois volumes : le premier est consacré à l'algèbre ; les deux autres à la géométrie analytique à deux et à trois dimensions ; chacun de ces ouvrages est divisé en leçons, à la suite desquelles nous avons placé des exercices qui s'y rattachent immédiatement.

Le plus souvent nous avons donné, pour ces exercices, un renseignement sur la solution qu'on peut leur appliquer et nous avons indiqué le résultat auquel on doit aboutir. A ce propos, nous croyons devoir prévenir nos lecteurs qu'il n'est pas impossible, quelque soin que nous ayons mis à vérifier nos solutions et à corriger les épreuves, qu'une faute de calcul, ou une erreur d'impression, ait pu nous échapper. C'est là l'inconvénient, à peu près inévitable, de résultats indiqués pour un nombre aussi considérable de questions. Mais les élèves auxquels ce cours est plus particulièrement destiné, n'ayant qu'un temps restreint à consacrer à la recherche des problèmes, nous avons pensé leur être utile en leur montrant, pour les exercices que nous leur proposons, en même temps qu'une marche à suivre pour les résoudre, le résultat qu'ils doivent trouver.

Nous avons aussi placé quelques notes complémentaires à la fin de l'algèbre.

Les deux premières traitent de la division et de la divisibilité algébrique. Cette question élémentaire fait partie du programme d'admission à l'École Polytechnique : elle avait donc sa place marquée dans ce livre. Mais il nous a paru difficile de commencer la rédaction de cet ouvrage par l'exposition d'une théorie aussi inci-

*

dente et qui se sépare si nettement du cours de mathématiques spéciales.

Deux autres notes sont consacrées : l'une au théorème de Binet et de Cauchy, l'autre au théorème de M. Sylvester. Ces deux théorèmes importants ne font pas partie du programme que nous nous sommes efforcés de suivre, d'aussi près que possible. Mais ils sont enseignés par quelques professeurs et il nous a paru utile de les exposer dans cet ouvrage, comme un complément naturel d'un cours auquel ils se rattachent si intimement.

La démonstration que nous donnons du théorème de Binet et de Cauchy nous a été communiquée par notre collègue et ami, M. Piéron, dans la conversation duquel nons avons puisé plus d'une idée que nous avons mise à profit, pour la composition de cet ouvrage.

Enfin, dans une dernière note, nous avons présenté, sous un jour différent de celui que nous avons adopté dans la onzième leçon, quelques principes relatifs au calcul des expressions imaginaires.

La conception des expressions imaginaires, la démonstration de leur utilité ou, pour mieux dire, de leur nécessité, sont des choses qui nous paraissent fort délicates. Au moment où les expressions imaginaires se présentent on aborde comme une algèbre nouvelle, et l'on peut, malheureusement, différer beaucoup sur la manière d'exposer aux élèves les premières définitions et les premiers principes de cette algèbre.

C'est pour satisfaire, dans une certaine mesure, aux opinions diverses qui sont attachées à l'introduction des expressions imaginaires, que nous avons cru utile de rédiger la note qui termine ce cours d'algèbre.

G. DE LONGCHAMPS.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

DIX-SEPTIÈME LEÇON

DIX-HUITIÈME LEÇON

DIX-NEUVIÈME LEÇON

VINGTIÈME LEÇON

VINGT ET UNIÈME LEÇON

VINGT-DEUXIÈME LEÇON

VINGT-TROISIÈME LEÇON

VINGT-QUATRIÈME LEÇON

Pages.

VINGT-CINQUIÈME LEÇON

VINGT-SIXIÈME LEÇON

VINGT-SEPTIÈME LEÇON

VINGT-HUITIÈME LEÇON

VINGT-NEUVIÈME LEÇON

TRENTIÈME LEÇON

TRENTE ET UNIÈME LEÇON

COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(PREMIÈRE PARTIE)

ALGÈBRE

PREMIÈRE LEÇON (1)

LES IDENTITÉS

1. Définition des identités. Lorsque deux expressions algébriques A, B dépendant des lettres $a, b, c,\ldots,$ prennent des valeurs égales, quelles que soient les valeurs numériques attribuées à ces lettres, nous dirons que A *et* B *sont des expressions algébriques identiques*. Pour noter cette propriété nous convenons d'écrire

$$A \equiv B,$$

qui se lit : A *identique à* B.

Les identités sont souvent évidentes ou n'exigent, pour être

1. Les premières définitions de l'algèbre ; les quatre opérations algébriques : addition, soustraction, multiplication et division, sont supposées connues des lecteurs de ce livre. La division algébrique qui fait partie du programme d'admission à l'École Polytechnique, se trouve exposée dans une note placée à la fin de ce livre.

démontrées, que des calculs simples. Ainsi les identités suivantes :

$$\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2+\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2\equiv 1,$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\equiv\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2,$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc\equiv(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

et beaucoup d'autres, se reconnaissent sans difficulté. Mais il n'en est pas toujours ainsi. La vérification d'une identité exige ordinairement un certain effort de calcul et présente quelquefois des difficultés. Reconnaître l'exactitude d'une identité donnée est un des premiers problèmes que soulève l'algèbre.

2. Nous nous proposons d'indiquer ici, en même temps que certaines applications des identités, quelques procédés élémentaires de calcul algébrique permettant de vérifier ou de trouver des identités.

Prenons d'abord l'identité évidente

$$(1)\qquad (a^2+b^2)(c^2+d^2)\equiv(ac+bd)^2+(bc-ad)^2.$$

Elle exprime que : *le produit de deux nombres qui sont chacun une somme de deux carrés est aussi une somme de deux carrés.* Cette remarque s'applique nécessairement à un produit de facteurs en nombre quelconque et de la forme arithmétique (a^2+b^2). On peut donc énoncer la propriété suivante :

Théorème. *Le produit de plusieurs nombres de la forme arithmétique* (a^2+b^2) *est aussi un nombre de cette forme.*

3. On peut généraliser la proposition précédente. On a, en effet,

$$(a^2+pb^2)(c^2+pd^2)\equiv(ac+pbd)^2+p(ad-bc)^2.$$

Ainsi :

Théorème. *Le produit de plusieurs nombres de la forme arithmétique* (a^2+pb^2) *est aussi un nombre de cette forme.*

4. Voici une autre généralisation de l'identité (1). On vérifie facilement que

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = (aa'+bb'+cc'+dd')^2 + (ab'-ba'-cd'+dc')^2 + (ac'-ca'+bd'-db')^2 + (ad'-da'-bc'+cb')^2.$$

Il résulte de cette identité la proposition suivante :

THÉORÈME. *Le produit de plusieurs nombres de la forme arithmétique* $(a^2+b^2+c^2+d^2)$ *est encore un nombre de cette forme* [1].

5. Nous donnerons maintenant quelques applications des identités et nous montrerons comment elles permettent quelquefois de reconnaître des nombres composés.

Considérons d'abord l'identité

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2$$

ou

$$x^4+1 = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1).$$

Soit $x = 2^{k+\frac{1}{2}}$, on aura

$$2^{4k+2}+1 = (2^{2k+1}+2^{k+1}+1)(2^{2k+1}-2^{k+1}+1).$$

D'après cette identité [2] *les nombres de la forme arithmétique* $2^{4k+2}+1$ *sont composés.* Si l'on prend, en particulier, $k=14$, on a

$$2^{58}+1 = 288\,230\,376\,151\,711\,745 = 5.107\,367\,629.536\,903\,681 \quad (^3).$$

6. Prenons aussi l'identité

$$x^4+4 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2),$$

1. Ce théorème est la conséquence évidente de cette propriété connue : *un nombre entier est toujours la somme de quatre carrés entiers.*

2. Identité due à M. Le Lasseur.

3. Ce nombre considérable $2^{58}+1$ a été décomposé en facteurs premiers par M. F. Landry, après des calculs qui, entrepris par une méthode rapide et particulière, ont duré plusieurs années.

elle donne le théorème suivant dû à Sophie Germain :

THÉORÈME. *Aucun nombre de la forme arithmétique* (x^4+4), *excepté* 5, *n'est premier.*

L'identité

$$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$

donne un théorème analogue, savoir :

THÉORÈME. *Aucun nombre de la forme arithmétique* (x^4+x^2+1), *excepté* 3, *n'est premier.*

7. Sans multiplier autrement ces exemples qui suffisent à montrer l'importance des identités les plus simples, nous nous proposons maintenant d'indiquer quelques méthodes élémentaires qui permettent de reconnaître l'exactitude d'une identité proposée.

La méthode la plus simple consiste dans les cas peu difficiles, comme ceux que nous avons examinés jusqu'ici, à effectuer les calculs indiqués. On vérifie ainsi que les deux membres de l'égalité proposée sont absolument semblables. Dans d'autres cas on fait subir à l'égalité des transformations qui ont pour but de rendre manifeste que les deux quantités proposées sont bien identiques. Enfin, dans certaines identités, dans celles notamment que l'on rencontre dans l'analyse combinatoire, et qui n'ont lieu que pour des valeurs entières, mais arbitraires de la lettre n, on vérifie que les deux membres de l'identité proposée prennent des valeurs égales pour $n=1$, et l'on démontre que l'égalité supposée vraie pour $n=h$, subsiste pour $n=h+1$.

8. Prenons, pour montrer l'application de ces idées générales, l'identité suivante, due à M. Catalan

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\dots-\frac{1}{2n}.$$

Première démonstration. Transformons les deux membres et ajoutons, à chacun d'eux, la quantité

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n},$$

c'est-à-dire,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

Le premier membre devient identique au second, quand on a supprimé, dans celui-ci, les termes affectés des signes + et —, termes qui sont égaux deux à deux.

Seconde démonstration. Pour $n=1$ on a : $\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$.

Supposons donc que l'on ait vérifié l'égalité

$$\frac{1}{h+1}+\frac{1}{h+2}+\ldots+\frac{1}{2h}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots-\frac{1}{2h},$$

h étant un nombre entier particulier. On a, d'ailleurs,

$$\frac{1}{2h+1}+\frac{1}{2h+2}-\frac{1}{h+1}=\frac{1}{2h+1}-\frac{1}{2h+2}.$$

Par suite,

$$\frac{1}{h+2}+\ldots+\frac{1}{2h+2}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots-\frac{1}{2h+2}.$$

L'égalité subsiste donc quand, dans l'identité proposée, on donne à n la valeur $h+1$. L'identité est donc vérifiée pour toutes les valeurs entières et positives de n.

9. Considérons encore l'identité

$$\text{(A)}\quad \left.\begin{array}{l} x(x+1)(x+2)\ldots(x+y) \\ +(x+1)(x+2)\ldots(x+y+1) \\ +\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ +(z-y)(z-y+1)\ldots(z-1)z \end{array}\right\} = \frac{(z+1)z\ldots(z-y)-(x+y)\ldots(x-1)}{y+2}.$$

Cette identité qui se rencontre dans plusieurs questions d'analyse et qui est due à Euler, a lieu pour toutes les valeurs entières et positives des lettres x, y, z, en supposant que $z-y$ soit supérieur ou au moins égal à x. Sa vérification directe présente des difficultés; mais l'autre méthode prouve l'exactitude de l'identité, avec la plus grande simplicité. On reconnait d'abord que dans l'hypothèse $x=1$ et $z-y=1$, z et y étant

d'ailleurs arbitraires, les deux membres sont identiques à $1.2 \ldots (y+1)$. Si l'on suppose que $(z-y)$ reste fixe et si l'on change x en $(x+1)$, on voit que l'égalité subsiste. Enfin, x restant fixe, si l'on change $(z-y)$ en $(z-y+1)$, l'égalité subsiste encore. Dans ces conditions, l'identité est donc démontrée.

10. Méthode des coefficients indéterminés. Lorsqu'une expression algébrique est (d'après une loi reconnue ou seulement soupçonnée) susceptible d'être développée identiquement sous une forme nouvelle, on peut employer, pour établir l'identité, *la méthode des coefficients indéterminés.* On écrit, avec des coefficients inconnus, mais que l'on se propose précisément de déterminer, l'identité en question. On calcule ensuite ces coefficients par des procédés divers, procédés qui varient avec les identités que l'on a à considérer.

11. Nous donnerons, comme exemple de cette méthode très générale, l'application qu'on peut faire d'elle à l'établissement du développement de $(x+a)^m$ (m étant entier et positif) suivant les puissances décroissantes de x.

On reconnaît immédiatement que le développement $(x+a)^m$ est une fonction entière de degré m, en x ; on peut donc poser

$$(1)\quad (x+a)^m \equiv x^m + A_{m,1}ax^{m-1} + A_{m,2}a^2x^{m-2} + \ldots + A_{m,k}a^kx^{m-k} + \ldots + a^m$$

mais il faut calculer les coefficients $A_{m,1}$, $A_{m,2}$, ..., $A_{m,m-1}$.

1° Multiplions les deux membres de l'identité précédente par $(x+a)$, on aura

$$(2)\quad (x+a)^{m+1} \equiv x^{m+1} + \left.\begin{matrix}A_{m,1}\\+1\end{matrix}\right| ax^m + \left.\begin{matrix}A_{m,2}\\+A_{m,1}\end{matrix}\right| a^2x^{m-1} + \ldots + \left.\begin{matrix}A_{m,k}\\+A_{m,k-1}\end{matrix}\right| a^kx^{m-k+1} + \ldots + a^{m+1}$$

On peut aussi écrire

$$(3)\quad \begin{aligned}(x+a)^{m+1} \equiv x^{m+1} &+ A_{m+1,1}ax^m + A_{m+1,2}a^2x^{m-1} + \ldots \\ &+ A_{m+1,k}a^kx^{m-k+1} + \ldots + a^{m+1}\end{aligned}$$

d'après la notation de l'identité (1).

Si nous identifions les seconds membres (2) et (3), on aura d'abord

$$A_{m+1,1} = 1 + A_{m,1}$$

et par suite

$$
\begin{aligned}
A_{m.1} &= 1 + A_{m-1.1}\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\\
A_{2.1} &= 1 + A_{1.1}
\end{aligned}
$$

Ajoutons et remarquons que $A_{1.1} = 1$, il vient

$$A_{m+1} = m + 1$$

ou, si l'on préfère,

$$A_m = m$$

2° On a ensuite

$$A_{m+1,2} = A_{m.2} + m,$$

par suite

$$
\begin{aligned}
A_{m.2} &= A_{m-1,2} + (m-1)\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\\
A_{3.2} &= A_{2.2} + 2.
\end{aligned}
$$

Ajoutons et remarquons que $A_{2.2} = 1$, il vient

$$A_{m+1,2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

ou encore

$$A_{m.2} = \frac{m(m-1)}{2}.$$

3° Les deux résultats déjà obtenus, $A_{m.1} = \frac{m}{1}$, $A_{m.2} = \frac{m(m-1)}{1.2}$ permettent de pressentir la loi suivie par les coefficients cherchés et nous admettrons que

$$A_{m.k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k},$$

k étant un nombre entier d'une valeur au plus égale à m
On a encore par l'identification de (2) et de (3)

$$
\left\{
\begin{aligned}
A_{m+1,k} &= A_{mk} + A_{m.k-1}\\
A_{m.k} &= A_{m-1,k} + A_{m-1,k-1}\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\\
A_{k+1,k} &= A_{k.k} + A_{k,k-1}.
\end{aligned}
\right.
$$

ajoutons et remplaçons $A_{k,k}$ par 1, on aura

$$A_{m+1,k} = \frac{1.2\ldots(k-1)+2.3\ldots k+3.4\ldots(k+1)+\ldots+(m-k+2)\ldots m}{1.2\ldots(k-1)}.$$

Mais si dans l'identité (A) établie plus haut, on suppose $x=2$, $y=k-2$, $z=m$, chose possible puisque k, m sont entiers et que $z-y=(m-k)+2$ est plus grand ou égal à x, on obtient

$$1.2\ldots(k-1)+2.3\ldots k+\ldots+(m-k+2)\ldots m = \frac{(m+1)m\ldots(m-k+2)}{k};$$

par suite,

$$A_{m+1,k} = \frac{(m+1)m\ldots(m-k+2)}{k!} \text{ (1)},$$

formule qui donne

$$A_{m.k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}.$$

On a donc finalement

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}a^kx^{m-k} + \ldots + a^m;$$

c'est la formule du *binôme de Newton,* formule que nous établirons plus loin, par des considérations différentes.

12. Nous indiquerons maintenant quelques méthodes permettant de trouver des identités.

Considérons une fonction algébrique de la lettre x; nous désignerons cette fonction par la notation U_x et nous poserons

$$U_x - U_{x-1} = V_x.$$

1. Nous écrivons, d'après une notation adoptée, $k!$ pour représenter le produit $1.2\ldots k$. Le symbole $k!$ s'énonce *factoriel* k, k'.

De cette identité, on déduit successivement

$$U_{x-1} - U_{x-2} \equiv V_{x-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$U_1 \quad - U_0 \quad \equiv V_1.$$

On a donc

$$U_x - U_0 \equiv V_x + V_{x-1} + \ldots + V_1.$$

Exemples. 1° soit

$$U_x = \frac{1}{x+1};$$

alors

$$V_x = \frac{1}{x(x-1)}$$

et l'on a

$$\frac{x}{x+1} \equiv \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{x(x+1)}.$$

2° Soit, généralement,

$$U_x = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+h)};$$

on trouve, par cette méthode,

$$\frac{1}{h}\,\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+h) - 1.2\ldots h}{1.2\ldots h.(x+1)\ldots(x+h)} \equiv \frac{1}{1.2\ldots(h+1)} + \frac{1}{2.3\ldots(h+2)}$$
$$\ldots + \frac{1}{x(x+1)\ldots-(x+h)}.$$

3° Soit encore

$$U_x = (x+1)^2,$$

si l'on pose

$$S_{x,1} = 1 + 2 + \ldots + x,$$

on aura

$$V_x = 2x + 1$$

et

$$S_{x,1} = \frac{x(x+1)}{2}.$$

4° Soit enfin

$$U_x = (x+1)^3.$$

Ici l'on a

$$V_x = 3x^2 + 3x + 1$$

et, en posant

$$S_{x,2} = 1^2 + 2^2 + \dots + x^2$$

on trouve

$$S_{x,2} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

13. Dans d'autres cas on posera

$$\frac{U_x}{U_{x-1}} = V_x$$

De cette identité on déduit la suivante :

$$\frac{U_x}{U_0} = V_x V_{x-1} \dots V_1.$$

Exemple. Soit

$$U_x = \frac{1}{x+1}.$$

On a

$$V_x = 1 - \frac{1}{x+1},$$

par suite,

$$\frac{1}{x+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{x+1}\right).$$

On a donc

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)} + \dots + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{x+1}\right)}$$
$$= \frac{x(x+3)}{2}.$$

14. On peut aussi poser

$$\frac{U_x}{U_{\frac{x}{2}}} = V_x.$$

On obtient alors

$$\frac{U_x}{U_{\frac{x}{2^k}}} = V_x V_{\frac{x}{2}} \dots V_{\frac{x}{2^{k-1}}}.$$

Exemple. Soit

$$U_x = \sin x.$$

La formule précédente donne

$$V_x = 2 \cos \frac{x}{2},$$

et, par conséquent,

$$\sin x = 2^k \sin \frac{x}{2^k} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^k}.$$

EXERCICES

1. *Reconnaître l'identité*

$$2^n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1.3.5\dots(2n-1)}.$$

2. *Démontrer que l'on a*

$$[(a-b)(a-c)]^2 + [(b-c)(c-a)]^2 + [(c-a)(c-b)]^2$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)^2.$$

(Ed. Lucas.)

3. *Démontrer l'identité*

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) = \alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha y + \beta z + \gamma x)^2$$
$$+ (\alpha z + \beta x + \gamma y)^2$$

si l'on a

$$\alpha + \beta + \gamma = 0;$$

par exemple, si l'on suppose

$$\alpha = (a-b)(a-c),$$
$$\beta = (b-c)(b-a),$$
$$\gamma = (c-a)(c-b).$$

(CATALAN.)

4. *Démontrer l'identité suivante, due à Lagrange :*

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2)(\beta_1^2+\beta_2^2\ldots+\beta_p^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\ldots+\alpha_p\beta_p)^2$$
$$=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)^2+\ldots+(\alpha_{p-1}\beta_p-\alpha_p\beta_{p-1})^2.$$

5. *Vérifier que l'on a*

$$(2a^2-2bc)^2+(2b^2-2ac)^2+(2c^2-2ab)^2=\left[(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2\right]$$
$$\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].$$

6. *Si l'on pose*

$$X = x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2,$$
$$Y = y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2,$$
$$Z = 3(x^2 + xy + y^2),$$
$$A = xy(x+y),$$

démontrer que l'on a

$$X^3 + Y^3 = AZ^3.$$

(ED. LUCAS.)

7. *Sachant que tout nombre entier est la somme de quatre carrés entiers, démontrer que le sextuple d'un carré quelconque est une somme de douze bicarrés.*

(ED. LUCAS.)

Cette propriété des nombres est la conséquence de l'identité suivante :

$$6(x^2+y^2+z^2+u^2)^2$$
$$=(x+y)^4+(x+z)^4+(x+u)^4+(y+z)^4+(y+u)^4+(z+u)^4$$
$$+(x-y)^4+(x-z)^4+(x-u)^4+(y-z)^4+(y-u)^4+(z-u)^4.$$

8. *Démontrer que l'on a, quel que soit α et β,*

$$\cos\alpha \sin(\alpha+\beta) + \cos^2\alpha \sin(2\alpha+\beta) + \cos^3\alpha \sin(3\alpha+\beta) + \ldots$$
$$+ \cos p\,\alpha \sin(p\alpha+\beta) = \cot\alpha\left[\cos\beta - \cos p\,\alpha \cos(p\alpha+\beta)\right].$$

On vérifie l'égalité précédente pour $p=1$, $p=2$ et l'on démontre ensuite qu'étant vraie pour $p=k$, elle a encore lieu pour $p=k+1$.

9. *Démontrer que si l'on pose*

$$e_n = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2\dots n},$$

on a

$$e_n = \frac{1}{n} e_{n-1} + \frac{1}{n(n-1)} e_{n-2} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} e_{n-3} + \dots + \frac{1}{3.2} e_1 + \frac{1}{2}.$$

On pourra utiliser la remarque suivante :

$$e_n - e_{n-1} = \frac{1}{n} (e_{n-1} - e_{n-2}).$$

DEUXIÈME LEÇON

ARRANGEMENTS. — PERMUTATIONS. COMBINAISONS.

ARRANGEMENTS.

15. Définition. *m* lettres différentes étant données, *a, b, c,... l,* si l'on prend *p* de ces lettres, $p \leq m$, et si, dans un certain ordre, on écrit ces lettres les unes à la suite des autres, nous dirons que ce résultat est un des arrangements des *m* lettres proposées prises *p* à *p*. Ainsi deux arrangements diffèrent, soit par la nature des lettres, soit seulement par l'ordre dans lequel elles sont écrites, soit enfin par la nature et par l'ordre des lettres. Avec *m* lettres prises *p* à *p*, on peut former plusieurs arrangements, dont le nombre sera représenté par A_m^p.

16. Théorème. *Entre les deux nombres* A_m^p, A_m^{p-1}, *il existe une loi de récurrence, exprimée par la relation*

$$A_m^p = (m - p + 1) A_m^{p-1}.$$

Démontrons d'abord que l'on peut former le groupe A_m^{p-1}. Prenons *m* lettres *a, b, c, ..., l.* Ces lettres, prises isolément, constituent des arrangements de *m* lettres prises une à une, c'est-à-dire le nombre A_m^1 qui, on peut le remarquer, est égal à *m*. Nous pouvons donc supposer que le groupe A_m^{p-1} a été formé. Il nous reste à montrer comment avec ce groupe A_m^{p-1} on peut former le groupe A_m^p. Nous chercherons aussi la relation qui existe entre ces nombres.

Imaginons donc tous les arrangements A_m^{p-1}, et l'un d'entre eux α, en particulier. Il y a $(p-1)$ lettres qui composent α, et $(m-p+1)$ par conséquent qui n'en font pas partie. Prenons successivement ces $(m-p+1)$ lettres et plaçons-les à la suite de α, nous aurons de la sorte constitué, avec ce terme, $(m-p+1)$ termes nouveaux, qui appartiennent nécessairement au groupe A_m^p. On peut d'ailleurs remarquer : 1° que le même terme n'a pas été formé deux fois ; 2° que tous les termes du groupe A_m^p ont été ainsi constitués.

1° *Deux arrangements obtenus par la loi précédente sont différents.* En effet, ces arrangements proviennent, ou du même terme de A_m^{p-1}, et alors la dernière lettre n'est pas la même : ou de deux termes distincts ; alors ils diffèrent par l'arrangement des $(p-1)$ premières lettres.

2° *Les termes de A_m^p ont été obtenus sans exception.* Imaginons, en effet, l'un de ces termes β ; ayant fait abstraction de la dernière lettre, nous obtiendrons un des termes du groupe A_m^{p-1}. Celui-ci a été considéré tout à l'heure, et nous avons placé à sa droite les $(m-p+1)$ lettres qui n'entraient pas dans sa composition ; β a donc été formé.

On peut maintenant conclure que, chaque terme du groupe A_m^{p-1} donnant $(m-p+1)$ termes dans le groupe A_m^p, on a

$$(1)\quad A_m^p = (m-p+1)\,A_m^{p-1}.$$

C'est la loi de récurrence qui lie entre eux les nombres A_m^p, A_m^{p-1}.

17. On déduit de cette formule

$$\begin{aligned}
A_m^p &= (m-p+1)\,A_m^{p-1},\\
A_m^{p-1} &= (m-p+2)\,A_m^{p-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_m^2 &= (m-1)\,A_m^1.
\end{aligned}$$

Multiplions et remarquons que l'on a $A_m^1 = m$; il vient

$$(2) \quad A_m^p = (m-p+1)(m-p+2)\dots(m-1)m.$$

On peut exprimer ce résultat en disant :

THÉORÈME. *Le nombre des arrangements de* m *lettres prises* p *à* p *est égal au produit de* p *nombres entiers consécutifs décroissants, dont le premier est égal à* m.

PERMUTATIONS.

18. Définition. m lettres différentes $a, b, c, \dots k, l$ étant données, si on les écrit les unes à côté des autres, mais dans des ordres différents, nous dirons que nous avons formé ainsi des permutations des m lettres proposées. Nous désignons le nombre de ces permutations par P_m. De cette définition il résulte que

$$P_m = A_m^m,$$

et par conséquent

$$P_m = 1.2.3\dots m.$$

Mais nous établirons directement cette formule, sans la considérer comme une conséquence de la formule des arrangements. Imaginons à cet effet $(m-1)$ lettres $a, b, c, \dots k$; puis toutes les permutations P_{m-1} de ces lettres, et l'une d'elles α, en particulier. A la gauche et à la droite de α, et dans tous les intervalles qui existent entre les lettres qui constituent ce terme, plaçons la m^{me} lettre l; nous formerons ainsi m termes appartenant à la famille P_m, et l'on reconnait sans difficulté que tous les termes de ce groupe P_m ont été ainsi formés, *sans exception* et *sans répétition*. On a donc

$$P_m = m P_{m-1},$$

par suite

$$P_{m-1} = (m-1) P_{m-2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_2 = 2 P_1 ;$$

d'ailleurs,

$$P_1 = 1 ;$$

on a donc enfin

$$P_m = 1.2.3. \dots m.$$

On rencontre, dans un très grand nombre de formules de l'Analyse, le produit des m premiers nombres entiers consécutifs. Ce produit est désigné par l'expression *factoriel m ;* il s'écrit symboliquement $m!$ Avec cette notation abrégée et symbolique, la formule précédente s'écrit

$$(4) \quad P_m = m!$$

COMBINAISONS.

19. *Définition.* — m lettres différentes étant données, si l'on considère un arrangement de ces lettres prises p à p, sans se préoccuper de l'ordre dans lequel elles sont écrites, on obtient une *combinaison*. — Deux combinaisons diffèrent donc nécessairement par la nature des lettres, et le nombre des combinaisons qu'on peut faire avec m lettres groupées p à p sera désigné par C_m^p. On le représente aussi quelquefois par $C_{m,p}$.

THÉORÈME. Entre les nombres A_m^p, C_m^p, P_p, on a la relation

$$A_m^p = C_m^p . P_p.$$

Imaginons, écrites dans un tableau A, toutes les combinaisons du groupe C_m^p ; prenons un terme α de ce tableau, terme qui renferme p lettres que nous permuterons de toutes les façons possibles. Nous obtiendrons ainsi, avec ce terme α, un nombre P_p d'arrangements, que nous placerons dans un second tableau B. Ayant opéré ainsi pour tous les termes de A, il est facile de reconnaître que B renferme, sans exception et sans répétition, tous les termes du groupe A_m^p.

1° *Le même terme n'a pas été formé deux fois.* Car, si l'on imagine deux termes β, β' du tableau B, ou ils proviennent

de deux termes α, α' du tableau A, et alors ils diffèrent par la nature des lettres; ou ils proviennent du même terme α, mais alors ils diffèrent non par la nature des lettres, mais par l'ordre de ces lettres.

2° *Un terme quelconque du groupe* A_m^p *a été ainsi formé.* Imaginons, en effet, un terme z du groupe A_m^p, abstraction faite de l'ordre de ses lettres; il représente une combinaison des m lettres proposées prises p à p. et, par suite, il figure quelque part dans A; encore une fois, *abstraction faite de l'ordre de ses lettres.* Ce terme ayant été considéré à un certain moment et ses lettres ayant été permutées de toutes les façons possibles, z figure donc quelque part dans le tableau B.

Ceci établi, puisque chaque terme de A donne P_p termes dans B, on a bien

$$(5) \quad A_m^p = C_m^p P_p.$$

Des formules précédemment trouvées

$$A_m^p = m(m-1)\dots(m-p+1),$$
$$P_p = 1.2\dots p;$$

et de la relation précédente on déduit la formule des combinaisons

$$(6) \quad C_m^p = \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p},$$

qui donne lieu à l'énoncé suivant :

THÉORÈME. *Le nombre des combinaisons de* m *lettres ou objets, groupés* p *par* p, *s'obtient en divisant le produit de* p *nombres entiers consécutifs décroissants, le premier d'entre eux étant égal à* m, *par le produit des* p *premiers nombres.*

20. REMARQUE. Le nombre C_m^p, par définition même, étant un nombre entier, il résulte de la formule (6) la propriété suivante :

THÉORÈME. *Le produit de* p *nombres entiers consécutifs est toujours divisible par le produit des* p *premiers nombres entiers.*

21. La formule (6) pouvant s'écrire

$$C_m^p = \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)(m-p)\dots 2.1.}{1.2\dots p.1.2\dots(m-p)},$$

on a donc

$$(7)\quad C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p!)}$$

22. Théorème. *Le nombre de combinaisons de* m *lettres, prises* p *à* p, *est égal au nombre des combinaisons prises* (m — p) *à* (m — p).

En d'autres termes, et d'après notre notation, on a

$$(8)\quad C_m^p = C_m^{m-p}.$$

Ceci résulte de l'égalité (7), le second membre restant identique à lui-même quand on change p en $(m-p)$. Mais on peut aussi l'établir *a priori*, ainsi qu'il suit.

Imaginons les m lettres proposées ; prenons p d'entre elles, nous formons un terme α de C_m^p ; mais les $(m-p)$ lettres qui n'ont pas été considérées forment, par leur ensemble, un terme α' de C_m^{m-p} ; ainsi on ne peut pas imaginer un terme du groupe de C_m^p qui n'ait son correspondant dans le groupe C_m^{m-p}. La réciproque est vraie ; on a donc autant de termes dans les deux groupes C_m^p, C_m^{m-p}.

23. Théorème. *Le nombre des combinaisons de* m *lettres* a, b, c,... l ; *prises* p *à* p, *est égal au nombre des combinaisons de* (m — 1) *lettres* p *à* p, *augmenté du nombre des combinaisons de ces* (m — 1) *lettres prises* (p — 1) *à* (p — 1).

Il faut démontrer que l'on a

$$(9)\quad C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}.$$

Cette relation, comme celle du théorème précédent, peut s'établir de deux façons différentes. Elle peut d'abord être considérée comme une conséquence de la formule (7). En effet, on a, d'après cette formule,

$$C_{m-1}^p = \frac{(m-1)!}{p!(m-p-1)!},$$

$$C_{m-1}^{p-1} = \frac{(m-1)!}{(p-1)!(m-p)!},$$

d'où

$$C_{m-1}^{p} + C_{m-1}^{p-1} = \frac{(m-1)!}{(p-1)!\,(m-p-1)!}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{m-p}\right),$$

ou

$$C_{m-1}^{p} + C_{m-1}^{p-1} = \frac{(m-1)!\,m}{(p-1)!(m-p-1)!\,p.(m-p)} = \frac{m!}{p!(m-p)!},$$

et par conséquent

$$C_{m-1}^{p} + C_{m-1}^{p-1} = C_m^p.$$

24. Remarque. On peut aussi reconnaître cette propriété *a priori*, en remarquant que les termes du groupe C_m^p peuvent être séparés en deux parties : la première formée de ceux qui ne renferment pas la lettre *a* et qui sont en nombre C_{m-1}^p ; l'autre, constituée par tous les termes dans lesquels entre la lettre *a*. On peut imaginer que, dans ces termes, on mette la lettre *a*. en facteur : on voit alors que la parenthèse ainsi obtenue renferme, sans omission et sans répétition, tous les termes du groupe C_{m-1}^{p-1}, formés avec les lettres *b, c,... k, l*. Ce raisonnement montre donc bien que le nombre C_m^p est la somme des nombres C_{m-1}^p et C_{m-1}^{p-1}.

COMBINAISONS AVEC RÉPÉTITION OU COMBINAISONS COMPLÈTES.

25. *Définition.* Étant données *m* lettres *a, b,... l,* si l'on prend *p* de ces lettres, certaines d'entre elles *pouvant être répétées plusieurs fois, on aura formé une combinaison des lettres données, prises* p *à* p *et avec répétition.*

Ainsi, *ab, ac, bc* sont des combinaisons simples des trois lettres *a, b, c* prises deux à deux; *ab, ac, bc, aa, bb, cc* représentent les combinaisons complètes de ces mêmes lettres prises deux à deux. Nous désignerons par γ_m^p le nombre des combinaisons avec répétition de *m* lettres données prises *p* à *p*. Dans la notation C_m^p, on a forcément $p \leq m$; cette condition n'est

plus nécessaire pour les combinaisons complètes ; on peut avoir, avec celles-ci, $p > m$. Par exemple,

$$a.a.b, \quad a.a.a, \quad a.b.b, \quad b.b.b.$$

sont les combinaisons complètes de *deux lettres a* et *b* prises *trois à trois*.

26. Théorème. *Les deux nombres* γ_m^p, γ_m^{p-1} *sont liés par la relation de récurrence*

$$(10) \quad \gamma_m^p = \frac{m+p-1}{p} \gamma_m^{p-1}.$$

La démonstration que nous allons donner repose sur cette idée évidente, que si, dans un tableau donné on compte une lettre a par deux voies différentes, mais toutes deux exactes, les deux nombres ainsi trouvés sont égaux.

Considérons, par exemple, la lettre a : elle entre dans le tableau γ_m^p un nombre de fois que nous désignons par x. Le nombre des lettres renfermées dans ce tableau étant $p\gamma_m^p$ et chacune des lettres y entrant un même nombre de fois, on a

$$(11) \quad x = \frac{p}{m} \gamma_m^p.$$

D'autre part, on peut encore compter la lettre a d'une autre façon, en séparant, par la pensée, les termes de γ_m^p en deux parties : la première formée de tous ceux qui ne contiennent pas la lettre a ; l'autre, au contraire, de tous ceux qui renferment cette lettre, une fois au moins. Imaginons que l'on écrive ce second groupe en mettant a en facteur commun et appelons P l'ensemble des termes qui se trouveraient ainsi placés dans la parenthèse. On peut facilement observer que P représente, sans exception et sans répétition, tous les termes de la famille γ_m^{p-1}. Sans répétition, parce que, en supprimant le facteur a dans ces combinaisons, qui ne sont pas identiques, les résultats sont aussi différents ; sans exception, car s'il manquait dans P un seul terme de γ_m^{p-1}, en imaginant ce

terme absent et en lui ajoutant le facteur a, on aurait ainsi un terme de γ_m^p qui n'eût pas existé dans la parenthèse P. D'après la formule (11), la lettre a est répétée $\frac{p-1}{m}\gamma_m^{p-1}$ dans P. Mais pour former P, on a supprimé aux termes de γ_m^p autant de fois la lettre a qu'il y a de termes dans P; c'est-à-dire γ_m^{p-1}fois; on a donc

$$x = \frac{p-1}{m}\gamma_m^{p-1} + \gamma_m^{p-1}$$

ou

$$(12) \quad x = \frac{m+p-1}{m}\gamma_m^{p-1}$$

En comparant (11) et (12), on trouve bien la formule annoncée.

27. Formule des combinaisons complètes. Si l'on applique le théorème précédent successivement aux nombres $\gamma_m^p, \gamma_m^{p-1}, \ldots \gamma_m^2, \gamma_m^1$ on aura

$$\gamma_m^p = \frac{m+p-1}{p}\gamma_m^{p-1},$$

$$\gamma_m^{p-1} = \frac{m+p-2}{p}\gamma_m^{p-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$\gamma_m^2 = \frac{m+1}{2}\gamma_m^1.$$

En multipliant ces égalités membre à membre, et en remarquant que $\gamma_m^1 = m$, on obtient la formule des combinaisons complètes

$$(13) \quad \gamma_m^p = \frac{(m+p-1)(m+p-2)\ldots m}{1\,2\ldots p},$$

qui donne lieu à l'énoncé suivant :

Théorème. *Le nombre des combinaisons complètes de* m *lettres groupées* p *à* p *s'obtient en divisant par le produit des* p

premiers nombres entiers, le produit des p *nombres entiers consécutifs croissants, dont le premier est égal à* m.

28. Remarque. La formule (13) prouve que

$$(14)\quad \gamma_m^p = C_{m+p-1}^p.$$

On peut aussi observer que l'égalité (13) peut s'écrire

$$(15)\quad \gamma_m^p = \frac{(m+p-1)!}{p!\,(m-1)!}.$$

29. Définition des permutations avec répétition. Si l'on imagine m lettres parmi lesquelles α sont identiques à a, β à b, γ à c,... λ à l, les différents groupes que l'on peut former en plaçant ces lettres les unes à la suite des autres de toutes les manières possibles portent le nom de *permutation avec répétition.*

30. Formule des permutations à répétition. Considérons m lettres et formons le tableau des permutations que l'on peut faire avec ces lettres.

Soit R_m le nombre de ces permutations. Affectons dans chacun des termes les α lettres a des indices $1, 2,..\alpha$. Permutons maintenant ces indices de toutes les manières possibles ; nous obtiendrons un second tableau dont le nombre des termes sera égal à $R_m . P_\alpha$. Or ce second tableau contient toutes les permutations qu'on peut former avec m lettres parmi lesquelles β sont identiques à b, γ à c,... λ à l, les autres lettres étant distinctes. En effet, 1° deux termes du second tableau sont distincts, car s'ils proviennent d'un même terme du premier tableau, ils diffèrent par l'ordre des indices $1, 2,... \alpha$, ou, s'ils résultent de deux termes distincts, ils sont différents par l'ordre des lettres. — 2° Une permutation quelconque des m lettres, où l'on suppose que β lettres sont identiques à b, γ à c,... λ à l, les autres lettres étant distinctes, figure dans le second tableau ; car, si l'on supprime dans cette permutation les indices $1, 2, 3,... \alpha$, on obtient un terme du premier tableau ; et, par hypothèse, on a affecté les

lettres a qui se trouvent dans ce terme des indices $1, 2, \ldots \alpha$, en donnant à ces indices toutes les dispositions possibles.

Cette remarque étant faite, affectons les β lettres b des indices $1, 2, \ldots \beta$, dans chacun des termes du second tableau, et permutons tous les indices de toutes les manières possibles; nous formerons ainsi un troisième tableau, dont le nombre des termes sera égal à

$$R_m \,.\, P_\alpha \,.\, P_\beta$$

et on démontre, comme précédemment, que ces termes sont les permutations distinctes de m lettres dont γ sont identiques à $c, \ldots \lambda$ à l.

En continuant ainsi, on finira par former toutes les permutations de m lettres distinctes. Le nombre de ces permutations sera

$$R_m \,.\, P_\alpha \,.\, P_\beta \,.\, P_\gamma \ldots . P_\lambda,$$

or ce nombre étant égal à P_m, on a donc

$$R_m = \frac{P_m}{P_\alpha \,.\, P_\beta \,.\, P_\gamma \ldots P_\lambda},$$

ou

$$R_m = \frac{1.2.3 \ldots . m}{(1.2 \ldots \alpha)(1.2 \ldots \beta)(1.2 \ldots \gamma) \ldots (1.2 \ldots \lambda)}$$

ou encore

$$R_m = \frac{m!}{\alpha! \,.\, \beta! \,.\, \gamma! \ldots . \lambda!}.$$

EXERCICES

1. *Pour former les combinaisons simples de m lettres $a, b, c, \ldots l$, prises p à p, on écrit les lettres qui entrent dans les diverses combinaisons $(p-1)$ à $(p-1)$, dans l'ordre alphabétique, et on écrit à la suite de chacune de ces combinaisons, successivement chacune des lettres qui suivent la dernière dans l'ordre alphabétique. En déduire la formule*

$$C_m^p = \frac{m-p+1}{p} C_m^{p-1}$$

2. On considère le tableau des combinaisons complètes de m lettres (p—1) à p—1), tableau où l'on suppose que dans chaque combinaison les lettres sont écrites dans l'ordre alphabétique. A la suite de chaque combinaison on écrit successivement la dernière lettre et toutes celles qui la suivent dans l'ordre alphabétique. Démontrer que l'on forme ainsi toutes les combinaisons complètes de m lettres p à p.

3. Soient les $(m+p-1)$ lettres $a_1\, a_2 \ldots a_{m+p-1}$. Dans chacune des combinaisons simples de ces $(m+p-1)$ lettres, où l'on suppose que les indices se succèdent dans l'ordre croissant, on diminue le second indice de 1, le troisième de 2, le p^{me} de $(p-1)$. Démontrer que l'on obtient ainsi, sans omission et sans répétition, les combinaisons complètes des m lettres $a_1, a_2 \ldots a_m$ prises p à p ; en conclure la formule

$$\gamma_m^p = C_{m+p-1}^p.$$

4. Démontrer que l'on a

$$\gamma_m^p = \gamma_{m-1}^p + \gamma_m^{p-1}$$

En déduire la formule

$$\gamma_1^p + \gamma_2^p + \gamma_3^p + \ldots + \gamma_m^p = \gamma_m^{p+1},$$

ou

$$1.2.3\ldots p + 2.3\ldots(p+1) + \ldots + m(m+1)\ldots(m+p-1) = \frac{m(m+1)\ldots(m+p)}{p+1}.$$

5. Etablir la formule

$$C_{m+m'}^p = C_m^p + C_m^{p-1}\,C_{m'}^1 + \ldots + C_m^{p-\alpha}\,C_{m'}^\alpha + \ldots + C_m^1\,C_{m'}^{p-1} + C_{m'}^p,$$

Dans le cas où, $m = m' = p$, on a

$$C_{2m}^m = 1^2 + (C_m^1)^2 + (C_m^2)^2 + \ldots + (C_m^{m-1})^2 + (C_m^m)^2.$$

TROISIÈME LEÇON

FORMULE DU BINOME

31. La formule que nous nous proposons d'établir, formule due à Newton, est celle qui donne le développement, suivant les puissances croissantes de x, de la puissance m^{ieme} du binôme $(x+a)$; *m étant un nombre entier et positif.* En généralisant ce problème, on est naturellement conduit à rechercher le développement du produit,

$$P=(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l)$$

en supposant les lettres $a, b. c, \ldots l$ en nombre m. On peut, en effet, considérer $(x+a)^m$ comme un cas particulier de P, celui où l'on suppose $a=b=c\ldots=l$.

32. Théorème. *Si l'on désigne par* S_p, *la somme des combinaisons p à p, ces lettres a, b, c. . . , l; on a*

$$(1)\quad (x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\ldots+ S_px^{m-p}+\ldots+S_m.$$

On peut établir cette identité en démontrant qu'un terme quelconque du premier membre existe dans le second et *vice versa.*

Considérons un terme du premier membre; il est nécessairement obtenu en prenant la lettre x dans $(m-p)$ binômes et les lettres autres que x dans les p autres binômes, $(p\leqslant m)$. Ces dernières constituent par leur produit une combinaison des lettres données $a, b, c\ldots, l$ prises p à p; le terme ainsi obtenu fait donc partie, dans le second membre, du groupe S_px^{m-p}. — *Réciproquement,* prenons un terme quelconque du second membre, par exemple le terme Ax^{m-k}, du groupe S_kx^{m-k} $k\leqslant m)$; je dis que ce terme existe aussi dans le premier

membre, lorsqu'il a été développé. Remarquons, en effet, que A représente une combinaison de m lettres prises k à k; soulignons dans le premier membre tous les binômes qui renferment ces k lettres et multiplions celles-ci par la lettre x prise dans tous les binômes non soulignés. Le produit obtenu est un des termes du premier membre, et l'identité se trouve ainsi démontrée.

33. Formule du binôme. Si l'on considère le coefficient S_p de l'identité précédente, et si l'on suppose

$$a = b = c = \ldots = l,$$

tous les termes de S_p deviennent égaux à a^p. Le nombre de ces termes est égal au nombre des combinaisons de m lettres prises p à p; on voit donc que, dans cette hypothèse particulière, on a

$$S_p = a^p C_m^p;$$

l'identité (1) devient alors

$$(2)\quad (x+a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \ldots + C_m^p a^p x^{m-p} + \ldots + a^m.$$

Si nous tenons compte de la formule des combinaisons établie plus haut, nous obtenons la formule

$$(3)\quad (x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p} a^p x^{m-1} + \ldots + a^m.$$

Nous pouvons aussi la répresenter, en prenant une notation abrégée, par

$$(4)\quad (x+a)^m = A_0 x^m + A_1 a x^{m-1} + A_2 a^2 x^{m-2} + \ldots + A^p a^p x^{m-p} + \ldots + A_m a^m.$$

Il suffit de poser $A_0 = 1$ et

$$(5)\quad A_p = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p} = C_m^p.$$

Telle est cette formule du binôme, formule due à Newton et qui est fréquemment employée dans l'analyse. On peut observer que le développement du binôme renferme $(m+1)$ termes. Les coefficients de ces termes donnent lieu à diverses remarques que nous allons successivement établir.

34. Remarques. 1° *Deux coefficients binômiaux consécutifs* A_{p-1}, A_p *satisfont à la loi de récurrence suivante*

$$(6) \quad A_p = \frac{m-p+1}{p} A_{p-1}.$$

Ceci résulte immédiatement de la formule (5), formule qui donne

$$(7) \quad A_{p-1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.\,2\ldots(p-1)}.$$

En divisant, membre à membre, les égalités (5) et (7), on obtient bien la relation,

$$A_p = \frac{m-p+1}{p} A_{p-1}.$$

2° *Deux coefficients également éloignés des extrêmes sont égaux.*

En effet A_p est le coefficient du terme qui en a p avant lui ; de même, $A_{m-p}x^p$ est le terme qui en a $(m-p)$ avant lui.

Il y a d'ailleurs $(m+1)$ termes dans le développement, il y en a donc p après $A_{m-p}x^p$; il faut donc reconnaître que

$$A_p = A_{m-p},$$

ou que

$$C_m^p = C_m^{m-p},$$

propriété démontrée précédemment.

3° *Lorsque* m *est pair, les coefficients vont en augmentant jusques et y compris le terme du milieu, et, lorsque* m *est impair, les coefficients augmentent pendant la première moitié du développement.*

La relation (6) prouve que les coefficients augmentent tant que l'inégalité

$$\frac{m-p+1}{p} > 1.$$

ou, puisque p est positif, tant que l'inégalité

$$(8) \quad m+1 > 2p.$$

est vérifiée.

Nous distinguerons deux cas, suivant que m est pair ou impair.

Premier cas. Supposons d'abord m pair ; soit $m = 2h$. Il y a $(2h+1)$ termes dans la formule de Newton. L'un d'eux occupe la place du milieu : c'est celui qui a h termes avant lui et h termes après lui. Dans notre notation, ce terme s'écrit $A_h a^h x^h$. L'inégalité (8) devient alors

$$p < h + \frac{1}{2}.$$

p est entier et il ne peut être inférieur à $h + \frac{1}{2}$ que s'il prend les valeurs $0, 1, 2 \ldots, h$; donc tous les coefficients $A_0, A_1, A_2 \ldots A_h$ sont rangés par ordre de grandeur croissante.

D'ailleurs, et d'après la remarque précédente, les coefficients qui suivent le terme du milieu étant respectivement égaux à $A_{h-1} \ldots, A_0$, la suite $A_{h+1} \ldots, A_{2h}$ représente des nombres décroissants.

Deuxième cas. Dans l'autre cas, celui où m est impair, $m = 2h+1$; l'inégalité (8) devient

$$p < h + 1.$$

On voit par là que p ne peut prendre, pour obtenir des coefficients croissants, que les valeurs $0, 1, 2 \ldots, h$. Ainsi, $A_0, A_1, \ldots A_h$ est une suite croissante, et, $A_{h+1} \ldots, A_{2h+1}$ est une suite décroissante.

4° *La somme des coefficients binômiaux de $(x+a)^m$ est toujours égale à 2^m.* En effet, l'identité,

$$(x+a)^m = A_0 x^m + A_1 a x^{m-1} + \ldots + A_m a^m$$

donne, pour $x = a = 1$,

$$2^m = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_m.$$

5° *Le développement de $(x - a)^m$, peut se faire par la formule*

$$(9) \quad (x - a)^m = A_0 x^m - A_1 a^2 x^{m-1} + \ldots + (-1)^p \cdot A_p a^p x^{m-p} + \ldots + (-1)^m A_m a^m.$$

Pour établir cette identité, il suffit de changer a en $(-a)$ dans la formule de Newton.

6° *Les coefficients binômiaux d'indice impair forment une somme toujours égale à celle des coefficients d'indice pair.*

Si l'on suppose $x = a$ dans (9), on obtient,

$$A_0 - A_1 + A_2 \ldots + (-1)^p A_p + \ldots + (-1)^m A_m = 0.$$

Ceci prouve la proposition énoncée, proposition qui d'après la deuxième remarque, était évidente pour m impair.

D'autre part, si l'on observe que

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_m = 2^m,$$

on a encore

$$(10) \quad A_0 + A_2 + \ldots = A_1 + A_3 + \ldots = 2^{m-1}.$$

Pour vérifier les propositions qui précèdent sur un exemple numérique, considérons le développement de $(x+a)$ 6

$$(x+a)^6 = A_0 x^6 + A_1 a x^5 + A_2 a^2 x^4 + A_3 a^3 x^3 + A_4 a^4 x^2 + A_5 a^5 x + A_6 a^6.$$

On a bien conformément aux propriétés démontrées tout à l'heure,

$$A_0 = A_6 = 1,$$
$$A_1 = A_5 = 6,$$
$$A_2 = A_4 = 14,$$
$$A_3 = 20,$$
$$A_0 + A_1 + \ldots + A_6 = 64 = 2^6,$$
$$A_0 + A_2 + A_4 + A_6 = A_1 + A_3 + A_5 = 32 = 2^5.$$

35. Somme des carrés des coefficients binomiaux.

Considérons les deux identités

$$(x+a)^m = A_0 x^m + A_1 a x^{m-1} + \dots + A_m a^m,$$
$$(x+a)^m = A_m a^m + A_{m-1} a^{m-1} x + \dots + A_0 x^m.$$

Multiplions les, puis égalons dans les deux membres, les coefficients de $x^m a^m$. Tenons compte d'ailleurs des égalités $A_0 = A_m$, $A_1 = A_{m-1}$ etc., nous obtenons

$$C_{2m}^m + \frac{2m(2m-1)\dots(m+1)}{1 \,.\, 2 \dots m} = A_0^2 + A_1^2 + \dots A_m^2,$$

ou encore

$$(11) \quad A_0^2 + A_1^2 + \dots + A_m^2 = \frac{2m!}{m!\,m!}.$$

36. Puissance d'un polynôme. Considérons l'expression

$$X = (a+b+c+\dots+l)^m,$$

m étant un nombre entier et positif. On peut dire que X est le produit de m facteurs égaux à $(a+b+c+\dots+l)$. Un terme quelconque de X pent donc être conçu comme obtenu en prenant a, dans α facteurs, b dans β facteurs, etc.; l dans λ facteurs a. Les nombres $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sont nuls ou positifs, mais on suppose toujours

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = m.$$

D'après cette remarque, et sous la réserve de cette condition, on peut dire qu'un terme quelconque du développement cherché est

$$Y = H.\, a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots l^\lambda.$$

Il faut maintenant déterminer le coefficient H.

A cet effet, remarquons que la puissance m^{me} de $(a+b+c \dots + l)$ est le produit des m polynômes

$$(a+b+c\dots+l)(a+b+c\dots+l)\dots(a+b+c+\dots+l).$$

Prenons une lettre dans chaque facteur et écrivons les lettres

ainsi choisies, les unes à la suite des autres, en plaçant la première, celle qui est prise dans le premier facteur, la seconde, celle qui est prise dans le deuxième et ainsi de suite. Nous formons ainsi une permutation de m lettres dont α sont identiques à a, β à $b, \ldots, \lambda$ à l; à chaque disposition de ces lettres correspond une manière de former le terme considéré. Le coefficient de ce terme sera donc égal au nombre de permutations de m lettres dont α sont identiques à a, β à $b, \ldots \lambda$ à l, c'est-à-dire à R_m. Ainsi on a

$$H = R_m,$$

ou

$$\text{(B)} \quad H = \frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}.$$

On a donc la formule

$$(a+b+c\ldots+l)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda. \quad (12)$$

37. Du symbole 0! Le raisonnement n'est nullement en défaut si l'une des lettres, a par exemple, n'entre pas dans les termes considérés, termes constituant un groupe analogue à celui que nous avons considéré tout à l'heure. Il suffit d'envisager les permutations avec répétitions des lettres b, $c, \ldots l$; b étant répété β fois, $\ldots, l$, λ fois; mais, bien entendu, avec la condition

$$\beta+\gamma\ldots+\lambda = m.$$

En appliquant à ce cas particulier le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure, on trouve que le coefficient qui correspond au terme considéré est égal à

$$\frac{m!}{\beta!\gamma!\ldots\lambda!}.$$

On peut convenir, dans le but de généraliser la formule (B), que l'expression symbolique $0!$ à laquelle on est conduit en faisant, dans (B), l'hypothèse $\alpha = 0$, qui correspond au cas

particulier qui nous occupe, sera remplacé par l'unité. Avec cette convention, la formule (12) est générale. Le signe Σ de cette formule veut dire que le second membre est constitué avec tous les termes de la forme

$$\frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}a^\alpha b^\beta\ldots l^\lambda,$$

$\alpha, \beta \ldots \lambda$ représentant toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$(G)\quad \alpha+\beta+\ldots+\lambda=m.$$

Il faut pourtant accepter cette restriction que, par convention, on écrit $0! = 1$.

38. Procédé pratique pour le développement de la puissance m d'un polynôme. La formule (12), comme beaucoup de formules analogues de l'analyse, présente, dans l'application, une difficulté évidente, difficulté qui tient à la recherche de toutes les solutions entières positives ou nulles de l'équation (G). Dans la pratique, il est plus simple d'opérer de la manière suivante. On considère $(b+c+\ldots+l)$ comme ne formant qu'une lettre. On développe, par la formule du binôme, l'expression

$$[a+(b+c+\ldots+l)]^m$$

On opère de même, sur $(b+c+\ldots+l)$, en considérant $(c+\ldots+l)$ comme formant une lettre. On obtient ainsi de proche en proche, le développement demandé.

Soit proposé, par exemple, le développement de $(a+b+c)^3$; on a

$$(a+b+c)^3=[a+(b+c)]^3$$

ou

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$$

ou enfin, après réduction

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3a^2b+3a^2c+3b^2c+3b^2a$$
$$+3c^2b+3c^2a.$$

Pour développer la puissance $m^{ième}$ d'un polynôme on peut aussi former toutes les combinaisons complètes m à m des lettres a, b, c, ... l, et affecter chaque combinaison du coefficient convenable.

39. Nombre des termes du développement de X, $X = (a+b+c+\ldots+l)^m$.

Les termes de la formule (12) étant de la forme $a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$, avec la condition $\alpha+\beta+\ldots+\lambda=m$, il y a autant de termes que l'on peut faire de combinaisons complètes avec les lettres $a, b, \ldots l$, prises m à m. Si l'on suppose ces lettres en nombre p, il y aura donc γ_m^p termes dans X.

Mais on a trouvé

$$\gamma_m^p = C_{m+p-1}^m$$

et, comme

$$C_{m+p-1}^m = C_{m+p-1}^{p-1},$$

on aura donc

$$\gamma_m^p = \frac{(m+p-1)(m+p-2)\ldots p}{1\,2\,3\ldots m}$$

ou

$$\gamma_m^p = \frac{(m+p-1)\ldots(m+1)}{1\,2\,3\ldots(p-1)}.$$

On prendra l'une ou l'autre de ces formules ; la première de préférence, si $m < p-1$; la deuxième dans le cas contraire.

40. Théorèmes d'Euler et de Fermat. On peut déduire de la formule (12), une démonstration des théorèmes d'Euler et de Fermat.

Imaginons que dans cette formule, qui a lieu pour toutes les valeurs de $a, b, c, \ldots l$, on fasse $a=b=c=\ldots=l=1$; le premier membre devient p^m, les lettres étant supposées en nombre p. Dans le second membre se trouvent, parmi les termes qui le constituent, $a^m, b^m, \ldots l^m$, dont la somme devient égale à p, de telle sorte que

$$p^m - p = M.$$

M désigne ce que devient l'ensemble de tous les autres termes du développement dans l'hypothèse $a = b = c \ldots = l = 1$. Un terme quelconque de M est, dans cette hypothèse, de la forme

$$H = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}$$

Comme on suppose $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m$, les nombres positifs. $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ sont tous inférieurs à m. Il n'y a d'exception à cette règle que si l'on suppose tous les nombres $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ nuls, à l'exception d'un seul; celui-ci étant nécessairement égal à m. Mais alors le terme qui correspond à cette hypothèse particulière, le terme $Y = H\, a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$ (H étant dans ce cas égal à 1) devient l'un des nombres $a^m, b^m, \ldots l^m$. Ces nombres constituent le groupe que nous avons d'abord considéré, et qui, comme nous l'avons remarqué, a pris la valeur p. On peut donc affirmer que, dans les termes de M, les lettres $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ représentent toujours des nombres positifs, et *inférieurs à m*. D'ailleurs H est un nombre entier. Si nous supposons que m soit un nombre premier, après la simplification que comporte H et qui a pour but de lui donner la forme entière, on peut être certain que le nombre premier m n'entrant pas au dénominateur, sera l'un des facteurs de cette forme entière.

Ainsi tous les termes de M, mis sous la forme entière, seront divisibles par m ; le nombre $(p^m - p)$ est donc lui-même divisible par m. On arrive ainsi au théorème d'Euler :

41. THÉORÈME. *Si* m *est un nombre premier absolu, et* p *un nombre entier quelconque, la différence* $p^m - p$ *est toujours divisible par* m.

Le théorème de Fermat n'est, à proprement parler, qu'un corollaire du précédent. Puisque $(p^m - p)$ est divisible par m, on peut écrire

$$p\,(p^{m-1} - 1) = mA,$$

A désignant un nombre entier. Si l'on suppose que le nom-

bre premier m, ne divise pas p; divisant le produit $p\,(p^{m-1}-1)$ et étant premier avec le facteur p, il doit donc diviser l'autre facteur $(p^{m-1}-1)$. Cette remarque constitue le théorème de Fermat, qui peut s'énoncer ainsi :

42. THÉORÈME. *Si* m *est un nombre premier ne divisant pas* p, *il divise nécessairement* $(p^{m-1}-1)$.

EXERCICES

1. *Démontrer à priori que les coefficients binômiaux également éloignés des extrêmes sont égaux.*

On remarque, comme une conséquence de la multiplication algébrique, que $(1+x)^m$ est, après développement, une fonction entière de x de degré m. On pose

$$(1+x)^m = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m,$$

puis on change x en $\frac{1}{x}$.

2. *Démontrer les deux identités*

$$C_p^{2q} - C_p^{2q-1}C_{p-1}^1 + C_p^{2q-2}C_{p+1}^2 \ldots + C_{p+1}^{2q} = - C_p^q$$
$$C_p^{2q+1} - C_p^{2q}C_{p+1}^1 + C_p^{2q-1}C_{p+1}^2 \ldots - C_{p+1}^{2q+1} = C_p^q$$

dans lesquelles C_α^6 *représente, bien entendu, les conbinaisons de* α *objets pris* 6 *à* 6.

On développera $(x+1)^p$ et $(x-1)^{p+1}$, puis on fera le produit de ces deux développements. On observera que

$$(x+1)^p\,(x-1)^{p+1} = (x^2-1)^p\,(x-1)$$

et l'on trouvera facilement les deux identités proposés. Il faut pourtant distinguer deux cas : suivant que l'on considère, dans ce dernier développement, un terme de rang pair ou un terme de rang impair.

3. *Démontrer les relations.*

$$2\,(2-1)\,C_p^2 = C_p^1C_{p-1}^1$$
$$2\,(2^2-1)\,C_p^3 = C_p^1C_{p-1}^2 + C_p^2C_{p-2}^1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\,(2^{k-1}-1)\,C_p^k = C_p^1C_{p-1}^{k-1} + C_p^2C_{p-2}^{k-2} + \ldots\, C_p^{k-1}C_{p-k+1}^1$$

On prendra l'identité

$$(x+1)^p = x^p + C_p^1 x^{p-1} + C_p^2 x^{p-2} + \ldots + C_p^p$$

on y changera x en $(x+1)$; ou, x en $2x+1$, comme on voudra.

4. *Démontrer l'identité*

$$C_p^{2k} = C_p^k + C_p^1 C_p^{k-1} + C_p^2 C_p^{k-2} + \ldots + C_p^{k-1} C_p^1 + C_p^k.$$

On identifie les termes deux à deux, dans l'identité

$$(x+1)^{2p} = (x+1)^p (x+1)^p.$$

5. *Si l'on pose*

$$S_n^p = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$$

démontrer que

$$n^{p+1} = S_n^p + C_p^1 S_{n-1}^p + C_p^2 S_{n-1}^{p-1} + \ldots + C_p^{p-1} S_{n-1}^2 + S_{n-1}^1$$

Pour répondre à cette question on pourra considérer la fonction X,

$$X = (n-1)n^p + (n-2)(n-1)^p + \ldots + 1.2^p$$

ou

$$X = S_n^{p+1} - S_n^p$$

et remarquer que

$$(n-1)n^p = (n-1)^{p+1} + C_p^1 (n-1)^p + C_p^2 (n-1)^{p-1} + \ldots + (n-1).$$

6. *Démontrer que si l'on pose*

$$x + \frac{1}{x} = y$$

et

$$x^k + \frac{1}{x^k} = V_k$$

on a

$$V_{p+1} - yV_p + C_{p+1}^1 V_{p-1} - yC_p^1 V_{p-2} + C_{p+1}^2 V_{p-3} - yC_p^2 V_{p-4} + \ldots = 0.$$

On pourra établir cette identité en considérant les développements de

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{p+1}, \quad \text{et de} \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^p.$$

QUATRIÈME LEÇON

TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL. — PILES DE BOULETS.

43. Imaginons le tableau suivant :

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 . 1
$(a+b)^2$	1 . 2 . 1
$(a+b)^3$	1 . 3 . 3 . 1
$(a+b)^4$	1 . 4 . 6 . 4 . 1
. . . . .	. . . .
. . . . .	. . . .
. . . . .	. . . .
$(a+b)^p$	$1 \,.\, C_p^1 \,.\, C_p^2 \ldots C_p^{p-1} \,.\, 1$

Ce tableau a été formé en écrivant dans la ligne de rang $(p+1)$, les coefficients du développement de la puissance p du binôme. Il constitue le triangle arithmétique de Pascal. Les nombres écrits dans ce triangle jouissent de propriétés diverses. Nous indiquerons seulement les plus saillantes.

44. Première propriété. *Le nombre écrit dans la ligne de rang* z *et dans la colonne de rang* t *est égal à*

$$\frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-t+1)}{1\,.\,2\ldots(t-1)}.$$

En effet, d'après la définition même du triangle de Pascal ce nombre est C_{z-1}^{t-1} et l'on a bien

$$C_{z-1}^{t-1} = \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-t+1)}{1 \cdot 2 \dots (t-1)}.$$

Remarque. Lorsque t est supérieur à z, la formule C_z^t n'a plus de sens ; mais on peut convenir que dans ce cas $C_z^t = 0$.

45. Deuxième propriété. *Si l'on considère dans le triangle de Pascal trois nombres* A, B, H *disposés comme nous l'indiquons ici,*

A	B
	H

de telle sorte que A *soit écrit immédiatement à la gauche de* B *et* H *immédiatement au-dessous de* B, *on a* $A + B = H$.

En effet si l'on pose

$$A = C_p^q,$$

on a

$$B = C_p^{q+1},$$

et

$$H = C_{p+1}^{q+1}.$$

D'ailleurs, nous avons vu que

$$C_{p+1}^{q+1} = C_p^q + C_p^{q+1}.$$

Ainsi

$$H = A + B.$$

46. Troisième propriété. *Si l'on considère deux colonnes consécutives du triangle*

1	
A	1
B	B'
C	C'
. .	. .
K	K'
L	L'
. .	U
. .	

On a

$$U = 1 + A + B + \dots + K + L.$$

En effet d'après la deuxième propriété on peut écrire

$$\begin{aligned} U &= L + L' \\ L' &= K' + K \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ C' &= B' + B \\ B' &= 1 + A \end{aligned}$$

ajoutons et simplifions, on a

$$U = 1 + A + B + \dots + K + L.$$

Remarque. Les nombres du triangle de Pascal situés dans une même colonne se présentent dans certaines questions d'analyse. On les a nommés *nombres figurés*. Les nombres figurés de la troisième colonne sont les *nombres triangulaires*; ceux de la quatrième *les nombres pyramidaux*.

SOMMATION DES PILES DE BOULETS.

47. Formule préliminaire. Nous poserons

$$S_n^k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

k désignant un nombre entier et positif. On sait que

$$S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nous nous proposons de chercher S_n^2.
On a

$$(n+1)^3 - (n-1)^3 = 6n^2 + 2$$

par suite,

$$\begin{aligned} n^3 - (n-2)^3 &= 6(n-1)^2 + 2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 3^3 - 1^3 &= 6 \, . \, 2^2 + 2 \\ 2^3 &= 6\,1^2 + \, . \end{aligned}$$

Ajoutons, il vient

$$(n+1)^3 + n^3 - 1 = 6S_2 + 2n$$

ou

$$2n^3 + 3n^2 + n = 6S_2$$

ou enfin

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Cette formule sert de base aux calculs qui vont suivre.

48. Piles à base carrée. Les projectiles ronds, dans ces sortes de piles, sont disposés de la façon suivante : sur le sol on range les boulets de façon qu'ils forment un carré ayant n boulets de chaque côté ; au-dessus, et dans les creux formés par cette figure, on place de nouveaux boulets qui constituent un carré ayant $(n-1)$ boulets et ainsi de suite ; jusqu'à ce

que l'on arrive au sommet de la pile, sommet qui est formé par un seul boulet.

Il résulte de cette disposition que le nombre de boulets renfermés dans la pile est :

$$n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2.$$

par conséquent et d'après la formule (A),

$$(3) \quad X = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

49. Pile carrée tronquée. Lorsqu'on veut prendre à la pile précédente un certain nombre de boulets, on retire d'abord celui du sommet, puis ceux qui forment la couche suivante, etc., et l'on obtient ainsi une pile carrée tronquée. Pour compter les boulets de cette pile tronquée, en supposant que le carré de base renferme n^2 boulets et celui qui termine la pile $(p+1)^2$ on aura évidemment pour le nombre cherché X',

$$X' = \frac{n(n+1)(2n+1) - p(p+1)(2p+1)}{6}$$

ou encore :

$$(4) \quad X' = \frac{(n-p)[2p^2 + p(2n+3) + (n+1)(2n+1)]}{6}.$$

Dans l'hypothèse de $p = o$ on retrouve la formule (3).

50. Piles à base triangulaire. La base de ces piles est un triangle équilatéral. Le nombre des boulets étant égal à n sur chacun des côtés de ce triangle la base renferme

$$n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) \quad \text{boulets.}$$

Par suite le nombre y des boulets coutenus dans la pile est :

$$Y = \frac{1}{2} S_n^2 + \frac{1}{2} S_n^1$$

ou

$$Y = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4}$$

ou, après réduction :

$$Y = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

51. Pile triangulaire tronquée. Si l'on retire de la pile précédente un certain nombre de boulets, par couches horizontales, on obtient une pile triangulaire tronquée. Le nombre de boulets renfermés dans cette pile tronquée est, en désignant par $(p+1)$ le nombre de boulets de l'arête supérieure,

$$(6) \quad Y' = \frac{(n-p)[p^2 + p(n-3) + (n+1)(n+2]}{6}.$$

52. Piles à base rectangulaire. La base est un rectangle. Nous supposons qu'il y a p boulets dans une dimension, $(p+q)$ dans l'autre. Le nombre de boulets de la base est donc $p(p+q) = p^2 + pq$. La couche supérieure renferme $(p-1)$ boulets dans la petite dimension, $p+q-1$ ou $(p-1)+q$, dans l'autre.

Le nombre de boulets de cette couche s'obtient donc en changeant dans $p^2 + pq$, p en $(p-1)$, et ainside suite. Lenombre total de boulets de cette pile est, d'après cette remarque,

$$Z = 1^2 + 2^2 + \ldots + p^2 + q[1 + 2 + 3 + \ldots + p].$$

ou

$$Z = S_p^2 + qS_p^1 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + q\frac{p(p+1)}{2},$$

ou, après réduction,

$$(7) \quad Z = \frac{p(p+1)(3q+2p+1)}{6}.$$

53. Remarque. Ordinairement les nombres proposés sont les nombres n et n' de boulets renfermés dans les arêtes de

la base inférieure. Supposons que n corresponde à la dimension la plus grande ; on aura

$$n = p + q, \quad n' = p.$$

et la formule (7) devient :

$$(8) \quad Z = \frac{n'(n'+1)(3n - n' + 1)}{6}.$$

54. Remarque. Cette formule peut s'écrire :

$$Z = \frac{n'(n'+1)}{2}(n - n') + \frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{6}$$

ou

$$(8) \quad Z = S^1_{n'}(n - n') + S^2_{n'}.$$

On peut donc dire que *la somme des boulets renfermés dans une pile rectangulaire ayant* n′ *boulets sur la petite arête de base et* n *sur la grande arête est égale à la somme des deux nombres que l'on obtient en ajoutant à la somme des carrés des* n′ *premiers nombres,* (n — n′) *fois la somme de ces nombres.*

55. Piles à Obus. L'artillerie moderne emploie principalement des projectiles de forme cylindro-conique qui sont disposés de la manière suivante : La base de la pile est un rectangle renfermant n projectiles dans l'une des dimensions (ordinairement la plus petite) et p dans l'autre. Au-dessus de cette base, et vu la forme de ces projectiles, on peut disposer un rectangle renfermant p projectiles dans l'une des dimensions, $(n - 1)$ dans l'autre ; et ainsi de suite. Le nombre U des obus de la pile est donc :

$$pn + p(n-1) + \ldots + p \cdot 1$$
$$U = p \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

56. Somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique. Le problème qui vient de nous occuper et qui repose, comme on vient de le voir, sur

la formule (A), conduit assez naturellement, si l'on veut généraliser cette formule, à calculer les qnantités S_n^3, S_n^4. . ., et par suite à chercher la somme des puissances k des termes d'une progression arithmétique.

Désignons par $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$, les $(n+1)$ premiers termes d'une progression arithmétique de raison r de telle sorte que:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \\ u_n &= u_{n-1} + r \\ &\ldots\ldots \\ u_2 &= u_1 + r. \end{aligned}$$

La formule du binôme de Newton permet de former le tableau suivant:

$$\begin{aligned} (u_{n+1})^{k+1} &= (u_n + r)^{k+1} = (u_n)^{k+1} + A_1 r\,(u_n)^k + A_2 r^2 (u_n)^{k-1} + \ldots + r^{k+1} \\ (u_n)^{k+1} &= (u_{n-1} + r)^{k+1} = (u_{n-1})^{k+1} + A_1 r (u_{n-1})^k + A_2 r^2 (u_{n-1})^{k-1} + \ldots + r^{k+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (u_2)^{k+1} &= (u_1 + r)^{k+1} = (u_1)^{k+1} + A_1 r\,(u_1)^{k+1} + A_2 r^2 (u_1)^{k-1} + \ldots + r^{k+1}. \end{aligned}$$

Ajoutons ces égalités et convenons de poser:

$$\Sigma_n^i = (u_1)^i + (u_2)^i + \ldots + (u_n)^i.$$

on obtiendra:

$$\text{(B)}\quad (u_{n+1})^{k+1} = (u_1)^{k+1} + A_1 r \Sigma_n^1 + A_2 r^2 \Sigma_n^2 + \ldots + A_i r^i \Sigma_n^i + \ldots + n r^{k+1}.$$

57. En appliquant cette formule il faut bien observer 1° *que le nombre total des termes du second membre est* $(k+2)$; 2° *que* A_i *désigne le nombre de combinaisons de* $(k+1)$ *objets groupés* i *par* i; en d'autres termes $A_i = C_{k+1}^i$.

Si l'on veut avoir S_n^2, on doit faire

$$u_1 = 1, \quad r = 1, \quad u_{n+1} = n+1 \quad \text{et} \quad k = 2.$$

En remarquant que $A_1 = A_2 = 3$, on a

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_n^1 + 3S_n^2 + n.$$

En remplaçant S_n^1 par $\frac{n(n+1)}{2}$ on trouve

$$S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

formule déjà établie.

58. On trouve de même

$$S_n^3 = (S_n^1)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

et

$$S_n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

EXERCICES

1. *Démontrer l'identité*

$$nS_n^1 = S_n^2 + S_{n-1}^1 + S_{n-2}^1 + \ldots + S_1^1;$$

en déduire S_n^2, *connaissant* $S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

Plus généralement établir que,

$$nS_n^{k-1} = S_n^k + S_{n-1}^{k-1} + S_{n-2}^{k-1} + \ldots + S_1^{k-1}$$

2. *Démontrer que* S_n^p *est un polynôme entier de degré* $(p+1)$ *en* n, *mais ne renfermant pas de terme constant.*

Le théorème est vérifié pour S_m^1, S_n^2 ; on le suppose vrai pour l'indice p, et, s'appuyant d'ailleurs sur l'identité (1), on reconnaitra que le théorème subsiste pour la valeur $(p+1)$ de l'indice.

3. *Si l'on pose, conformément au théorème précédent*

$$S_n^p = An^{p+1} + Bn^p + \ldots + Hn.$$

démontrer, 1° *que* $A = \frac{1}{p+1}$, 2° *que* $B = \frac{1}{2}$

Ce théorème est vérifié pour $p = 1$, et on suivra la marche indiquée pour l'exercice précédent.

4. *Démontrer les identités suivantes,*

1° $$1^2 + 3^2 + \ldots + (2p - 1)^2 = \frac{p(2p+1)(2p-1)}{3}$$

2° $$1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2p-1)(2p+1) = \frac{p(4p^2+6p-3)}{3}$$

3° $$X = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

On remarque que

$$n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n,$$

par suite on a

$$X = S_n^3 + 3S_n^2 + 2S_n^1.$$

Cette remarque s'applique à un grand nombre de questions de ce genre. Si l'on suppose $X = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ et si U_n peut se mettre sous la forme d'une fonction entière de n, de degré K, les formules qui font connaître S_n^1, $S_n^2, \ldots S_n^k$ permettent alors de calculer X.

5. *Démontrer la formule :*

$$1.2.3\ldots p + 2.3\ldots(p+1) + \ldots + n(n+1)\ldots(n+p-1) = \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)(n+p)}{p+1}.$$

On remarque que les termes de cette somme sont les nombres figurés de l'ordre p multipliés par $1, 2, 3, \ldots p$.

CINQUIÈME LEÇON

RACINE CARRÉE. — RACINE $M^{ième}$.

En poursuivant l'étude des opérations algébriques élémentaires, on est conduit à l'extraction des racines, opération que nous allons définir et qui peut être considérée comme l'opération inverse de celle que nous avons précédemment traitée quand nous avons étudié l'élévation des polynômes à une puissance entière et positive. Nous examinerons d'abord le cas le plus simple; celui de la racine carrée.

59. Définition de la racine carrée exacte. *Étant donné un polynôme* P, *qu'on sait avoir été obtenu en multipliant un polynôme inconnu* R *par lui-même; on propose de trouver celui-ci.*

60. Théorème. *Le problème que nous venons de poser ne comporte que deux solutions: Ces solutions sont formées par deux polynômes dont les termes sont deux à deux égaux et de signes contraires.*

On a, par définition, l'identité

$$P = R^2;$$

Soit R′ une seconde solution. On a encore

$$P = R'^2;$$

par suite,

$$R^2 = R'^2,$$

ou

$$(R - R')(R + R') = 0.$$

Pour qu'un produit soit identiquement nul, il est nécessaire et suffisant que l'un des facteurs soit identiquemeut nul. On a donc

$$R = R'$$

ou

$$R = -R'$$

Il est d'ailleurs évident, *à priori,* que si R est une solution, (— R) est aussi une solution : On peut donc dire : 1° *qu'il n'y a, au problème proposé, que deux solutions, au plus ;* 2° *que s'il en existe une il y en a une autre, identique à la première, quand on change les signes des termes de celle-ci.*

61 Solution du problème. *Recherche du premier terme de la racine.* Soit

$$P = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots A_m$$

le polynôme proposé, et

$$R = B_0x^p + B_1x^{p-1} + \ldots + B_p$$

la racine cherchée.

Les inconnues du problème sont p, B_0, $B_1 \ldots B_p$. On a, pour les déterminer, l'identité

$$\text{(A)}\ A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m = (B_0x^p + B_1x^{p-1} + \ldots + B_p)^2$$

Le second membre peut être considéré comme un produit de deux facteurs égaux. Le terme $B_0^2x^{2p}$ est le seul de son espèce ; c'est le terme de degré le plus élevé. On a donc

$$A_0x^m = B_0^2x^{2p}.$$

Par conséquent $m = 2p$, et $A_0 = B_0^2$.

Cette dernière égalité exige que l'on ait $A_0 > o$. Nous supposons cette condition remplie ; s'il en était autrement le problème serait impossible et le polynôme P n'aurait pas été obtenu, comme le veut l'hypothèse que nous avons faite. On voit aussi que m est nécessairement un nombre pair. Nous arrivons donc à cette conclusion : 1° *que le degré de la racine est*

la moitié de celui du polynôme donné, lequel est nécessairement du degré pair ; 2° *que le premier coefficient de la racine, celui du terme du degré le plus élevé, est égal en valeur absolue à la racine carrée du premier coefficient du polynôme donné, coefficient qui est d'ailleurs nécessairement positif.*

Recherche du second coefficient. Les inconnues p et B_0 étant déterminées, on peut écrire l'identité (A) sous la forme

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m \equiv B_0^2x^{2p} + 2B_0x^p(B_1x^{p-1} + \ldots + B_p) + (B_1x^{p-1} + \ldots B_p)^2.$$

On remarque que les termes $A_0x^m, B_0^2x^{2p}$ disparaissent ; et, en posant

$$R_1 \equiv A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m,$$

il vient

$$R_1 \equiv 2B_0x^p(B_1x^{p-1} + \ldots + B^p) + (B_1x^{p-1} + \ldots + B_p)^2.$$

Dans le second membre il y a un terme qui ne se réduit avec aucun autre, c'est le terme :

$$2B_0B_1x^{2p-1}, \quad \text{ou} \quad 2B_0B_1x^{m-1}.$$

On a donc

$$(1) \quad A_1 = 2B_0B_1$$

Si l'on suppose $A_1 = 0$, on a donc $B_1 = 0$: si l'on a $A_1 \neq 0$, on tire de l'égalité (1) $B_1 = \frac{A_1}{2B_0}$; mais dans l'un, comme dans l'autre cas, on peut dire que *le second terme de la racine s'obtient en divisant le terme du degré* (m — 1) *du premier reste par le double du premier coefficient de la racine.*

Recherche du troisième coefficient et des coefficients successifs. L'identité (A) peut maintenant s'écrire, B_0 et B_1 étant connus, sous la forme

$$P - (B_0x^p + B_1x^{p-1})^2 \equiv 2(B_0x^p + B_1x^{p-1})(B_2x^{p-2} + \ldots + B_p)^2 + (B_2x^{p-2} + \ldots + B_p)^2.$$

Posons

$$R_2 = P - (B_0x^p + B_1x^{p-1})^2,$$

on a

$$R_2 = 2(B_0x^p + B_1x^{p-1})(B_2x^{p-2} \ldots + B_p) + (B_2x^{p-2} + \ldots + B_p)^2.$$

Il y a dans le second membre un terme qui n'est réductible avec aucun autre, c'est le terme $2B_0B_2x^{2p-2}$, ou $2B_0B_2x^{m-2}$. Identifions-le avec le terme en x^{m-2} dans R_2 : on voit alors que B_2 s'obtient en divisant le coefficient du terme de degré $(m-2)$ de R_2, par le double du premier coefficient de la racine.

Cette règle se généralise facilement. On prouve ainsi que *si l'on considère le reste* R_k

$$\text{(B)} \qquad R_k = P - (B_0x^p + B_1x^{p-1} + \ldots + B_{k-1}x^{p-k+1})^2$$

le terme B_kx^{p-k} *de la racine s'obtient en divisant le terme du degré* $(m-k)$ *de* R_k, *par* $2B_0$.

Loi de succession des restes. Les restes successifs R_1, $R_2, \ldots R_k$, dont il est question dans la théorie précédente, peuvent se calculer par la formule (B); mais il est plus simple de les déduire les uns des autres, par une sorte de calcul récurrent qui permet de déduire R_k de R_{k-1}. On se fonde sur la remarque suivante. On a

$$R_{k-1} = P - (B_0x^p + B_1x^{p-1} + \ldots + B_{k-2}x^{p-k+2})^2.$$

On peut donc écrire R_k sous la forme

$$R_k = \left.\begin{array}{l} P - (B_0x^p + B_1x^{p-1} + \ldots + B_{k-2}x^{p-k+2})^2 \\ - B_{k-1}x^{p-k+1}(2B_0x^p + B_1x^{p-1} + \ldots + B_{k-2}x^{p-k+2}) \\ - (B_{k-1}x^{p-k+1})^2. \end{array}\right\}$$

On a donc

$$\text{(C)} \quad R_k = R_{k-1} - B_{k-1}x^{p-k+1}[2B_0x^p + 2B_1x^{p-1} + \ldots + 2B_{k-2}x^{p-k+2} + B_{k-1}x^{p-k+1}].$$

Ce qui conduit à la règle suivante : *Pour trouver le reste* R_k, *qui correspond au dernier terme trouvé à la racine, on ajoute*

à celui-ci le double de la partie antérieurement déterminée ; on multiplie cette somme par le dernier terme et on retranche ce produit du reste précédent.

62. Remarque. *Si* P *est un polynôme de degré* m, *le reste* R_k *est d'un degré égal à* (m – k) *ou d'un degré inférieur.*

Cette loi se vérifie pour R_1 : supposons la vraie pour R_{k-1} et montrons qu'elle subsiste pour R_k. Dans la formule (C), le coefficient B_{k-1} a été obtenu en identifiant le premier terme de R_{k-1}, avec $2B_0B_{k-1}x^{2p-k+1}$. Ces termes disparaissent donc et il ne reste plus que des termes en x^{2p-k}, ou en x^{m-k} puisque l'on a $2p = m$; en général R_k est donc de degré $(m - k)$. Mais il peut arriver, dans des cas particuliers, que les termes en $(m-k)$, dans (C), disparaissent aussi. Dans ce cas les degrés de deux restes consécutifs R_{k-1} et R_k, diffèrent de plus d'une unité.

63. Règle pour l'extraction de la racine carrée d'un polynôme entier. On conclut de ce qui précède la règle suivante : Soit un polynôme entier P, ordonné suivant les puissances décroissantes de x ; on suppose que P est le carré parfait d'un polynôme inconnu Q : pour trouver celui-ci, on peut opérer de la manière suivante :

1° *Ayant constaté* (sinon le problème est impossible) *que le degré* m *de* P, *est pair et que le premier coefficient* A_0 *est positif,* 1° *le degré de la racine est* $\frac{m}{2}$, 2° *le premier coefficient est égal à* $(\pm\sqrt{A_0})$; *soit* B_0 *ce coefficient.*

2° *Ayant retranché de* P *le carré du premier terme, on obtient un reste* R_1. *Si l'on divise le terme de degré* (m—1), *de ce polynôme par le double du premier terme trouvé, on a le second terme de* Q.

3° *Ayant déduit* R_2 *de* R_1, *et, plus généralement,* R_k *de* R_{k-1}, *comme il a été expliqué, on obtiendra le terme correspondant de la racine en divisant le terme de degré* (m — k) *de* R_k *par le double du premier terme de la racine.*

Lorsque le problème est possible, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, les termes de la racine se déterminent ainsi suc-

cessivement. Il admet d'ailleurs deux solutions, car l'on peut prendre, au début, pour B_0 la valeur $+\sqrt{A_0}$ ou la valeur $-\sqrt{A_0}$. La règle même que nous venons de donner prouve que les deux résultats, qui correspondent à ce double choix, sont identiques, au signe près.

64. Extraction de la racine carrée d'un polynôme ordonné par rapport aux puissances croissantes de x. On peut observer que la théorie précédente s'applique à des polynômes ordonnés par rapport aux puissances croissantes de la lettre x. L'énoncé de la règle donnée se modifie facilement dans cette hypothèse et il est inutile d'insister sur cette modification. Nous ne touchons à ce point que pour faire remarquer que si un polynôme donné P est, par hypothèse, le carré d'un polynôme entier Q; on peut, indifféremment, pour trouver Q, ordonner P par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes de x. Les deux voies conduisent au résultat cherché sans qu'il y ait, en général, de raison appréciable pour préférer l'une à l'autre.

65. Forme homogène d'un polynôme entier. Pour bien marquer la raison de l'indifférence qui préside au choix des deux manières que nous venons de noter pour l'extraction de la racine carrée, il est utile de remarquer qu'une fonction entière de x peut toujours être considérée comme identique à une fonction homogène des lettres x et y, mais avec cette réserve *que* y *est supposé égal à* 1. En effet l'identité que l'on veut résoudre,

$$\text{(A)} \qquad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m \equiv (B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots + B_p)^2$$

peut s'écrire, si l'on suppose $y = 1$,

$$\text{(A')} \quad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + \ldots + A_m y^m \equiv (B_0 x^p + B_1 x^{p-1} y + \ldots + B_p y^p)^2.$$

On peut dire d'ailleurs que l'identité précédente a lieu,

quel que soit y, *et quel que soit* x; *et non pas seulement pour* y = 1, *quel que soit* x. Imaginons en effet une identité,

$$\varphi(x) = \psi(x)$$

identité qui est vérifiée quelque soit x. Posons $x = \frac{X}{Y}$; on a

$$\varphi\left(\frac{X}{Y}\right) = \psi\left(\frac{X}{Y}\right).$$

Cette identité est vérifiée *quel que soit* X *et quel que soit* Y, car x pouvant prendre toutes les valeurs possibles, on peut donner à Y et à X toutes les valeurs que l'on peut imaginer. Ainsi X et Y sont *des variables arbitraires*. Toutes les valeurs d'X et d'Y satisfont à cette égalité et aussi, évidemment, à celle-ci

$$Y^k \varphi\left(\frac{X}{Y}\right) = Y^k \psi\left(\frac{X}{Y}\right),$$

k étant le degré commun des polynômes φ et ψ. On peut donc formuler la remarque suivante : *Une identité dans laquelle n'entrent que des fonctions entières de* x *étant établie, si on la transforme en remplaçant* x *par* $\frac{X}{Y}$, *après avoir chassé les dénominateurs, on obtient une identité qui a lieu* QUEL QUE SOIT X ET QUEL QUE SOIT Y.

D'après cette observation, si l'on veut établir l'identité (A), on pourra, si on le préfère, établir l'identité (A′), puis supposer $y = 1$. Or on peut ordonner indifféremment (A′), par rapport aux puissances décroissantes de x ou par rapport aux puissances décroissantes de y. L'extraction d'une racine carrée exacte peut donc, pour ce motif, se faire également bien, et *indifféremment*, en opérant sur le polynôme proposé écrit dans la première ou dans la deuxième forme.

66. Racine carrée des polynômes qui ne sont pas des carrés parfaits. Définition. *Étant donné un polynôme* P *supposé quelconque,* m *étant son degré ; si* m *est pair il existe toujours, nous allons le démontrer, un polynôme* Q *de degré*

$\frac{m}{2}$ *et un polynôme* R *de degré moindre que* $\frac{m}{2}$, *tels que l'on ait*

$$(1) \qquad P = Q^2 + R :$$

Q *est la racine carrée de* P ; R *est le reste de l'opération.*

67. Théorème. *Le problème que nous venons de définir ne peut comporter, pour la racine, que deux valeurs identiques et de signes contraires ; et, pour le reste, qu'une seule valeur.*

En effet, soit Q′ et R′ une seconde solution ; on aurait donc

$$(2) \qquad P = Q'^2 + R'.$$

Par suite, en comparant (1) et (2),

$$Q^2 + R = Q'^2 + R'.$$

ou

$$(3) \qquad (Q - Q')(Q + Q') = (R' - R).$$

Or, Q et Q′ sont, par hypothèse, des polynômes de degré $\frac{m}{2}$;

R et R′ des polynômes de degré moindre que $\frac{m}{2}$. Si le produit

$(Q - Q')(Q + Q')$ n'est pas identiquement nul, l'identité (3) est donc impossible, le premier membre étant de degré supérieur à l'autre. On a donc nécessairement

$$(Q - Q')(Q + Q') = 0$$

par suite

$$Q = Q'$$

ou

$$Q = -Q'.$$

La racine carrée peut donc avoir seulement deux solutions représentées par des polynômes identiques, mais de signes contraires. On voit aussi, que l'identité (3), dont le premier membre est identiquement nul, donne

$$R' - R = 0$$

68. Solution du problème. — Détermination des inconnues Q et R. Nous supposons que P est un polynôme de degré pair et que son premier terme, celui de degré le plus élevé, est positif. On doit, en effet, remarquer que l'identité (1) n'est réalisable que si ces deux conditions sont remplies.

Appliquons au polynôme P, la règle pratique donnée plus haut pour extraire sa racine carrée, en supposant, pour un instant, que ce polynôme soit un carré parfait.

Désignons par Q l'ensemble des termes obtenus à un certain moment, dans cette opération qui peut être poursuivie jusqu'à ce qu'elle devienne impossible ; le reste obtenu est identiquement égal à $P - q^2$ et l'on peut écrire, en désignant ce reste par r

$$P - q^2 \equiv r,$$

ou

$$P \equiv q^2 + r. \quad (4)$$

Cette identité peut se vérifier pendant tout le courant du calcul ; mais l'opération, si P n'est pas un carré parfait, cessera d'être possible quand on ne pourra plus diviser le premier terme du reste par le double du premier terme trouvé à la racine ; c'est-à-dire quand le reste sera d'un degré plus faible que celui de la racine. Si, à cet instant, on appelle Q la valeur de q et R la valeur de r, l'identité (4), devient :

$$P \equiv Q^2 + R.$$

Les polynômes Q et R, ainsi déterminés, remplissent les conditions exigées par la définition que nous avons donnée tout à l'heure. On peut donc conclure 1° que la racine carrée de P est $\pm Q$; 2° que le reste est égal à R.

Racine $m^{ième}$.

69. Définition. Si un polynôme donné P, a été obtenu en élevant un polynôme inconnu Q, à une puissance m, on dit que P est une puissance m^{me} exacte : Réciproquement, Q est la racine m^{me} de P.

Si, ce qui est le cas général, P n'est pas une puissance m^{me} exacte; extraire sa racine m^{me} c'est trouver deux polynômes Q et R tels que l'on ait

$$P = Q^m + R;$$

R étant de degré moindre que Q : Q est la racine; R est le reste de cette opération.

La théorie de la racine m^{me} est très semblable à celle que nous venons d'exposer pour la racine carrée. Nous allons l'exposer ici, mais rapidement, pour éviter des répétitions inutiles.

70. Racine m^{me} exacte. Posons

$$ax^p + bx^{p-1} + cx^{p-2} + \ldots + l = (\alpha x^q + \beta x^{q-1} + \ldots + \lambda)^m.$$

et développons le second membre par la règle de la multiplication des polynômes. On a

$$ax^p = \alpha^m x^{mq},$$

et, par suite

$$a = \alpha^m$$
$$p = mq.$$

Les nombres p et q sont entiers; pour que le problème soit possible, il est donc nécessaire que *l'exposant* p, *soit un multiple de l'indice* m *de la racine.* Si cette condition est remplie, q est donné par la formule,

$$q = \frac{p}{m}.$$

D'autre part on a, pour déterminer α, l'égalité;

$$\alpha = \sqrt[m]{a}.$$

Si m est impair, on sait que $\sqrt[m]{a}$ n'a qu'une valeur réelle; si au contraire m est pair il y a zéro, ou deux valeurs, suivant que l'on suppose $a < o$, ou $a > o$. Ainsi, si m est impair, il y a toujours une solution pour le premier coefficient α et il n'y en a qu'une seule; si m est pair il faut, pour que le problème soit

possible, que le premier coefficient a, du polynôme donné soit positif. Si cette condition est remplie, α a deux valeurs égales et de signes contraires; dans le cas contraire, le problème est impossible.

Pour déterminer le second coefficient β, on remarque que si l'on pose,

$$R_1 = P - \alpha^m x^{mq}$$

c'est-à-dire

$$R_1 = bx^{p-1} + cx^{p-2} + \ldots + l,$$

on aura

$$bx^{p-1} + cx^{p-2} + \ldots + l = m\alpha^{m-1}x^{(m-1)q}(\beta x^{q-1} + \ldots + \lambda) + \theta_1.$$

Le polynôme θ_1 désigne ici l'ensemble des autres termes en x qui proviennent du développement de Q^m, ces termes sont d'ailleurs d'un degré inférieur à $(mq - 1)$. On conclut de là que le terme

$$m\alpha^{m-1}\beta x^{mq-1} \quad \text{ou} \quad m\alpha^{m-1}\beta x^{p-1}$$

est irréductible: le coefficient du premier terme de R_1 est donc égal à $m\alpha^{m-1}\beta$. Ainsi le second coefficient β s'obtient en divisant le premier coefficient du premier reste par m fois la puissance $(m-1)^{me}$ du premier coefficient trouvé.

Cette loi se généralise sans difficulté. Dans cette théorie qui offre, avec celle que nous avons exposée tout à l'heure pour la racine carrée, des analogies trop marquées pour qu'il soit utile de la présenter avec les mêmes développements; la différence la plus essentielle porte sur le calcul des restes successifs. Nous avons donné plus haut une loi de formation, par voie de récurrence, des restes de la racine carrée. Cette loi ne s'applique pas à la racine m^{me}; *les restes successifs doivent se calculer en retranchant du polynome proposé la puissance m^{me} de la partie trouvée à la racine.*

1. Pour expliquer ce point, dans tous ses détails, on peut se servir du développement de la puissance m^{me} d'un polynôme, développement donné précédemment. Mais on peut aussi observer que les seuls principes de la multiplication algébrique suffisent à établir les raisonnements que nous donnons ici.

71. Racine m^{me} inexacte. Supposons que P soit un polynôme quelconque mais remplissant les conditions suivantes: 1° son degré est un multiple de m, 2° son premier coefficient est positif, dans le cas où m est pair : en appliquant à ce polynôme la règle d'extraction de la racine m^{me} on a, à chaque instant, l'identité

$$P = q^m + r$$

q étant la partie trouvée à la racine, r le reste correspondant. On ne peut être arrêté dans ce calcul que si le reste obtenu est de degré inférieur à celui de q; et si l'on appelle Q la valeur de q, à cet instant, R le reste correspondant, on a :

$$P = Q^m + R.$$

Les polynômes Q et R ainsi déterminés résolvent le problème proposé, puisque R est d'un degré inférieur à celui de Q.

Applications.

72. *Démontrer que le produit de quatre nombres consécutifs augmenté de 1 est toujours un carré parfait.*

Soit $\frac{x}{y}$ le premier nombre ; il faut établir que le nombre U

$$U = \frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{x}{y}+2\right)\left(\frac{x}{y}+3\right)+1,$$

est un carré parfait. On a, en développant le calcul indiqué,

$$U = \frac{x^4 + 6x^3y + 11x^2y^2 + 6x^2y + y^4}{y^4}.$$

Appliquons au numérateur la règle d'extraction de la racine carrée, on est conduit au calcul suivant :

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{x^4+6x^3y+11x^2y^2+6xy^3+y^4} & x^2+3xy+y^2 \\
R_1 = 6x^3y+11x^2y^2+6xy^3+y^4 & (2x^2+3xy)3xy = 6x^3y+9x^2y^2 \\
R_2 = 2x^2y^2+6xy^3+y^4 & (2x^2+6xy+y^2)y^2 = 2x^2y^2+6xy^3+y^4 \\
R_3 = 0 &
\end{array}$$

Ce calcul prouve que l'on a

$$U = \left(\frac{x^2 + 3xy + y^2}{y^2}\right)^2;$$

le théorème est donc démontré.

73. *Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme U,*

$$U = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

soit un carré parfait :

On doit distinguer deux cas dans cette question, suivant que l'on suppose $A = 0$, ou $A \gtrless 0$. Si $A = 0$, U ne pouvant pas renfermer x au premier degré, il faut supposer $B = 0$. Cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante; car si elle est remplie, on a $U = Cy^2$; U est bien un carré parfait.

Prenons maintenant le cas général, celui où A n'est pas nul. Supposons $A > 0$, autrement le problème proposé serait impossible, comme nous l'avons reconnu plus haut.
On a :

$$AU = A^2x^2 + 2ABxy + ACy^2.$$

Le calcul suivant :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{A^2x^2 + 2ABxy + ACy^2} & Ax + By \\ \hline R_1 = 2ABxy + ACy^2 & (2Ax + By)\,By = 2ABxy + B^2y^2, \\ \hline R_2 = y^2(AC - B^2) & \end{array}$$

prouve que si l'on a $AC - B^2 \gtrless 0$, AU, et par conséquent U n'est pas un carré parfait. Il est donc *nécessaire* que l'on ait $AC - B^2 = 0$. Je dis que cette condition est *suffisante*. L'identité qui a été établie par le calcul précédent

$$AU = (Ax + By)^2 + y^2(AC - B^2)$$

prouve, en effet, que si l'on a $AC = B^2$, AU est un carré parfait. Le polynôme U est donc aussi un carré parfait, savoir celui de $\frac{Ax + By}{\sqrt{A}}$, quantité réelle dans l'hypothèse $A > 0$, que nous avons adoptée.

Remarque. Si $A = 0$, la condition $AC - B^2 = 0$ se réduit à $B^2 = 0$. On peut donc dire que, *quel que soit* A, la condition cherchée est $AC - B^2 = 0$.

74. *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que* U

$$U = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

soit un carré parfait.

On peut appliquer à cet exemple la méthode générale, que nous avons employée dans les deux questions précédentes. On peut aussi déduire les conditions cherchées, de celles que nous avons trouvées dans l'exercice que nous venons de traiter. Nous adopterons cette dernière méthode.

Comme tout à l'heure nous distinguerons deux cas : 1° $A = 0$, 2° $A \neq 0$.

1er *Cas.* Soit $A = 0$. U ne devant pas renfermer de termes du premier degré en x on doit avoir, quelque soit y et z,

$$B'z + B''y = 0\,;$$

par suite

$$B' = 0, \quad B'' = 0.$$

On a donc

$$U = A'y^2 + 2Byz + A''z^2.$$

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que U soit carré parfait est

$$A'A'' - B^2 = 0.$$

Les trois conditions sont donc

$$B' = 0, \quad B'' = 0, \quad A'A'' - B^2 = 0.$$

2me *Cas.* Soit $A \neq 0$. Ecrivons U de la manière suivante :

$$U = Ax^2 + 2x(B''y + B'z) + A'y^2 + 2Byz + A'z^2.$$

On peut considérer U comme un trinôme du second degré en x, dont le premier coefficient A est différent de zéro.

Appliquons à ce trinôme le caractère démontré au paragraphe précédent, on a

$$(B''y + B'z)^2 = A(A'y^2 + 2Byz + A''z^2).$$

Mais cette égalité est une relation *d'identité*, elle doit avoir lieu *quel que soit* y, *et quel que soit* z; on a donc les conditions:

$$(1) \quad \begin{cases} B''^2 = AA' \\ B'B'' = AB \\ B'^2 = AA'' \end{cases}$$

Ces conditions sont d'ailleurs *suffisantes*, en supposant toutefois $A > 0$. On a, en effet, A n'étant pas nul

$$AU = A^2x^2 + AA'y^2 + AA''z^2 + 2ABYz + 2AB'zx + 2AB''xy$$

ou, en tenant compte des relations (1),

$$AU = A^2x^2 + B''^2y^2 + B'^2z^2 + 2B'B''yz + 2AA'zx + 2AA''xy$$

ou enfin,

$$AU = (Ax + B''y + B'z)^2$$

Cette identité démontre bien que AU, et, par conséquent, U est un carré parfait; savoir, le carré de

$$\frac{Ax + B''y + B'z}{\sqrt{A}}.$$

EXERCICES

1. *Trouver quelle condition doivent remplir les coefficients* α β γ, *pour que le polynôme* U,

$$U = \alpha^2x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \gamma^2$$

soit un carré parfait.

On trouve

$$\beta - 2\alpha\gamma = \frac{1}{4}.$$

2. *Reconnaître que les polynômes* U, V;

$$U = 24(24x - 1)(12x - 1)(8x - 1)(6x - 1) + 1$$
$$U = 36x(6x + 1)(3x + 1)(2x + 1) + 1$$

sont des carrés parfaits.

On trouve, en appliquant la règle pour l'extraction de la racine carrée

$$U = (576x^2 - 120x + 5)^2$$
$$V = (36x^2 + 18x + 1)^2$$

3. *Démontrer que* U,

$$U = x(x + \alpha)(x + \beta)(x + \alpha + \beta) + \frac{\alpha^2\beta^2}{4}$$

est un carré parfait.

On trouve

$$U = \left[x^2 + (\alpha + \beta)x + \frac{\alpha\beta}{2}\right]$$

SIXIÈME ET SEPTIÈME LEÇONS

LES DÉTERMINANTS.

75. Définitions. Imaginons, sur une première ligne, n nombres que nous désignerons par

$$a_1^1\, a_1^2 \dots a_1^n.$$

Imaginons de même $(n-1)$ autres lignes analogues, l'ensemble de ces nombres donne le tableau suivant

$$(\text{A}) \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \dots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \dots a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 \dots a_3^n \\ \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 \dots a_n^n \end{vmatrix}$$

Ce tableau constitue un *déterminant*. Il faut bien remarquer que a_β^α est *une écriture symbolique*. La lettre *a ne désigne pas une valeur numérique,* comme dans la notation algébrique ordinaire; par a_β^α nous voulons seulement désigner *le nombre ou élément du déterminant qui est écrit dans la ligne* β *et dans la colonne* α.

On appelle *terme d'un déterminant* le produit obtenu en multipliant n éléments de ce déterminant : ces éléments étant choisis de telle façon que, parmi eux, deux quelconques ne soient pas situés dans la même rangée. Ce produit doit être affecté du signe + ou du signe —, suivant les cas, et conformément à une règle que nous ferons connaître tout à l'heure.

76. Permutations, Inversions. Soient 1, 2, ... n, les n premiers nombres naturels.

Supposons qu'ils soient écrits sur une même ligne, dans un ordre quelconque, et soient α et β, deux des nombres de cette suite, α étant placé à la gauche de β. On dit que α et β présentent une inversion quand on a $\alpha > \beta$. L'ensemble des n premiers nombres naturels écrits les uns à la suite des autres dans un ordre quelconque constitue une *permutation. La permutation est paire* lorsque le nombre total des inversions est pair; on dit aussi qu'elle est de *première classe:* elle est *impaire* ou de *seconde classe* dans le cas contraire.

Parmi les permutations on distingue la suivante 1, 2, ... n; elle ne présente aucune inversion. Nous la nommerons *permutation principale*.

77. Remarque I. *Une permutation change de classe quand on fait l'échange de deux nombres consécutifs.*

Soient p et q deux nombres consécutifs d'une permutation P; désignons par A l'ensemble des nombres qui sont écrits avant p et par B l'ensemble de ceux qui suivent q, de telle sorte que l'on ait

$$P_1 = A \,.\, p \,.\, q \,.\, B$$

Permutons les nombres p et q et considérons la nouvelle permutation

$$P_2 = A \,.\, q \,.\, p \,.\, B.$$

Les inversions des nombres qui sont écrits dans A, sont restées les mêmes; il en est de même des inversions de p sur les nombres de B, et de q sur ces mêmes nombres. Enfin les inversions des nombres écrits dans B sont aussi les mêmes. Mais si $p \,.\, q$ présentaient une inversion dans P_1, cette inversion a disparu dans P_2, ou inversement. Dans tous les cas la classe a changé.

78. Remarque II. *Une permutation change de classe quand on permute deux nombres quelconques.*

Soient les deux permutations

$$P_1 = A . p . B . q . C$$
$$P_2 = A . q . B . p . C;$$

A désigne tous les nombres qui précèdent p, B tous ceux qui sont placés entre p et q, enfin C les nombres qui suivent q. Considérons la permutation

$$P_3 = A . B . p . q . C.$$

Si z désigne le nombre des éléments de B, on a dû faire z permutations d'éléments consécutifs pour passer de P_1 à P_3. De même si l'on forme avec P_3 la permutation

$$P_2' = A . q . B . p . C,$$

on voit qu'il a fallu faire $(z+1)$ échanges d'éléments ou facteurs consécutifs. Concluons donc que pour passer de P_1 à P_2 on a fait $(2z+1)$ permutations d'éléments consécutifs. Or, pour chacune de celles-ci, il y a changement de classe : la permutation considérée passe de la première classe à la seconde ; de celle-ci, à la première ; et ainsi de suite. Si le nombre des échanges entre deux éléments consécutifs est pair, la classe reste la même ; si au contraire, comme dans le cas qui nous occupe, ce nombre est impair, on peut affirmer qu'il y a eu changement de classe.

79. Définition du signe d'un terme d'un déterminant. Nous pouvons maintenant définir nettement le signe d'un terme d'un déterminant. Soit

$$U = a_{\beta_1}^{\alpha_1} . a_{\beta_2}^{\alpha_2} . a_{\beta_3}^{\alpha_3} \dots a_{\beta_n}^{\alpha_n}$$

un terme formé par le produit de n nombres différents de zéro, nombres pris dans le tableau (A), et de telle façon que toutes les colonnes et toutes les lignes y soient représentées. Alors

$$\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \dots \alpha_n$$
$$\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \dots \beta_n$$

représentent deux lignes identiques à

$$1, \quad 2, \quad 3 \ldots n;$$

abstraction faite de l'ordre des nombres. Comptons les inversions de ces deux lignes : si la somme totale de ces inversions est un nombre pair nous donnerons à U le signe $+$; nous lui donnerons, au contraire, le signe $-$, lorsque les inversions comptées sur les indices supérieurs et inférieurs formeront, ajoutées les unes aux autres, un nombre impair.

Mais cette définition ne peut être acceptée qu'après avoir établi le principe suivant.

80. Principe. *Le signe d'un terme ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs qui le composent.*

Posons

$$U = Aa_\beta^\alpha Ba_{\beta'}^{\alpha'} C$$

et

$$V = Aa_{\beta'}^{\alpha'} Ba_\beta^\alpha C$$

U et V ont la même valeur, mais il faut montrer qu'ils ont aussi le même signe. Dans la notation du terme U, A désigne le produit des éléments qui peuvent précéder a_β^α; B le produit de ceux qui peuvent être compris entre a_β^α et $a_{\beta'}^{\alpha'}$; enfin C le produit des éléments qui peuvent suivre $a_{\beta'}^{\alpha'}$. S'il n'y a pas d'éléments avant a_β^α, on supposera $A = 1$; cette observation s'applique à B et à C. Si l'on compare dans U et dans V les inversions des indices supérieurs, on voit que deux nombres ont été échangés et que, par suite, la permutation a changé de classe. Cette remarque s'applique aux indices inférieurs. Mais alors la somme totale des inversions pour les indices inférieurs et supérieurs n'a pas changé de parité, donc U et V sont deux nombres égaux et de même signe.

Exemple. Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

les éléments 1, 6, 8 forment un terme dont la valeur absolue est $U = 1.6.8 = 48$. Pour déterminer le signe de U il faut écrire

$$U = (1)_1^1 (6)_2^3 (8)_3^2$$

et compter les inversions des indices supérieurs et inférieurs. On trouve ainsi *une* inversion pour les premiers, *zéro* pour les autres, donc U doit être pris avec le signe —.

Principes élémentaires pour le calcul des déterminants.

81. Théorème I. *Si l'on échange dans un déterminant Δ les lignes et les colonnes, le déterminant Δ', ainsi obtenu, est identique à Δ.*

En effet soit

$$U = a_1^{\alpha_1} a_{6_2}^{\alpha_2} \ldots a_{6_n}^{\alpha_n}.$$

un terme quelconque de Δ. L'élément $a_{6_p}^{\alpha_p}$ qui dans Δ désigne le nombre qui est écrit dans la colonne de rang α_p et dans la ligne de rang 6_p, est placé dans Δ' dans la ligne de rang α_p et dans la colonne de rang 6_p. Les éléments de U sont donc, d'après cela, écrits dans Δ' dans des lignes et dans des colonnes toutes différentes. Ainsi U est un terme de Δ'. Je dis qu'il a dans Δ' le même signe que dans Δ.

En effet le nombre $a_{6_p}^{\alpha_p}$, étant écrit dans Δ' dans la colonne 6_p et dans la ligne α_p, doit, conformément à la convention faite, être représenté par $a_{\alpha_p}^{6_p}$. Cette remarque s'applique à tous les

facteurs de U et l'on voit ainsi que ce terme U se trouve dans le déterminant Δ', mais avec cette particularité qu'il a fallu échanger les indices supérieurs et inférieurs ; ceci n'altère pas la somme des inversions et le signe de U dans Δ' sera donc le même que dans Δ. La réciproque est vraie : Les deux déterminants Δ, Δ' sont donc composés des mêmes termes, affectés des mêmes signes ; ils sont, par suite, identiques.

82. Théorème II. *Si l'on permute deux lignes ou deux colonnes d'un déterminant Δ, on obtient un déterminant Δ' qui est identique à Δ, mais de signe contraire.*

Permutons par exemple les colonnes p et q. Soit U un terme de Δ ; toutes les colonnes devant être représentées dans U il y a, parmi les facteurs de U un nombre A qui est écrit dans la colonne p et un nombre B qui appartient à la colonne q. Désignons par R le produit de tous les autres facteurs, facteurs que nous pouvons supposer écrits dans U, avant les éléments A et B. On aura

$$U = R\,(A)^p_\alpha\,(B)^q_\beta\,;$$

α et β désignant les lignes auxquelles appartiennent les nombres A et B.

Tous les facteurs de U appartiennent à Δ' et sont écrits dans des lignes et des colonnes différentes de ce déterminant Δ'. La seule différence consiste dans ce fait que A est écrit dans la colonne q et la ligne α ; B dans la colonne p et dans la ligne β. Pour calculer le signe de U dans Δ' on doit affecter A de l'indice supérieur q et de l'indice inférieur α ; pour la même raison l'indice supérieur de B sera q et son indice inférieur β. Le produit

$$R\,(A)^q_\alpha\,(B)^p_\beta$$

sera égal et de signe contraire à U. En effet il y a aux indices supérieurs un seul échange de deux nombres et il n'y en a aucun aux indices inférieurs. En résumé les termes de Δ sont deux à deux égaux et de signes contraires à ceux de Δ'. La

réciproque est vraie et résulte du raisonnement même que nous venons de faire. On a donc

$$\Delta = -\Delta'.$$

83. Corollaire. *Un déterminant qui a deux lignes ou deux colonnes identiques est identique à zéro.*

Soient p et q les deux colonnes identiques de Δ; permutons-les, et soit Δ' le nouveau déterminant. Le théorème précédent donne

$$(1) \quad \Delta = -\Delta'.$$

D'autre part les deux colonnes p et q étant identiques, la permutation précédente laisse le déterminant identique à lui-même : on a donc

$$(2) \quad \Delta = \Delta'.$$

Ajoutons (1) et (2) on a,

$$2\Delta = 0, \quad \text{ou} \quad \Delta = 0.$$

Déterminants mineurs.

84. Définitions. Lorsqu'un déterminant Δ renferme n lignes et par conséquent n colonnes, nous dirons qu'il est *d'ordre n*. Si l'on supprime une ligne β et une colonne α, il reste un déterminant d'ordre $(n-1)$, que nous désignerons par Δ_β^α. Pour distinguer ces mineurs de ceux que nous allons définir et pour éviter toute confusion de langage nous dirons que *les mineurs obtenus par suppression d'une seule ligne et d'une seule colonne sont les mineurs de première classe.*

Supprimons maintenant deux lignes β_1 β_2 et deux colonnes α_1 α_2 ; nous obtiendrons un mineur de seconde classe que nous désignerons par $\Delta_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1 \alpha_2}$ et ainsi de suite. En général $\Delta_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$ désignera un mineur de classe k du déterminant

Δ, mineur obtenu par la suppression des k lignes $6_1\ 6_2 \ldots 6_k$ et et des k colonnes $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha \ldots {}_k$.

85. Théorème. *Lorsque le déterminant* Δ *est développé, si l'on réunit tous les termes qui renferment le facteur* a_6^α, *l'ensemble* M *de ces termes est égal à* $(-1)^{\alpha+6} a_6^\alpha \Delta_6^\alpha$.

Considérons d'abord le cas particulier où l'élément considéré est a_1^1 ; on a

$$\Delta_1^1 = \begin{vmatrix} a_2^2 \ldots a_2^n \\ a_3^2 \ldots a_3^n \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n^2 \ldots a_n^n \end{vmatrix} \qquad (1)$$

que l'on doit écrire

$$\Delta_1^1 = \begin{vmatrix} a_{1'}^{1'} \quad \ldots a_{1'}^{(n-1)'} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{(n-1)'}^{1'} \ldots a_{(n-1)'}^{(n-1)'} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

pour rester dans la convention générale. Mais on peut observer qu'il est indifférent de compter les inversions avec les indices $1', 2', \ldots (n-1)'$ de (2); ou les indices $2, 3, \ldots n$ de (1). Il est visible, en effet, qu'au lieu d'adopter les indices $1, 2, \ldots n$ on pourrait prendre n *nombres croissants quelconques* pour marquer le rang des lignes et des colonnes ; ces indices servant uniquement à marquer le signe du terme d'après la parité du nombre des inversions.

Ceci posé, imaginons un terme U quelconque de Δ renfermant le facteur a_1^1 ; soit $a_1^1 z$ ce terme ; les $(n-1)$ facteurs de R sont $(n-1)$ éléments de Δ_1^1 et sont écrits dans des lignes et des colonnes différentes de ce déterminant. Ainsi R est un terme de Δ_1^1 : d'ailleurs le signe de U, puisque le premier facteur est a_1^1, dépend des inversions qui existent dans les indices

de R. Nous venons de remarquer que le signe du terme R, dans Δ_1^1 peut se trouver indifféremment avec les indices des formules (1) et (2); ainsi R *est en grandeur et en signe* un terme de Δ_1^1. La réciproque est vraie et le théorème qui nous occupe se trouve ainsi établi pour un cas particulier, cas auquel nous allons ramener le théorème général.

Considérons l'élément a_6^α de Δ et permutons les lignes, deux à deux jusqu'à ce que la ligne 6 soit arrivée au premier rang. Il a fallu pour cela faire $(6-1)$ permutations successives, et l'on obtient un déterminant Δ', qui donne lieu à l'identité

$$(1) \quad \Delta' \equiv (-1)^{6-1}\Delta.$$

Dans Δ' faisons subir aux colonnes des permutations successives jusqu'à ce que la colonne α vienne occuper le premier rang. On a fait $(6-1)$ permutations et le nouveau déterminant Δ'' est tel que l'on a

$$(2) \quad \Delta'' \equiv (-1)^{\alpha-1}\Delta'.$$

De (1) et (2) on déduit

$$\Delta'' \equiv (-1)^{\alpha+6-2}\Delta$$

ou

$$(3) \quad \Delta'' \equiv (-1)^{\alpha+6}\Delta$$

L'élément a_6^α est dans Δ'', écrit dans la première ligne et dans la première colonne; nous venons de montrer que tous les termes qui, dans Δ'', renferment cet élément en facteur forment le déterminant obtenu par suppression de ces deux rangées. Ce déterminant est évidemment Δ_6^α puisqu'il n'a été fait que des déplacements de lignes ou de colonnes. L'identité (3) prouve que l'ensemble des termes renfermant a_6^α doit être identique dans les deux membres; on a donc

$$M = \frac{a_6^\alpha \Delta_6^\alpha}{(-1)^{\alpha+6}}$$

ou

$$M = (-1)^{\alpha+\beta} a_\beta^\alpha \Delta_\beta^\alpha.$$

Remarque. En posant

$$A_\beta^\alpha = (-1)^{\alpha+\beta} \Delta_\beta^\alpha$$

on a

$$M = a_\beta^\alpha A_\beta^\alpha.$$

Cette notation est utile dans certaines questions.

86. Corollaire I. *Le déterminant Δ peut se développer en mineurs de première classe conformément à la formule :*

$$(1) \qquad \Delta = a_1^1 \Delta_1^1 - a_1^2 \Delta_1^2 + \ldots + (-1)^{\alpha+1} a_1^\alpha \Delta_1^\alpha + \ldots + (-1)^{n+1} a_1^n \Delta_1^n.$$

En effet, si nous imaginons que Δ soit développé, conformément à sa définition même, les éléments de la première ligne entrent au premier degré dans chacun des termes de ce développement. On peut donc dire que l'on a

$$\Delta = a_1^1 \lambda_1 + a_1^2 \lambda_2 + \ldots + a_1^n \lambda_n$$

en imaginant que $a_1^1 \lambda_1$ représente l'ensemble des termes qui renferment l'élément a_1^1 et ainsi des autres. En appliquant le théorème précédent on voit que

$$\lambda_1 = \Delta_1^1 \quad \lambda_2 = (-1)^3 a_1^2 \Delta_1^2 \quad \ldots \lambda_n = (-1)^{n+1} a_1^n \Delta_1^n.$$

La formule (1) est donc démontrée ; elle s'applique, sauf une modification évidente sur les indices, aux éléments d'une colonne ou d'une ligne quelconque. Cette formule donne un procédé de calcul pour développer un déterminant donné. En effet après avoir développé Δ en mineurs de première classe, comme nous venons de le montrer, on pourra appliquer à cha-

cun de ces mineurs le même procédé de calcul et l'on obtiendra le développement de Δ en mineurs de seconde classe; et ainsi de suite.

87. Corollaire II. *Lorsque les éléments d'une ligne ou d'une colonne* p *d'un déterminant* Δ *renferment tous le facteur* K *; si l'on appelle* Δ' *le déterminant obtenu en supprimant ce facteur* K, *on a*

$$\Delta = K\,\Delta'.$$

Soient A, B, C ... L les n nombres écrits dans la colonne p. On a d'après le corollaire précédent,

$$\Delta = (-1)^{p+1} A\Delta_1^p + (-1)^{p+2} B\Delta_2^p \ldots + (-1)^{p+n} L\Delta_n^p.$$

Mais on suppose

$$A = KA' \quad B = KB' \ldots L = KL'.$$

On a donc,

$$\frac{\Delta}{K} = (-1)^{p+1} A'\Delta_1^p + (-1)^{p+2} B'\Delta_2^p \ldots + (-1)^{p+n} L'\Delta_n^p.$$

Si nous imaginons le déterminant Δ' formé en remplaçant dans Δ; A par A', B par B' etc., L par L', on voit que le second membre de cette identité est précisément Δ'. Ainsi on a

$$\frac{\Delta}{K} = \Delta'; \quad \text{ou} \quad \Delta = K\Delta'.$$

88. Corollaire III. *Lorsque dans un déterminant* Δ *deux lignes ou deux colonnes ont des éléments proportionnels, ce déterminant est identique à zéro.*

En effet Δ' a deux colonnes ou deux lignes identiques, on a donc (§ 83), $\Delta' = 0$; mais Δ est identique à $K\Delta'$, (§ 87) on a donc $\Delta = 0$.

89. Théorème. *Lorsque dans un déterminant* Δ *une ligne, ou une colonne* p, *est formée d'éléments polynômes*

$$\begin{array}{c} \alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_k \\ \beta_1 + \beta_2 \ldots + \beta_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_k \end{array}$$

Δ *est identique à la somme de k déterminants de même ordre; ces déterminants se déduisent de* Δ *en remplaçant dans celui-ci la colonne* p *successivement par les colonnes.*

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \text{etc.} \ldots & \alpha_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_k \\ . & . & \ldots & . \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \end{array}$$

On a en effet

$$\Delta = (-1)^{p+1}(\alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_k)\Delta_1^p + (-1)^{p+2}(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k)\Delta_2^p + \ldots + (-1)^{p+n}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_k)\Delta_n^p$$

ou bien

$$\begin{aligned} \Delta = & \left[(-1)^{p+1}\alpha_1 \Delta_1^p + (-1)^{p+2}\beta_1 \Delta_2^p + \ldots + (-1)^{p+n}\lambda_1 \Delta_n^p\right] \\ & + \left[(-1)^{p+1}\alpha_2 \Delta_1^p + (-1)^{p+2}\beta_2 \Delta_2^p + \ldots + (-1)^{p+n}\lambda_1 \Delta_n^p\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left[(-1)^{p+1}\alpha_k \Delta_1^p + (-1)^{p+2}\beta_k \Delta_2^p + \ldots + (-1)^{p+n}\lambda_k \Delta_n^p\right] \end{aligned}$$

La première parenthèse représente identiquement Δ lorsque la colonne p est remplacée par celle des premiers éléments de cette colonne, et ainsi des autres. Le théorème est donc démontré.

90. Corollaire I. *On peut, sans changer la valeur d'un déterminant, ajouter à une colonne les éléments d'une ou de plusieurs colonnes situés dans les mêmes lignes ; on peut même*

supposer que ces éléments, ainsi ajoutés, ont été préalablement multipliés par des facteurs arbitraires.

Je dis, par exemple, que l'on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+\lambda b+\mu c, & \mu b, & c \\ a'+\lambda b'+\mu c', & \mu b', & c' \\ a''+\lambda b''+\mu c'', & \mu b'', & c'' \end{vmatrix}$$

Le second membre peut en effet se décomposer en trois déterminants de même ordre (§ 89)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda b & b & c \\ \lambda b' & b' & c' \\ \lambda b'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mu c & b & c \\ \mu c' & b' & c' \\ \mu c'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Le premier est identique au déterminant proposé; les deux autres sont identiquement nuls, les éléments de deux colonnes étant proportionnels; l'identité est donc démontrée.

91. Corollaire II. *S'il existe entre les éléments correspondants de* K *colonnes une relation linéaire et homogène, le déterminant considéré est identiquement nul.*

Prenons par exemple le déterminant Δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}$$

et supposons que, pour des valeurs λ_1 λ_2 λ_3, qui ne sont pas nulles, on ait

$$\begin{aligned} \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c &= 0 \\ \lambda_1 a' + \lambda_2 b' + \lambda_3 c' &= 0 \\ \lambda_1 a'' + \lambda_2 b'' + \lambda_3 c'' &= 0 \\ \lambda_1 a''' + \lambda_2 b''' + \lambda_3 c''' &= 0 \end{aligned}$$

Je dis que l'on a

$$\Delta = 0$$

on a en effet,

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 b & \lambda_3 c & d \\ \lambda_1 a' & \lambda_2 b' & \lambda_3 c' & d' \\ \lambda_1 a'' & \lambda_2 b'' & \lambda_3 c'' & d'' \\ \lambda_1 a''' & \lambda_2 b''' & \lambda_3 c''' & d''' \end{vmatrix}$$

Si l'on ajoute (corollaire précédent) aux éléments de la première colonne ceux de la seconde et de la troisième, la première colonne a des éléments tous nuls. Un pareil déterminant est, évidemment, identiquement nul. Il suffit pour le reconnaître de le développer en mineurs par rapport aux éléments de cette colonne vide.

92. Les principes que nous venons d'exposer, et dont l'ensemble constitue comme un premier chapitre de la théorie des déterminants, suffisent dans beaucoup de cas, soit au calcul des déterminants, soit à la démonstration de leurs propriétés. Proposons-nous par exemple le calcul du déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & 9 & 25 \\ 8 & 1 & 27 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

On peut remarquer qu'en ajoutant la première colonne à la deuxième, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & 25 & 25 \\ 8 & 9 & 27 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

ou, en retranchant la deuxième colonne de la troisième,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & 25 & 0 \\ 8 & 9 & 18 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sous cette forme on peut développer Δ en mineurs par rap-

port aux éléments de la troisième colonne; on n'a à calculer qu'un seul mineur

$$\begin{vmatrix} 16 & 25 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -20$$

on a donc finalement

$$\Delta = 360.$$

La marche que nous venons de suivre peut être souvent appliquée dans le calcul des déterminants numériques. On s'efforce, par l'addition et la soustraction des lignes ou des colonnes, d'amener la présence d'éléments nuls ou tout au moins d'éléments plus simples que les proposés. Nous signalerons, à propos de cette transformation d'un déterminant donné, *le cas particulier où toute une rangée est formée d'unités.*

Lorsque cette circonstance se présentera on fera la soustraction des rangées, prises deux à deux, et la rangée considérée ne renfermera plus qu'un élément égal à 1; tous les autres étant nuls. Le calcul se réduit alors à celui d'un seul déterminant mineur. On pourra d'ailleurs appliquer cette remarque à tous les déterminants. C'est ce que montre le théorème suivant.

93. Théorème. *On peut toujours transformer un déterminant donné de façon que toute une colonne soit formée d'unités.*

Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Multiplions les lignes respectivement par $a'a''$, aa'', aa' en supposant $aa'a'' \neq 0$. Il vient

$$a^2a'^2a''^2\Delta = \begin{vmatrix} aa'a'' & ba'a'' & ca'a'' \\ aa'a'' & ab'a'' & ac'a'' \\ aa'a'' & aa'b'' & aa'c'' \end{vmatrix}$$

ou

$$aa'a''\Delta = \begin{vmatrix} 1 & ba'a'' & ca'a'' \\ 1 & ab'a'' & ac'a'' \\ 1 & aa'b'' & aa'c'' \end{vmatrix}$$

La transformation annoncée est effectuée. Si l'on veut profiter de cette transformation pour calculer Δ, on écrira,

$$aa'a''\Delta = \begin{vmatrix} 1 & ba'a'' & ca'a'' \\ 0 & a'(ab'-ba') & a'(ac'-ca') \\ 0 & a''(ab'-ba') & a''(ac'-ca') \end{vmatrix}$$

ou

$$aa'a''\Delta = a'a''(ab'-ba')(ac''-ca'') - a'a''(ac'-ca')(ab''-ba'')$$

on trouve finalement,

$$\Delta = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - ac'b'' - ba'c'' - cb'a''.$$

94. Règle de Sarrus. Le déterminant du troisième ordre à cause de sa simplicité même, se rencontre fréquemment. On peut le développer par la règle suivante donnée par Sarrus.

Formons le tableau

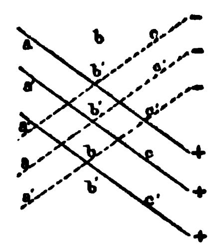


tableau déduit, comme l'on voit, du déterminant proposé

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

en lui ajoutant les deux premières lignes. En coupant le tableau par des lignes parallèles aux diagonales de Δ on obtient

les six termes de ce déterminant: les trois termes qui sont dans les lignes parallèles à la diagonale principale doivent être pris avec le signe $+$; les trois autres avec le signe $-$.

95. Remarque. La règle que nous avons donnée pour transformer un déterminant en un autre ayant une colonne d'unités est plus particulièrement applicable au cas où le plus petit multiple commun (numérique ou algébrique) des éléments a, a', a'' n'est pas le produit $aa'a''$, mais un nombre plus simple.

Soit par exemple,

$$\Delta = \begin{vmatrix} bc & b^2 & c^2 \\ ca & c^2 & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

Multiplions les lignes respectivement par a, b et c. Le déterminant est ainsi multiplié par abc; mais la première colonne ayant tous ses éléments égaux à abc, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & ab^2 & ac^2 \\ 1 & bc^2 & ba^2 \\ 1 & ca^2 & cb^2 \end{vmatrix}$$

ou,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & ab^2 & ac^2 \\ 0 & b(c^2 - ab) & a(ab - c^2) \\ 0 & c(a^2 - bc) & b(bc - a^2) \end{vmatrix}$$

ou enfin

$$-\Delta = (a^2 - bc)(b^2 - ac)(c^2 - ba).$$

96. Nous ferons une dernière remarque. Le calcul d'un déterminant peut toujours se faire par le développement de celui-ci en mineurs. Mais, dans un grand nombre d'exemples, on a surtout en vue la discussion du signe de ce déterminant et la détermination des cas particuliers où il s'annule. Le développement en mineurs n'est pas, en général, favorable à ces discussions et l'on doit s'efforcer, avant d'avoir recours à ce développement, d'utiliser, s'il y a lieu, la forme algébrique du

déterminant donné pour faire apparaitre par l'addition ou la soustraction des lignes et des colonnes les facteurs de ce déterminant.

Soit par exemple

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

On écrira, par une transformation évidente,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

On en déduit,

$$\Delta = (a+b+c)\,(ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2).$$

Le second facteur est égal à,

$$-\frac{1}{2}(b-c)^2-\frac{1}{2}(c-a)^2-\frac{1}{2}(a-b)^2.$$

Il est toujours négatif, excepté dans l'hypothèse $a=b=c$. Dans ce cas particulier Δ est nul; dans tous les autres cas Δ est positif, nul ou négatif suivant que la somme $(a+b+c)$ est négative, nulle ou positive.

On peut remarquer qu'en développant Δ en mineurs on a

$$\Delta = 3abc-a^3-b^3-c^3$$

on a donc

$$3abc-a^3-b^3-c^3 = (a+b+c)\,(ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2)$$

identité remarquable que nous avons déjà signalée (§ 1)

97. Théorème de Vandermonde. Soit encore proposé de calculer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 & 1 \\ a & b & c & \dots k & l \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots k^2 & l^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots k^{n-1} & l^{n-1} \end{vmatrix}$$

déterminant étudié par Vandermonde et dans lequel on suppose, bien entendu, que les lettres $a, b, c, \dots l$ sont en nombre n. On remarque que Δ s'annule pour $a = b$, $a = c, \dots k = l$. Posons

$$\begin{aligned} \mathrm{P} = (a-b)(a-c)\dots(a-k)(k-l) \\ (b-c)\dots(b-k)(b-l) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (h-k)(h-l) \\ (k-l) \end{aligned}$$

Ce nombre P est formé d'après la règle suivante :

1° Il renferme d'abord $(n-1)$ facteurs obtenus en retranchant de a tous les nombres suivants ;

2° Puis $(n-2)$ facteurs obtenus en retranchant de b tous les nombres suivants, etc... Soit, totalement, $\frac{n(n-1)}{2}$ facteurs.

Je dis que l'on a $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta = \mathrm{P}$. En effet, Δ est certainement divisible par P, puisque Δ est divisible par chacun des facteurs binômes de P. Ou peut donc poser $\lambda\Delta = \mathrm{P}$; il reste à montrer que l'on a $\lambda = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

On remarquera d'abord que toutes les lignes de Δ devant être représentées dans l'un quelconque de ses termes, chacun de ceux-ci est du degré $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. D'après cela, Δ est un polynôme entier et homogène des lettres $a, b, c, \dots l$; le degré de chacun des termes étant égal à $\frac{n(n-1)}{2}$. D'autre

part, P est aussi un polynôme entier, homogène et du degré $\frac{n(n-1)}{2}$, des lettres $a, b, \ldots l$. De cette comparaison il résulte que λ ne peut être une fonction entière des lettres $a, b, \ldots l$.

Or λ est nécessairement une fonction entière, si λ a une forme algébrique. On doit conclure de là que λ est une quantité numérique.

Enfin le terme principal de Δ est

$$U = 1 . b . c^2 \ldots k^{n-2} l^{n-1}.$$

Parmi les termes de P on trouve aussi

$$V = (-1)^{n-1} l^{n-1} . (-1)^{n-2} k^{n-2} \ldots . (-1)^2 c^2 . (-1) b$$

ou

$$V = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} U$$

on a donc

$$U\lambda = V$$

et, par suite

$$\lambda = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

EXERCICES

1. *Démontrer que si l'on prend dans leur ordre naturel neuf termes consécutifs d'une progression arithmétique ou géométrique pour former les trois lignes d'un déterminant, celui ci est nul.*

On retranche les colonnes deux à deux, dans le cas de la progression arithmétique, et, pour la progression géométrique, on remarque que deux colonnes ont les éléments proportionnels.

2. *Soit la suite*

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

dite suite de Lamé ou de Fibonacci. Démontrer que si l'on prend neuf termes

consécutifs quelconques pour former un déterminant, celui ci est toujours nul.

3. *Démontrer que l'on a*

$$\begin{vmatrix} 1 & C_m^1 & C_m^2 & \dots C_m^p \\ 1 & C_{m+1}^1 & C_{m+1}^2 & \dots C_{m+1}^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_{m+p}^1 & C_{m+p}^2 & \dots C_{m+p}^p \end{vmatrix} = 1$$

On désignera ce déterminant par Δ_p et l'on fera voir, par la soustraction des lignes deux à deux, que $\Delta_p = \Delta_{p-1}$. D'ailleurs,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = 1;$$

on a donc

$$\Delta_p = 1.$$

4. *Vérifier les identités suivantes :*

1°
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = -(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$$

2°
$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$$

3°
$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

4°
$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(b-c)(c-d)$$

5° $\begin{vmatrix} \frac{1}{h-a} & \frac{1}{h-b} & \frac{1}{h-c} \\ \frac{1}{h'-a} & \frac{1}{h'-b} & \frac{1}{h'-c} \\ \frac{1}{h''-a} & \frac{1}{h''-b} & \frac{1}{h''-c} \end{vmatrix} = \frac{(h-h')(h'-h'')(h''-h)(a-b)(b-c)(c-c}{(h-a)(h'-a)(h''-a)(h-b)(h'-b))h''-b}$

6° $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

7° $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{a^2} & b & 1 \end{vmatrix} = (b-a)\left(\frac{1}{a}-b\right)$$

8° $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$

9° $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc$

10° $$\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h \\ b & b+h' & b+2h' \\ c & c+h'' & c+2h'' \end{vmatrix} = 0$$

11° $\begin{vmatrix} a & b & ab \\ b & c & bc \\ c & a & ca \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(ab-ac)^2 + \frac{1}{2}(bc-ba)^2 + \frac{1}{2}(ca-cb)^2$

12°
$$\begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ b^2 & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \\ c^2 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{a+b+c}{2abc}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

13°
$$\begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{c^2} \\ b^2 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{a^2} \\ c^2 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} \end{vmatrix} = \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2a^2b^2c^2}$$

14°
$$\begin{vmatrix} a & b & a^2b^2 \\ b & c & b^2c^2 \\ c & a & c^2a^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{ab+ac+bc}{2}\right)\left[(ab-ac)^2+(bc-ba)^2+(ca-cb)^2\right]$$

15°
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

16°
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ \frac{1}{a} & 1 & b & b^2 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b} & 1 & c \\ \frac{1}{a^3} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(b-a)^2(b+a)(c-b)(c+a)}{a^3b^2c}$$

5. *On considère la suite,*

$$0,\ 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ \ldots$$

dite, suite de Fermat. Cette suite est telle que le terme u_n *de rang* n *est égal à*

$(2^{n-1}-1)$. *Démontrer que neuf termes consécutifs quelconques, plus généralement* p^2 *termes consécutifs, donnent lieu à un déterminant d'ordre* p *qui est identiquement nul.*

On remarquera que

$$u_n - 2u_{n-1} = 1.$$

6. *Lorsque l'une des diagonales d'un déterminant sépare celui-ci en deux régions; si l'une de ces régions ne renferme que des éléments nuls, le déterminant se réduit à son terme diagonal.*

7. *Calculer le déterminant* Δ_{p+1},

$$\Delta_{p+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ n+p+1 & (n+p) & \dots & (n+1) \\ (n+p+1)(n+p) & (n+p)(n+p-1) & \dots & (n+1)n \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ (n+p+1)(n+p)..(n+2), & (n+p)..(n+1), & \dots & (n+1)n..(n-p+2) \end{vmatrix}$$

On retranche les colonnes deux à deux et on reconnait que l'on a

$$\Delta_{p+1} = (-1)^p p^1 . \Delta_p.$$

D'après cela,

$$\Delta_{p+1} = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} 1^p 2^{p-1} 3^{p-2} \dots (p-1)^2 p.$$

HUITIÈME LEÇON

ÉQUATIONS LINÉAIRES

THÉORÈME DE M. ROUCHÉ.

98. Nous nous proposons, dans cette leçon, de résoudre et de discuter le système de m équations linéaires à n inconnues $x_1, x_2, \ldots x_m$. Nous examinerons d'abord le cas où il y a autant d'équations que d'inconnues. Posons

$$(\mathrm{H}) \left\{ \begin{array}{l} X_1 = a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^m x_m - k_1 = 0 \\ X_2 = a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^m x_m - k_2 = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_m = a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \ldots + a_m^m x \ - k_m = 0 \end{array} \right.$$

et,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots a_2^m \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_m^1 & a_m^2 \ldots a_m^m \end{vmatrix}$$

Δ est dit le déterminant du système proposé.

99. Théorème. *Lorsque Δ est différent de zéro il existe, pour le système proposé, une solution unique formée par des nombres qui sont tous finis et bien déterminés.*

Développons Δ en mineurs, on a, par une notation indiquée précédemment (§ 85)

$$\Delta = a_1^1 A_1^1 + a_1^2 A_1^2 + \ldots a_1^m A_1^m.$$

Les nombres A_1^1, $A_1^2, \ldots A_1^m$ ne sont pas tous nuls, puisque nous supposons $\Delta \neq 0$. Formons la combinaison $A_1^1 X_1 + A_1^2 X_2 + \ldots + A_1^m X_m = 0$ et désignons par D_1 le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ la première colonne par k_1, k^2, k_m. On peut remarquer que l'on a

$$a_1^2 A_1^1 + a_2^2 A_1^2 + \ldots + a_m^2 A_1^m = 0.$$

En effet le premier membre peut être considéré comme représentant le développement en mineurs d'un déterminant qui peut se déduire de Δ en remplaçant les éléments de la première colonne, respectivement par a_1^2, $a_2^2, \ldots a_m^2$. Mais un pareil déterminant ayant deux colonnes identiques, est identiquement nul. Cette remarque appliquée aux coefficients de $x_2, x_3, \ldots x_m$, dans la combinaison

$$A_1^1 X_1 + A_1^2 X_2 + \ldots + A_1^m X_m = 0,$$

prouve que cette relation se réduit à

$$x_1 \Delta = D_1.$$

On pourra donc former avec les équations proposées les combinaisons suivantes

$$(\mathrm{H}') \left\{ \begin{array}{l} x_1 \Delta = D_1 \\ x_2 \Delta = D_2 \\ \ldots\ldots \\ x_m \Delta = D_m \end{array} \right.$$

Nous allons établir *que les systèmes* H et H′ *sont équivalents*, en démontrant que toute solution du premier convient au second, *et vice versa*.

Il est d'abord visible que si les égalités (H) ont lieu pour les valeurs x'_1, $x'_2, \ldots x'_m$ des inconnues, les combinaisons H′ faites avec les équations H, comme nous l'avons expliqué,

seront vérifiées par les valeurs $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2 \ldots x_m = x'_m$. Mais il faut démontrer le réciproque de cette proposition, réciproque qui est moins évidente et qui peut s'établir ainsi.

Le système (H′) étant écrit sous la forme

$$\begin{aligned} x_1\Delta &= A_1^1 k_1 + A_2^1 k_2 + \ldots + A_m^1 k_m \\ x_2\Delta &= A_1^2 k_1 + A_2^2 k_2 + \ldots + A_m^2 k_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m\Delta &= A_1^m k_1 + A_2^m k_2 + \ldots + A_m^m k_m \end{aligned}$$

Multiplions ces égalités respectivement par $a_1^1, a_1^2, \ldots a_1^m$; cette combinaison est possible parce que tous ces nombres ne sont pas nuls à la fois. En effet si tous ces éléments étaient nuls on aurait $\Delta = 0$, et nous supposons, au contraire, $\Delta \neq 0$. Dans cette combinaison le coefficient de k_1 est

$$a_1^1 A_1^1 + a_1^2 A_1^2 + \ldots + a_1^m A_1^m.$$

Or ceci n'est autre chose que le déterminant Δ développé en mineurs par rapport aux éléments de la première ligne. D'autre part, le coefficient de k_2

$$a_1^1 A_2^1 + a_1^2 A_2^2 + \ldots + a_1^m A_2^m,$$

peut être considéré comme le développement en mineurs du déterminant Δ, quand on a remplacé les éléments de la deuxième ligne, respectivement par $a_1^1\ a_1^2 \ldots a_1^m$; mais alors deux lignes sont identiques et ce déterminant est nul. Cette remarque s'applique aux coefficients de $k_3, \ldots,$ de k_m; et l'on a finalement

$$\Delta\,(a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^m x_m) = \Delta k_1$$

ou

$$\Delta X_1 = 0.$$

Puisque Δ n'est pas nul, on a donc

$$X_1 = 0.$$

Des calculs analogues permettent de déduire successivement des équations (H') chacune des équations (H) : ainsi se trouve établie l'équivalence des deux systèmes.

100. Règle de Cramer. Le théorème que nous avons énoncé et la règle, dite règle de Cramer, que nous allons donner, sont la conséquence immédiate de cette équivalence.

Prenons l'équation

$$x_1\Delta = D_1.$$

Cette équation peut être interprétée ainsi : *étant donné un nombre* D_1, *et un autre nombre* $\Delta \neq 0$; *trouver un troisième nombre* x_1, *qui, multiplié par* Δ, *reproduise* D_1. On a vu, en arithmétique, qu'il n'y avait, à ce problème, *qu'une solution*, et que le nombre cherché x_1 était le quotient (nombre unique, fini, bien déterminé) de D_1 par Δ.

D'après cela, et puisque les systèmes (H) et (H') sont équivalents, il n'y a au système (H) proposé qu'une solution ; cette solution a lieu pour les nombres finis et bien déterminés.

$$x_1 = \frac{D_1}{\Delta} \quad x_2 = \frac{D_2}{\Delta} \quad \ldots \quad x_m = \frac{D_m}{\Delta}.$$

Ces valeurs peuvent s'écrire immédiatement en observant la règle suivante : 1° *Lorsque le déterminant* Δ *des inconnues est différent de zéro ; les inconnues* x_1, x_2, ... x_n *ont un dénominateur commun ; ce dénominateur est le déterminant des inconnues ;* 2° *le numérateur de l'inconnue* x_p, *s'obtient en remplaçant, dans ce déterminant, la colonne formée par les coefficients de* x_p *respectivement par les termes tout connus des équations ; ces termes étant pris avec le signe qu'ils possèdent quand ils constituent les seconds membres des équations proposées.*

THÉORÈME DE M. ROUCHÉ[1].

101. Définition. *Déterminant principal et déterminants caractéristiques.* Nous allons considérer maintenant le cas le plus général qu'on puisse imaginer dans la question qui nous occupe, celui où l'on se propose de résoudre le système de n équations à m inconnues. Soit

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^m x_m - k_1 = 0 \\ X_2 &= a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^m x_m - k_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^m x_m - k_n = 0 \end{aligned}$$

le système proposé. Formons avec les coefficients des inconnues le tableau suivant

$$(U) \quad \left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^m \end{matrix} \right\|$$

Nous ferons d'abord remarquer que tous les éléments de ce tableau ne peuvent être nuls à la fois. En effet, s'il en était ainsi, on observerait que si un seul des coefficients k était différent de zéro, le système n'admettrait aucune solution finie et que si, au contraire, tous les coefficients k étaient nuls, les équations proposées seraient identiquement nulles et, par suite, vérifiées par des nombres quelconques.

En prenant dans le tableau U un même nombre de lignes et de colonnes, on obtient des déterminants et parmi ceux-ci, il en existe certainement un, que nous nommons *déterminant principal,* et qui remplit les deux conditions suivantes :

1° Il n'est pas nul.

2° S'il est d'ordre p, tous les déterminants déduits du ta-

1. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 29 novembre 1875. — Journal de l'École Polytechnique, XLVIIIe cahier; 1880.

bleau U et qui sont d'un ordre supérieur à p, sont tous nuls.

Nous avons dit que l'existence de ce déterminant principal était certaine, car si tous les mineurs du second ordre étaient nuls, on trouverait au moins un élément différent de zéro, et cet élément serait pris pour déterminant principal. Il peut arriver que plusieurs déterminants d'ordre p remplissent les conditions précédentes ; dans ce cas on choisira l'un d'entre eux arbitrairement comme déterminant principal.

Les éléments qui constituent le déterminant principal sont des coefficients des inconnues dans le système proposé. On peut toujours supposer que ces inconnues sont $X_1 x_2 \ldots x_p$ et en désignant par δ le déterminant principal, nous aurons donc

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^p \end{vmatrix}.$$

Prenons maintenant une des équations $X_{p+\alpha} = 0$ et ajoutons à δ une ligne formée des éléments

$$a_{p+\alpha}^1 \quad a_{p+\alpha}^2 \quad \ldots \quad a_{p+\alpha}^p \quad k_{p+\alpha};$$

et une colonne formée avec les coefficients

$$k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_p \quad k_{p+\alpha}$$

Nous obtenons ainsi un nouveau déterminant. Tous les déterminants que l'on peut ainsi déduire du déterminant principal sont dits les *déterminants caractéristiques* du système. En posant,

$$\delta_\alpha = \begin{vmatrix} & & & k_1 \\ & \delta & & k_2 \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & k_p \\ a_{p+\alpha}^1 & a_{p+\alpha}^2 & \ldots & k_{p+\alpha} \end{vmatrix}$$

α doit prendre successivement les valeurs $1, 2, \ldots (n - p)$. Ainsi $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_{n-p}$ sont les déterminants caractéristiques.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de M. Rouché.

102. Théorème. *Etant données* n *équations à* m *inconnues.*

1° *Si les déterminants caractéristiques ne sont pas nuls, les équations sont incompatibles.*

2° *Si les déterminants caractéristiques sont tous nuls, et si l'ordre de ces déterminants est supérieur au nombre des inconnues, le système admet une solution unique.*

3° *Dans cette même hypothèse, les déterminants caractéristiques étant tous nuls, si la différence* m — p *est un nombre positif* i ; *le système admet une infinité de solutions, et l'on peut prendre arbitrairement la valeur des* i *inconnues dont les coefficients n'appartiennent pas au déterminant principal.*

Première partie (*Incompatibilité*). *Les déterminants caractéristiques ne sont pas tous nuls.*

Développons δ_α par rapport aux éléments de la dernière colonne, on a

$$(1) \quad \delta_\alpha = k_1 A_1^{p+1} + k_2 A_2^{p+1} + \ldots + k_p A_p^{p+1} + k_{p+\alpha} A_{p+1}^{p+1}.$$

Nous désignons ici, et d'après une notation conventionnelle déjà rappelée, par A_z^t, la quantité $(-1)^{z+t}\Delta_z^t$; Δ_z^t étant d'ailleurs le mineur obtenu par la suppression de la ligne de rang z, et de la colonne de rang t. On remarquera que $A_{p+1}^{p+1} = \pm \delta$; A_{p+1}^{p+1} est donc une quantité différente de zéro.

Considérons maintenant la combinaison ;

$$(2) \quad V = A_1^{p+1} X_1 + A_2^{p+1} X_2 + \ldots + A_p^{p+1} X_p + A_{p+1}^{p+1} X_{p+\alpha}.$$

Le coefficient de X_1, dans cette combinaison est,

$$a_1^1 A_1^{p+1} + a_2^1 A_2^{p+1} + \ldots + a_{p+\alpha}^1 A_{p+1}^{p+1}.$$

C'est-à-dire, par comparaison avec (1), δ_α quand les éléments de la dernière colonne sont remplacés par ceux de la première. Ainsi le coefficient de x_1 est nul. Cette remarque s'applique aux coefficients de $x_2\ x_3 \ldots x_p$. Quant aux coefficients de $x_{p+1}, \ldots x_n$, ils sont nuls parce que ce sont des déterminants d'ordre $(p+1)$ déduits du tableau (U), déterminants qui sont supposés égaux à zéro. On a donc finalement

$$V = -k_1 A_1^{p+1} - k_2 A_2^{p+1} \ldots - k_{p+\alpha} A_{p+1}^{p+1},$$

ou,

$$(3) \qquad V = -\delta_\alpha.$$

Imaginons maintenant une solution du système proposé. D'après la formule (2), V serait nul, pour ces valeurs des inconnues, et ceci implique contradiction, la formule (3) prouvant que V est différent de zéro. Ainsi le système est incompatible quand un seul déterminant caractéristique est différent de zéro.

Deuxième partie (*Solution unique*). *Les déterminants caractéristiques sont tous nuls, et leur ordre est supérieur à* m.

Nous supposons maintenant $\delta_\alpha = 0$, et $p+1 > m$; le nombre p est donc égal à m, ou supérieur à m. Soit d'abord $p = m$. Le déterminant principal étant formé, comme nous l'avons dit, avec le tableau rectangulaire (U), p est tout au plus égal au plus petit des deux nombres m et n; et puisque $p = m$, on a donc $n = m$, ou $n > m$.

Si l'on suppose d'abord $n = m$, le déterminant principal δ est justement le déterminant du système. Nous avons montré, en établissant la règle de Cramer, que le système comportait, dans ce cas, une solution unique.

Soit maintenant $n > m$; *il y a plus d'équations que d'inconnues* et nous pouvons considérer le système.

$$(4) \qquad X_1 = 0 \quad X_2 = 0 \ldots X_m = 0$$

formé par les m premières équations. Puisque $p = m$ le déterminant de ce système est le déterminant principal δ. Nous supposons $\delta \neq 0$; le système précédent admet donc une solution unique, et il reste à montrer que cette solution convient aux équations $X_{m+1} = 0 \dots X_n = 0$.

Des égalités (2) et (3), établies ci-dessus, résulte l'identité

$$(4) \qquad A_1^{p+1}X_1 + \dots + A_p^{p+1}X_p + A_{p+1}^{p+1}X_{p+1} + \delta_\alpha \equiv 0,$$

identité dans laquelle nous supposons $p=m$. Soit $x_1^1, x_2^1, \dots x_m^1$ la solution du système (4); puisque $\delta_\alpha = 0$, et $A_{p+1}^{p+1} = \delta$, on a

$$\delta X_{m+\alpha}^1 = 0,$$

$X_{m+\alpha}^1$ désignant ce qui devient $X_{m+\alpha}$ quand on y remplace les lettres $x_1, x_2, \dots x_m$ par les valeurs particulières $x_1^1, x_2^1 \dots x_m^1$. Mais on suppose $\delta \neq 0$; on a donc

$$X_{m+\alpha}^1 = 0.$$

Enfin si l'on suppose $p > m$, on a nécessairement $n > m$; le raisonnement précédent subsiste sans modification essentielle et l'on peut dire encore que le système admet une solution unique.

Troisième partie (*Indétermination*). *Les déterminants caractéristiques sont tous nuls, et leur ordre est égal ou inférieur à* m.

Nous supposons maintenant $p + 1 \leqslant m$; p a donc l'une des valeurs $(m-1)$, $(m-2)$, etc.... Quant au nombre n il peut être, suivant les cas, plus grand que m; égal, ou inférieur à m. Mais on peut toujours supposer $n > m$; on peut toujours, en d'autres termes, admettre qu'il y a plus d'équations que d'inconnues, car on peut adjoindre au système proposé autant d'équations que l'on veut, pourvu que celles-ci soient identiquement nulles.

Considérons maintenant les équations proposées.

(5) $$X_1 = 0 \quad X_2 = 0 \ldots X_n = 0$$

et distinguons, dans ce système, les équations

(6) $$X_1 = 0 \quad X_2 = 0 \ldots X_p = 0.$$

Nous supposons $p < m$ et $m < n$; par suite $p < n$. Donnons aux lettres $x_{p+1} \ldots x_m$ des valeurs arbitraires, et résolvons le système (5) par rapport aux inconnues $x_1, x_2, \ldots x_p$; chose possible puisque $\delta \neq 0$. L'identité (4) prouve que cette solution convient aux équations $X_{p+1} = 0, \ldots X_n = 0$. Ainsi il existe une infinité de solutions pour le système proposé, l'indétermination étant caractérisée par ce fait que l'on peut prendre arbitrairement les valeurs des inconnues qui ne sont pas représentées par leurs coefficients dans le déterminant principal.

103. Remarque. Il nous reste à établir un dernier point en montrant qu'en opérant comme il vient d'être dit, en donnant aux lettres $x_{p+1}, \ldots x_m$, des valeurs arbitraires et en déterminant ensuite $x_1\, x_2 \ldots x_p$ par les équations (6) *on a bien obtenu toutes les solutions du système proposé.*

Soit en effet $x'_1\, x'_2 \ldots x'_m$ une solution quelconque du système (5). Nous avons donné, avons-nous dit, des valeurs arbitraires aux lettres $x_{p+1}, \ldots x_m$. Les nombres $x'_{p+1} \ldots x'_m$ ont donc été choisis, ou peuvent l'être, pour représenter les inconnues $x_{p+1} \ldots x_m$. Les équations (6), quand on y fait $x_{p+1} = x'_{p+1} \ldots x_m = x'_m$, constituent un système de p équations à p inconnues. Le déterminant de ces inconnues est δ, quantité différente de zéro. Un pareil système n'admet qu'une solution (règle de Cramer); et puisque $x_1 = x'_1 \ldots x_p = x'_p$ constituent, par hypothèse, une solution de ce système, ces nombres représentent la solution unique du système. La solution $x'_1, x'_2, \ldots x'_m$ a donc été trouvée en opérant, comme nous

l'avons dit, et la méthode indiquée donne bien toutes les solutions du système donné.

EXERCICES

1. *Résoudre et discuter le système*

$$\begin{aligned} x + by + z &= 1 \\ ax + y + dz &= 1 \\ x + cy + z &= 1 \end{aligned}$$

Le déterminant du système est égal à $(a-d)(c-b)$: on distinguera différents cas, et on appliquera le théorème de M. Rouché.

2. *Résoudre et discuter le système*

$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{aligned}$$

Le déterminant du système est $b(a-1)^2(a+2)$.

3. *Résoudre le système*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 0 \\ ax_1 + bx_2 + \ldots + lx_n &= 0 \\ a^2x_1 + b^2x_2 + \ldots + l^2x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{n-1}x_1 + b^{n-1}x_2 + \ldots + l^{n-1}x_n &= 1 \end{aligned}$$

On appliquera la règle de Cramer et le théorème de Vandermonde.

4. *Résoudre les équations*

$$\begin{aligned} \frac{x}{h-a} + \frac{y}{h-b} + \frac{z}{h-c} &= 1 \\ \frac{x}{h'-a} + \frac{y}{h'-b} + \frac{z}{h'-c} &= 1 \\ \frac{x}{h''-a} + \frac{y}{h''-b} + \frac{z}{h''-c} &= 1 \end{aligned}$$

(Archives de Grünert.)

En supposant a, b, c différents, on trouve

$$x = \frac{(h-a)(h'-a)(h''-a)}{(a-b)(a-c)} \quad \text{etc.} \ldots$$

5. *Résoudre les deux équations*

$$x\frac{x^2+y^2-d(x+y)}{(y+x-d)(y^2+x^2)} = \frac{a}{d}$$
$$y\frac{x^2+y^2-d(x+y)}{(y+x-d)(y^2+x^2)} = \frac{b}{d}$$

On pose $x = at$, $y = bt$; t étant une inconnue auxiliaire. On trouve,

$$\frac{x}{a} = d\frac{(a^2+b^2)-d(a+b)}{(a+b-d)(a^2+b^2)}$$
$$\frac{y}{b} = d\frac{(a^2+b^2)-d(a+b)}{(a+b-d)(a^2+b^2)}$$

6. *Résoudre,*

$$ax+by+cz = b+c$$
$$bx+cy+az = c+a$$
$$cx+ay+bz = a+b$$

Dans cet exercice, on peut appliquer la remarque suivante, qui est quelquefois utile : le système, dira-t-on, admet visiblement la solution $x=0$, $y=1$, $z=1$; mais il ne peut admettre qu'une solution, donc, etc.... On vérifie d'ailleurs facilement ce résultat en appliquant la règle de Cramer.

7. *Résoudre et discuter successivement les systèmes suivants :*

$$(1) \qquad \begin{aligned} ax+ay+bz &= 1 \\ ax+cy+bz &= 1 \\ bx+by+az &= 1 \end{aligned}$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} b^2x+ay+c^2z &= b \\ ax+y+az &= 1 \\ c^2x+ay+b^2z &= c \end{aligned}$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} c^2x+ay+c^2z &= b \\ ax+y+bz &= 1 \\ c^2x+by+c^2z &= a \end{aligned}$$

8. *Appliquer le théorème de M. Rouché aux équations*

$$x + ay + a^2z = 1$$
$$\frac{1}{a}x + y + bz = 1$$
$$\frac{1}{a^2}x + \frac{1}{b}y + z = 1$$

On trouve d'abord

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

Si l'on suppose $a = b$, tous les mineurs de première espèce sont nuls, et le déterminant principal est l'élément 1.

On voit ensuite que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{a} & 1 \end{vmatrix}$ est un déterminant caractéristique ; si $a - 1 \neq 0$, il y a incompatibilité ; si $a = 1$, il y a indétermination et on peut prendre y et z arbitrairement.

9. *Résoudre les équations*

$$\frac{x^2 - y^2 - z^2 - d^2}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{a}{d}$$
$$\frac{2y(x-d)}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{b}{d}$$
$$\frac{2z(x-d)}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{c}{d}$$

En supposant

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq d^2.$$

On trouvera

$$\frac{x}{d} = \frac{a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$$
$$\frac{y}{d} = \frac{2b(a-d)}{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$$
$$\frac{z}{d} = \frac{2c(a-d)}{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$$

NEUVIÈME LEÇON

ÉQUATIONS HOMOGÈNES. — FORMES LINÉAIRES.

104. Définition des formes linéaires et homogènes. L'expression algébrique formée par une suite de termes, chacun d'eux renfermant une des lettres $x_1, x_2, \dots x_n$, et une seule, l'exposant de cette lettre étant d'ailleurs égal à l'unité, constitue une forme algébrique linéaire et homogène de ces lettres. En désignant cette forme par U, on a donc

$$U = ax_1 + bx_2 + \dots + lx_m;$$

les lettres $a, b, \dots l$ étant en nombre égal à m. Ces lettres représentent des coefficients numériques ou algébriques; mais dans aucun cas les lettres $x_1, x_2, \dots x_m$ n'entrent dans $a, b, \dots l$. Lorsqu'on égale une suite de formes linéaires à des constantes $k_1, k_2, \dots k_m$ qui ne sont pas toutes nulles, on obtient le système de m équations linéaires que nous avons résolu et discuté dans la leçon précédente : en les égalant à zéro on a des équations linéaires et homogènes qui vont nous occuper maintenant.

105. Théorème I. *Soit le système*

$$U_1 = a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^m x_m = 0$$
$$U_2 = a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^m x_m = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$U_m = a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \dots + a_m^m x_m = 0$$

de m *équations linéaires et homogènes à* m *inconnues. Si le déterminant* Δ *formé avec les coefficients des inconnues n'est*

pas égal à zéro, il n'y a, au système proposé, aucune solution autre que la solution évidente $x_1 = 0$, $x_2 = 0 \dots x_m = 0$.

Supposons que l'on ait $\Delta \neq 0$ et soit $x'_1, x'_2, \dots x'_m$ une solution du système : nous allons montrer que l'on a nécessairement.

$$x'_1 = x'_2 \dots = x'_m = 0$$

Désignons, en effet, par $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ des nombres arbitrairement choisis, mais tels que la somme $a_1^1\lambda_1 + a_1^2\lambda_2 + \dots + a_1^m\lambda_m$ soit différente de zéro. Cette condition peut toujours être réalisée, car l'un au moins des coefficients a_1^1, a_1^2, $\dots a_1^m$ n'est pas nul : en supposant $a_1^m \neq 0$ on pourra toujours, après avoir donné des valeurs arbitraires aux lettres $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{m-1}$, déterminer λ_m par la condition

$$a_1^1\lambda_1 + a_1^2\lambda_2 + \dots + a_1^m\lambda_m = k_1,$$

k_1 étant un nombre arbitrairement choisi et autre que zéro. Posons maintenant

$$\begin{aligned} X'_1 &= x'_1 + \lambda_1 \\ X'_2 &= x'_2 + \lambda_2 \\ &\dots\dots \\ X'_m &= x'_m + \lambda_m. \end{aligned}$$

On aura donc

$$a_1^1(X'_1 - \lambda_1) + \dots + a_1^m(X'_m - \lambda_m) = 0$$

ou

$$a_1^1X'_1 + \dots + a_1^mX'_m = k_1. \qquad (1)$$

De même on trouve

$$a_2^1X'_1 + \dots + a_2^mX'_m = k_2 \qquad (1)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_m^1X'_1 + \dots + a_m^mX'_m = k_m, \qquad (1)$$

en posant

$$(2)\quad \begin{cases} a_1^1\lambda_1 + \ldots + a_1^m\lambda_m = k_1 \\ a_2^1\lambda_1 + \ldots + a_2^m\lambda_m = k_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_m^1\lambda_1 + \ldots + a_m^m\lambda_m = k_m. \end{cases} \quad (k_1 \neq 0)$$

Si l'on considère les équations (1) qui sont linéaires mais non homogènes, elles admettent une solution, puisque le déterminant des inconnues est différent de zéro. De plus on sait que cette solution est *unique*.

Par suite les équations (1) et (2) ont les mêmes solutions. On a donc

$$X_1' = \lambda_1 \quad X_2' = \lambda_2 \ldots X_m' = \lambda_m$$

et, par conséquent,

$$x_1' = 0, \; x_2' = 0 \ldots x_m' = 0.$$

106. Théorème II. *Lorsque le déterminant* Δ *du système* U *est égal à zéro, ce système admet une infinité de solutions non nulles* (1).

Nous supposons maintenant $\Delta = 0$. Dans les équations U donnons à x_m une valeur arbitraire x_m' différente de zéro et posons $h_1 = -a_1^m x_m'$ $h_2 = -a_2^m x_m' \ldots h_m = -a_m^m x_m'$. Ces quantités $h_1, h_2, \ldots h_m$ ne sont pas toutes nulles, l'un au moins des coefficients $a_1^m, a_2^m, \ldots a_m^m$ étant différent de zéro. Les équations

$$\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + \ldots + a_1^{m-1} x_{m-1} = h_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m^1 x_1 + \ldots + a_m^{m-1} x_{m-1} = h_m. \end{array}$$

1. Par abréviation, nous appellerons *solution nulle* celle qui correspond à des valeurs des inconnues toutes nulles, et *solution non nulle* celle qui correspond à des valeurs des variables qui ne sont pas toutes nulles.

Constituent un système de m équations linéaires, non homogènes, à $(m-1)$ inconnues, les coefficients h n'étant pas tous nuls. On peut donc appliquer à ce système le théorème de M. Rouché. Considérons le tableau rectangulaire des coefficients.

$$(V) \quad \left\| \begin{matrix} a_1^1 & \dots & a_1^{m-1} \\ . & . & . \\ a_m^1 & \dots & a_m^{m-1} \end{matrix} \right\|.$$

Soit p l'ordre du déterminant principal δ ; on aura $p \leqslant m-1$. D'ailleurs les déterminants caractéristiques sont tous nuls. En effet, l'un quelconque de ces déterminants δ' est

$$\delta' = \left| \begin{matrix} & & & h_1 \\ & \delta & & h_2 \\ & & & . \\ & & & . \\ & & & h_p \\ a_{p+\alpha}^1 & \dots & a_{p+\alpha}^p & h_{p+\alpha} \end{matrix} \right| = x_m^1 \left| \begin{matrix} & & a_1^m \\ & \delta & a_2^m \\ & & . \\ & & . \\ a_{p+\alpha}^1 & & a_{p+\alpha}^m \end{matrix} \right|$$

Le déterminant qui est facteur de x_m^1, dans cette formule, est, ou un déterminant du tableau (V), ou le déterminant Δ ; dans l'un et l'autre cas il est nul. D'après cela il est prouvé que le système U admet une infinité de solutions non nulles; le nombre des variables arbitraires peut d'ailleurs se déterminer. Nous avons donné à x_m une valeur arbitraire x'_m ; de plus dans le tableau (V) l'ordre du déterminant principal étant plus petit ou tout au plus égal à $(m-1)$ en désignant par h un nombre nul ou positif, on peut poser

$$m - 1 - p = h.$$

D'après le théorème de M. Rouché on peut prendre h inconnues arbitrairement. Le nombre total des inconnues arbitraires, en y comprenant x_m, est donc $h+1$, ou $(m-p)$.

107. Théorème III. *Lorsque entre* m *inconnues il existe*

(m—i) ***équations linéaires***, i ***étant un nombre entier et positif; ce système admet une infinité de solutions non nulles. Le nombre des variables arbitraires est au moins égal à*** i; ***il est exactement*** (m — p), p ***étant l'ordre du déterminant principal qui correspond au tableau rectangulaire formé avec les coefficients des inconnues.***

Considérons en effet les équations linéaires et homogènes, entre les inconnues $x_1, x_2, \dots x_m$.

$$(1) \quad U_1 = 0 \quad U_2 = 0 \quad \dots \quad U_n = 0;$$

et le tableau rectangulaire des coefficients.

$$(V) \quad \left\| \begin{matrix} a_1^1 \dots a_1^m \\ \dots \\ a_n^1 \dots a_n^m \end{matrix} \right\|, \quad (m > n).$$

Soit

$$\delta = \left| \begin{matrix} a_1^1 \dots a_1^p \\ \dots \\ a_p^1 \dots a_p^p \end{matrix} \right|, \quad (p \leqslant n)$$

le déterminant principal de ce tableau. Considérons les équations.

$$(2) \quad U_1 = 0 \quad U_2 = 0 \quad \dots \quad U_p = 0$$

Qui font partie du système (1). Donnons, dans ces équations, des valeurs arbitraires aux inconnues $x_{p+1} \dots x_m$. Le déterminant δ des inconnues $x_1, x_2 \dots x_p$ étant différent de zéro, on pourra résoudre le système (2) par rapport à ces variables. On obtient ainsi, finalement, une solution $x'_1, x'_2, \dots x'_p; x'_{p+1} \dots x'_m$, du système (2), solution présentant le caractère suivant : *les* (p — m) *dernières inconnues sont arbitraires; les* p *premières ont, au contraire, des valeurs dépendantes de celles-ci.*

Il nous reste maintenant à montrer que l'une quelconque des solutions précédentes satisfait aux équations.

$$U_{p+1} = o \quad U_{p+2} = o \quad \dots \quad U_m = o.$$

Posons en effet

$$\delta_{p+\alpha} = \begin{vmatrix} & & \vdots & U_1 \\ & \delta & \vdots & U_2 \\ & & \vdots & . \\ & & \vdots & . \\ \dots & \dots & \dots & U_p \\ a^1_{p+\alpha} & \dots & a^p_{p+\alpha} & U_{p+\alpha} \end{vmatrix}$$

La dernière colonne de ce déterminant est un polynôme En développant $\delta_{p+\alpha}$ en déterminants d'ordre $(p+1)$ on voit,

1° que les coefficients de $x_1, x_2, \dots x_p$ ont deux colonnes identiques et sont par conséquent nuls;

2o que les coefficients de $x_{p+1}, \dots x_n$ sont des déterminants d'ordre supérieur à p, pris dans le tableau (V), déterminants qui sont nuls conformément à la définition même du déterminant principal. Il résulte de ceci que l'on a $\delta_{p+\alpha} = o$. Dans cette identité remplaçons x_1, par x'_1; x_2 par x'_2 etc...; x_p par x'_p. On a $U'_1 = o$ $U'_2 = o \dots U'_p = o$ (1). La dernière colonne de $\delta_{p+\alpha}$ a tous ses éléments nuls, à l'exception du dernier terme $U'_{p+\alpha}$. On peut donc écrire

$$\delta'_{p+\alpha} = \pm \delta U'_{p+\alpha}.$$

Nous avons montré que $\delta_{p+\alpha}$ *est identiquement nul.* On a donc $\delta'_{p+\alpha} = o$ et, par suite,

$$\delta U'_{p+\alpha} = o$$

1. U'_k désigne ici ce que devient U_k quand on remplace dans cette forme algébrique les lettres $x_1, x_2 \dots x_m$ par les valeurs particulières $x'_1, x'_2, \dots x'_m$.

Mais on suppose $\delta \neq 0$; on a donc enfin $U'_{p+\alpha} = 0$.

De cette conclusion résulte le théorème en question.

108. Théorème IV. *Lorsque entre* m *inconnues* $x_1, x_2, \ldots x_m$ *existent* $n = m + i$ *équations linéaires et homogènes* (i *étant un nombre entier et positif*), *ces équations admettent une infinité de solutions non nulles, si l'ordre* p *du déterminant principal qui correspond au tableau rectangulaire des coefficients est inférieur à* m. *Les équations n'admettent, au contraire, que la solution nulle, si l'on suppose* $p \geqslant m$.

Si l'on suppose d'abord $p \geqslant m$, les m premières équations n'admettent que la solution nulle (Th. I). Prenons maintenant l'hypothèse $p < m$. On peut donner aux variables $x_{p+1}, \ldots x_m$ des valeurs arbitraires et résoudre les équations

$$(P) \quad U_1 = 0 \quad U_2 = 0 \quad \ldots \quad U_p = 0$$

par rapport aux inconnues $x_1, x_2, \ldots x_p$. On voit, comme dans le théorème précédent, que toute solution du système (P) appartient aux autres équations $U_{p+1} = 0 \ldots U_n = 0$. Le nombre des variables indépendantes est égal à $(m - p)$.

109. Théorème V. *Pour qu'un déterminant soit nul il est nécessaire et suffisant qu'il existe entre les éléments des lignes ou des colonnes des relations linéaires et homogènes.*

1° Je dis d'abord que cette condition est nécessaire. Considérons en effet le déterminant Δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^2 & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

et supposons $\Delta = 0$. Les équations linéaires et homogènes

$$(H) \quad \begin{aligned} P_1 &= a_1^1\lambda_1 + a_1^2\lambda_2 + \ldots + a_1^n\lambda_n = 0 \\ P_2 &= a_2^1\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + \ldots + a_2^n\lambda_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n &= a_n^1\lambda_1 + a_n^2\lambda_2 + \ldots + a_n^n\lambda_n = 0 \end{aligned}$$

admettent pour les inconnues λ, une solution non nulle; le déterminant formé avec les coefficients des inconnues étant nul (§ 106).

2° Je dis maintenant que cette condition est suffisante. En effet si les équations (II) sont vérifiées par des valeurs des inconnues λ qui ne sont pas toutes nulles, c'est que le déterminant Δ est nul (§ 105).

110. Théorème VI. *Lorsqu'un déterminant est nul ainsi que tous ses mineurs, jusqu'à ceux de la classe* h *exclusivement, il existe entre les éléments de chaque ligne une même relation linéaire et, parmi les coefficients qui définissent cette relation,* h *sont arbitraires.*

Conservons les notations du paragraphe précédent et supposons que Δ soit nul ainsi que tous les mineurs de première classe, de seconde classe, etc..., mais non le mineur de classe h.

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-h}^1 & a_{n-h}^2 & \dots & a_{n-h}^{n-h} \end{vmatrix}$$

Considérons les équations

$$(1)\quad P_1 = 0 \quad P_2 = 0 \quad \dots \quad P_{n-h} = 0$$

et donnons aux lettres $\lambda_{n-h+1}, \dots \lambda_n$ des valeurs arbitraires. On peut résoudre ces équations par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-h}$; puisque le déterminant de ces inconnues δ, est différent de zéro. On obtient ainsi une solution $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ du système (1) et nous allons montrer que ces nombres vérifient les équations

$$(2)\quad P_{n-h+1} = 0 \dots P_n = 0.$$

Soit en effet le déterminant Δ',

$$\Delta' = \begin{vmatrix} & \delta & & \vdots & P_1 \\ & & & \vdots & P_2 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & P_{n-h} \\ a_{n-z}^1 & \dots & & & P_{n-z} \end{vmatrix}$$

déterminant dans lequel z désigne un des nombres $(h-1)$, $(h-2)$, ... o. Si l'on développe Δ' en déterminants d'ordre $(n-h+1)$, conformément à la règle connue ; il résulte de l'hypothèse que nous avons faite que ces déterminants sont tous nuls. On a donc $\Delta' = 0$. D'autre part les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ rendent nuls les éléments $P_1, P_2, \ldots P_{n-h}$ de la dernière colonne. On a donc

$$\Delta' = \delta . P_{n-z},$$

par suite,

$$\delta P_{n-z} = 0$$

et comme δ n'est pas nul, on a finalement $P_{n-z} = 0$, ce qui démontre le théorème en question.

111. Définitions. On dit que des formes linéaires U_1, U_2, ... U_n des variables $x_1, x_2, \ldots x_m$ sont *indépendantes* lorsque l'identité

$$(\alpha) \quad \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_n U_n = 0$$

ne peut avoir lieu qu'en supposant $\lambda_1 = \lambda_2 \ldots = \lambda_n = 0$. Si le contraire a lieu, les fonctions U sont *dépendantes*.

Si l'on suppose $n > m$, la dépendance existe nécessairement. En effet l'idendité (α) peut être établie en écrivant entre les coefficients λ qui sont au nombre n, m équations linéaires et homogènes (§ 107).

Théorème VII. *Pour qu'il y ait une dépendance entre* n *formes* U *linéaires et homogènes de* n *lettres* $x_1, \ldots x_n$ *il est nécessaire et suffisant que le déterminant* Δ *formé par les coefficients de ces lettres* x, *dans les formes* U, *soit nul.*

1° *La condition est suffisante.* En effet, si on suppose $\Delta = 0$ nous venons de voir (§ 109) qu'il existe des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

λ_n qui ne sont pas tous nuls, et qui satisfont aux conditions suivantes:

$$(\beta) \quad \begin{array}{l} \lambda_1 a_1^1 + \lambda_2 a_2^1 + \ldots + \lambda_n a_n^1 = 0 \\ \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \ldots + \lambda_n a_n^2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 a_1^n + \lambda_2 a_2^n + \ldots + \lambda_n a_n^n = 0 \end{array}$$

on a donc

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_n U_n \equiv 0$$

2° *La condition est nécessaire.* Supposons que l'on ait

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_n U_n \equiv 0,$$

les équations (β) sont alors vérifiées pour des valeurs des coefficients λ qui ne sont pas toutes nulles; on a donc $\Delta = 0$. (§ 105).

112. Théorème VIII. *Pour que* n *formes linéaires* U_1, U_2, ...U_n, *entre les* m *variables* $x_1\, x_2, \ldots\, x_m$, *soient dépendantes il faut et il suffit que le déterminant principal* δ, *du tableau rectangulaire* (V) *des coefficients soit d'un ordre inférieur à* n : *on suppose* (n $<$ m).

Il nous reste à examiner le cas où le nombre des formes est inférieur au nombre des variables. Pour déterminer les paramètres λ et former, s'il est possible, une relation d'identité entre les fonctions U, on doit résoudre un système de n équations linéaires et homogènes entre les inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.

Le tableau rectangulaire de ces équations n'est autre chose que le tableau (V) des coefficients proposés. Après cette remarque, il suffit d'appliquer le théorème IV pour établir la propriété en question.

113. Théorème IX. *Lorsqu'un polynôme* U, *entier, du degré* m, $U = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$ *s'annule pour* (m + 1) *valeurs de* x, *il est identiquement nul.*

Soient $x_0\, x_1 \dots x_m$, $(m+1)$ nombres différents et tels que l'on ait,

$$
(1) \quad \begin{aligned}
&A_0 x_0^m + A_1 x_0^{m-1} + \dots + A_{m-1} x_0 + A_m = 0\\
&A_0 x_1^m + A_1 x_1^{m-1} + \dots + A_{m-1} x_1 + A_m = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_0 x_m^m + A_1 x_m^{m-1} + \dots + A_{m-1} x_m + A_m = 0
\end{aligned}
$$

Considérons les équations linéaires et homogènes entre les inconnues $X_0, X_1, \dots X_m$;

$$
(2) \quad \begin{aligned}
&X_0 x_0^m + X_1 x_0^{m-1} + \dots + X_{m-1} x_0 + X_m = 0\\
&X_0 x_1^m + X_1 x_1^{m-1} + \dots + X_{m-1} x_1 + X_m = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&X_0 x_m^m + X_1 x_m^{m-1} + \dots + X_{m-1} x_m + X_m = 0
\end{aligned}
$$

Le déterminant des inconnues est un déterminant de Vandermonde et il n'est pas nul si les nombres $x_0\, x_1 \dots x_m$ sont tous différents, comme nous le supposons. Un pareil système (§ 105) ne peut admettre que la solution nulle. Or en comparant (1) et (2) on observe que $X_0 = A_0, X_1 = A_1, \dots X_m = A_m$ est une solution du système (2). Cette solution est nécessairement nulle. On a donc $A_0 = A_1 = \dots A_m = 0$;

Ainsi U est identiquement nul.

DIXIÈME LEÇON

NOMBRES INCOMMENSURABLES. CALCUL DES RADICAUX.

114. On a exposé en arithmétique[1] la théorie des nombres incommensurables, et on y a défini notamment la racine m^{me} d'un nombre, m désignant un nombre entier et positif. Nous reviendrons pourtant ici sur ce point important.

Étant donné un nombre A, entier et positif, si l'on peut trouver un nombre x tel que l'on ait $x^m = A$, on dit que x est la racine m^{me} de A. Si A est fractionnaire et positif, si l'on a $A = \frac{p}{q}$, on remarque que l'on a, $A = \frac{pq^{m-1}}{q^m}$; et, en posant, $x^m = pq^{m-1}$, $\left(\frac{x}{q}\right)^m = A$. L'extraction de la racine m^{me} d'un nombre fractionnaire se trouve ainsi ramenée à celle d'un nombre entier.

Dans le cas où A, nombre entier, n'est pas une puissance m^{me} exacte ; si l'on imagine la suite

$$(1) \qquad 1^m, \quad 2^m, \quad 3^m, \quad 4^m, \quad \text{etc}..$$

A est nécessairement compris entre deux nombres consécutifs de cette suite, p^m et $(p+1)^m$. On dit que p est la racine m^{me} de A, à une unité près, par défaut; $(p+1)$ représente la

1. Mesure d'une grandeur incommensurable avec l'unité. — Définition des opérations sur les nombres incommensurables. (Programme d'admission à l'École polytechnique, 3 janvier 1882.)

racine m^{me}, à une unité près, par excès. On sait d'ailleurs qu'il n'existe aucun nombre commensurable fractionnaire dont la puissance m^{me} soit égale à A.

On est alors conduit à l'idée des nombres incommensurables, et nous allons définir en particulier le nombre incommensurable dont la puissance m^{me} est égal à A.

Posons

$$A_p = Ap^m$$

p étant un nombre entier quelconque : Ap^m est donc un nombre entier. Ce nombre n'est pas une puissance m^{me} exacte ; car si l'on avait $Ap^m = x^m$ on aurait $\left(\frac{x}{p}\right)^m = A$, ce qui n'est pas possible, comme nous l'avons rappelé tout à l'heure. Ainsi Ap^m est un nombre compris entre deux nombres consécutifs du tableau (1) ; n^m, $(n+1)^m$. Écrivons donc

$$n^m < Ap^m < (n+1)^m$$

ou

$$\left(\frac{n}{p}\right)^m < A < \left(\frac{n+1}{p}\right)^m$$

Nous poserons

$$\alpha_p = \frac{n}{p} \quad \text{et} \quad \beta_p = \frac{n+1}{p}$$

Considérons maintenant les deux suites

$$(1) \qquad \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots \ \alpha_p$$
$$(2) \qquad \beta_1, \ \beta_2, \ \ldots \ \beta_p$$

et désignons par ρ_p la valeur principale [1] de la suite (1) et par σ_p celle de la suite (2). Les nombres

$$(3) \qquad \rho_1, \ \rho_2, \ \ldots \ \rho_p$$
$$(4) \qquad \sigma_1, \ \sigma_2, \ \ldots \ \sigma_p$$

1. Nous appelons, avec M Rouché, *valeur principale* d'une suite de

jouissent des propriétés suivantes : 1° Les nombres ρ vont toujours en croissant ou du moins ne décroissent jamais ; 2° les nombres σ vont toujours en décroissant ou du moins ne croissent jamais ; d'ailleurs les premiers sont nécessairement inférieurs à A, les autres supérieurs à l'unité. Les uns et les autres ont donc une limite [1]. Je dis que cette limite est la même. En effet, on a

$$\beta_p - \alpha_p = \frac{1}{p};$$

mais l'on suppose

$$\rho_p \geqslant \alpha_p \qquad \sigma_p \leqslant \beta_p.$$

On a donc

$$\sigma_p - \rho_p \leqslant \frac{1}{p}.$$

Quand p tend vers l'infini, la différence $\sigma_p - \rho_p$ tend vers zéro ; la limite est donc la même pour les deux suites. Cette limite commune, ce nombre positif *bien déterminé* et que l'on peut imaginer nettement, est ce qu'on appelle la racine m^{me} de A. Nous conviendrons de représenter ce nombre par l'écriture symbolique $\sqrt[m]{A}$.

Il faut d'ailleurs remarquer que la limite que nous venons de définir est *unique*. Imaginons en effet deux nombres positifs incommensurables x et y tels que l'on ait

$$x^m = A \quad \text{et} \quad y^m = A.$$

On aurait donc

$$x^m - y^m = 0$$

quantités $x_1\ x_2 \ldots x_n$ la plus grande ou la plus petite de ces quantités, suivant qu'elles représentent des valeurs approchées par défaut ou par excès de la quantité incommensurable qu'on veut définir. (V. *Traité de Géométrie élém.*, Rouché et de Comberousse.)

1. Nous supposons ici, pour ne pas insister davantage sur ces idées élémentaires, que les notions de limites, l'axiome fondamental que nous venons de rappeler et les principes relatifs aux limites ont été développés dans le cours d'Arithmétique.

ou

$$(x-y)(x^{m-1}+yx^{m-2}+\ldots+y^{m-1})=0.$$

Le second facteur du produit est positif, il faut donc que le premier facteur soit nul; ainsi on a $x=y$.

115. Remarque. Lorsque m est pair, si l'on appelle x la racine m^{me} de A, $-x$ est aussi une racine m^{me}; mais pour éviter toute confusion, nous appellerons *valeur arithmétique* d'une racine d'indice pair le nombre positif défini au paragraphe précédent. Avec cette convention, la racine m^{me} d'un nombre positif est une quantité toujours bien déterminée, c'est-à-dire n'ayant qu'une valeur.

Nous ferons aussi remarquer que nous avons supposé $A>0$; si l'on suppose A négatif et m impair, on ramène immédiatement ce cas au précédent de la manière suivante.

Soit x la racine m^{me} du nombre positif $-A$; x est un nombre que nous venons de définir et qui est bien déterminé. On pourra donc écrire.

$$x^m=-A$$

ou m étant impair,

$$x^m=(-1)^m A.$$

Multiplions, de part et d'autre, par $(-1)^m$, il vient

$$(-1)^m x^m=A$$

ou enfin

$$(-x)^m=A.$$

D'après cela $-x$ est la racine m^{me} de A.

Enfin si l'on suppose m pair, et $A<0$ il n'existe aucun nombre, positif ou négatif, commensurable ou incommensurable, qui, élevé à une puissance paire, puisse donner un résultat négatif.

116. Théorème I. *Le produit de deux ou plusieurs ra-*

dicaux de même indice p, *est égal à la racine d'indice* p *du produit des nombres proposés.*

Je dis que l'on a

$$(1) \qquad \sqrt[p]{A}\sqrt[p]{B} = \sqrt[p]{AB}.$$

Le premier membre de (1) est un produit de deux facteurs et chacun de ceux-ci n'a qu'une valeur : le produit n'a donc lui-même qu'une valeur. Désignons par α cette valeur unique.

Si on élève α à la puissance p, il faut élever chacun des facteurs à la puissance p, et faire le produit des deux résultats. Par définition, la puissance p du premier facteur $\sqrt[p]{A}$ est égale à A; la puissance p du second facteur $\sqrt[p]{B}$ est égale à B.

On voit déjà : 1° que le premier membre a une valeur unique; 2° que cette valeur est telle, qu'élevée à la puissance p, elle donne pour résultat AB. Or $\sqrt[p]{AB}$ est un nombre bien défini, n'ayant qu'une valeur, et cette valeur est telle que, élevée à la puissance p, elle donne pour résultat AB. En rapprochant les deux faits on voit que les deux membres ont des valeurs uniques et égales.

Le théorème étant vrai pour deux facteurs, s'applique, pour des raisons évidentes, à un nombre quelconque de radicaux.

117. Théorème II. *Pour élever un radical à une puissance* m, *il suffit d'élever, à la puissance* m, *le nombre placé sous le radical.*

Nous voulons démontrer que l'on a

$$(\sqrt[p]{A})^m = \sqrt[p]{A^m}.$$

Le premier membre peut s'écrire

$$(\sqrt[p]{A})(\sqrt[p]{A})\ldots$$

le nombre des facteurs étant égal à m. D'après le théorème précédent ce premier membre est égal à $\sqrt[p]{A.A\ldots}$ ou $\sqrt[p]{A^m}$. La proposition est donc établie.

118. Théorème III. *Le quotient de deux radicaux de même indice* p *est égal à la racine d'indice* p *du quotient des deux nombres donnés.*

En d'autres termes, nous voulons montrer que l'on a

$$\frac{\sqrt[p]{A}}{\sqrt[p]{B}} = \sqrt[p]{\frac{A}{B}}$$

ou

$$\sqrt[p]{A} = \sqrt[p]{B}\sqrt[p]{\frac{A}{B}}.$$

Or cette dernière identité résulte du théorème I ; le second membre étant, d'après ce théorème, égal à

$$\sqrt[p]{B \cdot \frac{A}{B}}, \quad \text{ou à} \quad \sqrt[p]{A}.$$

119. Théorème IV. *La racine d'indice* p *d'un radical d'indice* q *est égale à la racine d'indice* pq *du nombre proposé.*

On a donc à reconnaître l'exactitude de l'identité

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{A}} = \sqrt[pq]{A}.$$

Élevons le premier membre qui a une valeur unique et bien déterminée à la puissance pq. A cet effet on peut, si l'on veut, l'élever d'abord à la puissance p, puis à la puissance q. La première opération donne pour résultat $\sqrt[q]{A}$; la seconde A. Or le second membre a, lui aussi, une valeur unique et bien déterminée ; valeur telle que si on l'élève à la puissance pq on obtienne pour résultat A. Le premier membre a donc une valeur unique égale à celle du second membre.

120. Théorème V. *On ne change pas la valeur d'un radical en élevant à une puissance quelconque* q, *le nombre placé sous le radical, pourvu que l'on multiplie en même temps par* q *l'indice du radical.*

Soit $\sqrt[p]{A}$ le radical proposé; je dis que l'on a

$$\sqrt[p]{A} = \sqrt[pq]{A^q}.$$

Il suffit d'élever le premier membre à la puissance *pq* et de raisonner, comme nous l'avons fait dans la démonstration du théorème précédent.

Applications. Le théorème précédent est surtout employé dans les deux cas suivants : 1° *Simplification des radicaux*; 2° *Comparaison des radicaux.*

1° Soit à calculer

$$x = \sqrt[18]{2^9 . 3^{36} . 5^{27}}.$$

On aura

$$x = \sqrt{2 . 3^4 . 5^3} = \sqrt{3^4 . 5^2 . 10} = \sqrt{3^4 . 5^2}\sqrt{10}$$

ou enfin

$$x = 45\sqrt{10}$$

2° Soit à comparer les quantités

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \ldots \sqrt[n]{n},\ \text{etc...}$$

Posons

$$y_n = \sqrt[n]{n}$$

par suite,

$$y_{n+1} = \sqrt[n+1]{n+1}$$

Réduisons les radicaux au même indice; écrivons, à cet effet,

$$y_n = \sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}}$$

et,

$$y_{n+1} = \sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n}$$

Pour comparer y_n et y_{n+1} nous allons considérer la quantité z_n

$$z_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

Cette expression peut s'écrire

$$z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}.$$

Pour $n=2$ on a $y_2 = \frac{9}{8}$; ainsi l'on a $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

Nous verrons bientôt que l'expression $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est toujours comprise entre 2 et 3; alors $z_3, z_4, \ldots$ sont plus petits que l'unité. On a donc

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} \ldots, \text{etc.}$$

121. Exposants fractionnaires. L'expression a^m (1) a une valeur bien définie quand m représente un nombre entier et positif. Cette valeur est le produit obtenu en multipliant les uns par les autres m facteurs égaux à a. Mais $a^{\frac{p}{q}}$, p et q étant des nombres entiers et positifs, est une expression algébrique dénuée de sens, si l'on considère l'exposant comme marquant

1. Avant l'adoption de l'écriture symbolique a^m, les mathématiciens employaient diverses notations plus compliquées. Par exemple, l'expression

$$\frac{2b^3 - d^3}{zb - 3d^2}$$

s'écrivait

$$\frac{b\,\text{cub.}\,\text{bis} - d\,\text{cub.}}{z\,\text{in}\,b - d.q.\text{ter}}$$

(Lett. de Fermat à Mersenne. V. *Journal de Mathém. spéc.*, janv. 1883.) Nous voulons faire comprendre par cette citation toute l'importance des notations symboliques de l'algèbre.

un nombre de facteurs. Nous convenons ici de considérer $a^{\frac{p}{q}}$ comme égal à $\sqrt[q]{a^p}$. Cette dernière écriture algébrique représente une quantité bien définie. Mais nous devons expliquer, dès maintenant, comment on a été conduit à faire cette convention; nous ferons voir plus tard, quand nous discuterons la fonction a^x, pourquoi elle a été faite et quelle est son utilité.

Lorsqu'on a à calculer une expression de la forme

$$y = \sqrt[p]{a^{pq}},$$

il résulte du théorème V que l'on a $y = a^q$ ou $y = a^{\frac{pq}{p}}$. Ainsi l'expression $a^{\frac{m}{n}}$ a une valeur bien définie $\sqrt[n]{a^m}$ quand m est exactement divisible par m, et c'est ainsi qu'on a été conduit à considérer conventionnellement $a^{\frac{m}{n}}$ comme égal à $\sqrt[n]{a^m}$ quand m et n sont des nombres entiers et positifs quelconques.

Pour que cette convention puisse être acceptée il faut observer que les deux expressions $y = a^{\frac{m}{n}}$ et $z = \sqrt[n]{a^m}$, jouissent, l'une et l'autre, de la propriété de rester égales quand m et n varient proportionnellement. Cette propriété, évidente sur la forme y, est encore vraie pour la seconde forme z, puisque l'on a $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ (§ 120).

122. Théorème. *Les règles connues pour le calcul des exposants entiers subsistent pour les exposants fractionnaires.*

Prenons, pour ne citer qu'un exemple, la propriété fondamentale

$$a^p a^q = a^{p+q}.$$

Je dis que cette règle subsiste pour les exposants fractionnaires positifs, que l'on a, en d'autres termes,

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}}$$

En effet, d'après la convention faite tout à l'heure on a

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n']{a^{m'}}$$

ou

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[nn']{a^{mn'}}\sqrt[nn']{a^{nm'}} = \sqrt[nn']{a^{mn'}.a^{nm'}} = \sqrt[nn']{a^{mn'+nm'}}$$

Mais ce dernier radical peut s'écrire, d'après la même convention,

$$a^{\frac{mn'+nm'}{nn'}} \quad \text{ou} \quad a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}}.$$

On a donc bien

$$a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m'}{n'}}.$$

123. Exposants négatifs. Nous ferons maintenant une autre convention, et celle-ci est relative aux exposants négatifs. Nous conviendrons que l'expression a^{-p} (p nombre entier ou fractionnaire, mais positif) représente le nombre bien défini $\frac{1}{a^p}$.

La règle pour la division de deux exponentielles de même base a^x, a^y donne, pour le quotient, l'expression a^{x-y}, expression ayant une valeur bien-définie quand on suppose $x > y$. En posant $z = \frac{a^x}{a^y}$, on voit que si $x = y$ on a $z = 1$; pour ce motif on a fait dans l'algèbré élémentaire la convention suivante : $a^0 = 1$. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point dans l'étude que nous ferons bientôt de la fonction a^x ; et nous établirons que l'exponentielle de base quelconque a pour limite l'unité, quand l'exposant tend vers zéro.

Enfin si l'on suppose $x < y$, en posant $y - x = h$ on a

$$z = \frac{a^x}{a^{x+h}}, \text{ ou } z = \frac{a^x}{a^x . a^h}, \text{ ou enfin } z = \frac{1}{a^h}.$$

D'autre part, la règle que nous avons rappelée donne

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = a^{-h}.$$

On pourra donc appliquer cette règle de la division de deux exponentielles de même base dans le cas où l'exposant du numérateur est plus faible que celui du dénominateur, mais en faisant la convention $a^{-h} = \frac{1}{a^h}$.

124. Théorème. *Les règles connues relatives aux calculs des exposants positifs s'appliquent aux exposants négatifs.*

Prenons encore la propriété fondamentale

$$a^p a^q = a^{p+q};$$

Je dis que l'on a

$$a^{-p} a^{-q} = a^{-p-q}.$$

En effet les identités

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q}$$

donnent

$$a^{-p} a^{-q} = \frac{1}{a^{p+q}}$$

Mais, par la convention que nous avons faite, on a

$$\frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{-p-q}$$

On a donc bien, finalement

$$a^{-p} a^{-q} = a^{-p-q}.$$

ONZIÈME LEÇON

LES EXPRESSIONS IMAGINAIRES

125. Définition. Une expression telle que $y = \sqrt{-4}$ est dénuée de sens, si l'on veut exprimer par cette égalité qui y est un nombre commensurable ou incommensurable, positif ou négatif, dont le carré est égal à -4. Nous convenons ici, pour généraliser l'écriture symbolique $\sqrt{A}$, *que* $\sqrt{A}$ *représente dans tous les cas une expression algébrique dont le carré doit, dans les calculs où pénètre ce symbole, être remplacé par* A.

Il est facile de comprendre l'utilité de cette convention et comment on est naturellement conduit à la faire quand on cherche à généraliser le calcul algébrique. Prenons, pour mettre ce point en évidence, l'égalité

$$y^2 = 6 = 2 \times 3$$

on a, par une propriété connue

$$y = \sqrt{2}\sqrt{3}$$

D'autre part, on peut écrire

$$y^2 = (-2)(-3).$$

Si nous admettons, conformément à la convention que nous proposons, que $\sqrt{-2}$ ne soit qu'une écriture symbolique, ne s'expliquant pas par le sens qu'on a attribué en arithmétique au signe symbolique $\sqrt{}$, mais soumise aux règles ordinaires du calcul algébrique, on peut écrire, sans inconvénient

$$y = \sqrt{-2}\sqrt{-3}.$$

En effet, le carré de l'expression écrite dans le second membre de cette égalité est égal, si l'on admet la convention que nous venons de faire, au produit des carrés des facteurs $\sqrt{-2}$ et $\sqrt{-3}$; égal par conséquent, d'après cette convention, au produit de (-2) par (-3); c'est-à-dire enfin égal à 6.

Le théorème relatif au produit de deux radicaux carrés, celui qui est exprimé par l'identité

$$\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{AB}$$

et tous les principes du calcul algébrique se trouvent ainsi généralisés. On peut donc, pour poursuivre cette généralisation des formules qui est un des buts de l'algèbre, introduire l'écriture symbolique $\sqrt{U}$ sans avoir à se préoccuper du cas où l'on a $U < 0$. Il faut seulement accepter la convention suivante:

1° *On a, quel que soit* U

$$(\sqrt{U})^2 = U;$$

2° *Quand on suppose* $U < 0$ *les expressions* $\sqrt{U}$, *dites expressions imaginaires, sont soumises aux règles ordinaires du calcul algébrique, règles démontrées pour les nombres qui ont été définis en arithmétique.*

Par opposition aux expressions imaginaires, les nombres définis en arithmétique sont nommés *quantités réelles.*

Nous désignerons, suivant l'usage, par i l'expression imaginaire dont le carré est égal à (-1). On a, d'après les conventions précédentes

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1.$$

Généralement

$$i^{4n} = 1 \quad i^{4n+1} = i \quad i^{4n+2} = -1 \quad i^{4n+3} = -i.$$

Nous appellerons *expression imaginaire de forme normale*

l'expression $(a + bi)$; a et b étant réels : $a - bi$ représente *l'expression imaginaire conjuguée.*

126. Principe I. *Si l'on rencontre l'égalité* a+bi = o [1] *on peut remplacer celle-ci par la double égalité* a = o, b = o.

En effet l'égalité proposée soumise aux règles ordinaires du calcul, conformément à la convention faite, donne

$$a = -bi$$

puis,

$$a^2 = + b^2(-1)$$

ou

$$a^2 + b^2 = 0$$

Deux nombres réels a et b ne peuvent avoir une somme de carrés nulle que s'ils sont séparément nuls. On a donc $a = 0$, $b = 0$.

Principe II. *Si l'on rencontre l'égalité*

$$a + bi = a' + b'i$$

on pourra la remplacer par l'ensemble des deux égalités a = a', b = b'.

L'égalité proposée donne, conformément à la convention,

$$(a - a') + (b - b')i = 0,$$

et le principe précédent permet de conclure de cette égalité

$$a - a' = 0, \quad \text{et} \quad b - b' = 0.$$

127. Théorème I. *Le produit de plusieurs expressions imaginaires de la forme* a + bi *est une expression de cette forme.*

On a d'abord

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + i(ab' + ba');$$

1. Pour éviter des répétions continuelles, il va sans dire qu'en parlant de l'expression $(m + ni)$, nous sous-entendons toujours que *m et n sont des nombres réels.*

le théorème est donc vérifié pour deux facteurs; il est donc vrai aussi pour un nombre quelconque de facteurs.

Corollaire. *La puissance* p *d'une expression de la forme* (a+bi), p *étant entier et positif, est une expression de cette forme.*

Il suffit évidemment de supposer que l'on applique le théorème précédent à p facteurs identiques.

128. Théorème II. *Le quotient de deux expressions imaginaires de la forme* a+bi *est une expression de cette forme.*

Soit

$$y = \frac{a+bi}{a'+b'i},$$

on a,

$$y = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2},$$

ou,

$$y = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{(ba'-ab')}{a'^2+b'^2}i,$$

ou enfin

$$y = A + Bi,$$

en posant

$$A = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} \quad B = \frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}.$$

A et B sont bien deux nombres réels.

129. Théorème III. *Un polynôme entier* U,

$$U = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$$

dans lequel les coefficients $A_0, A_1, \ldots A_m$ *sont des expressions imaginaires de la forme* (a+bi) [1], *prend la forme* P + Qi, *si l'on remplace* x *par* $(\alpha+\beta i)$.

1. Cauchy a donné le nom de *fonction entière* au polynôme entier que nous considérons ici.

Il résulte en effet de la convention que nous avons faite, que l'on a

$$\Sigma(a + bi) = \Sigma a + i\Sigma b.$$

Chacun des termes de U étant le produit de facteurs de la forme $(m + ni)$ est, d'après le théorème précédent, une expression de cette forme ; la somme de ces termes est donc aussi de cette forme.

130. Théorème IV. *Le produit ou le quotient de deux fonctions entières de x, est une expression imaginaire de la forme* (m + ni) ; *quand on y remplace x par* $(\alpha + \beta \mathrm{i})$.

Soit $y = \frac{U}{V}$. U et V étant deux fonctions entières. D'après le théorème précédent U et V prennent la forme $(m + ni)$ quand on remplace la lettre x par $(\alpha + \beta i)$. D'autre part le théorème II prouve que le quotient de deux imaginaires de cette forme est aussi une expression imaginaire, de cette même forme.

131. Théorème V. *Deux expressions imaginaires conjuguées substituées dans un polynôme entier à coefficients réels, donnent deux expressions imaginaires conjuguées.*

Soit $U = f(x)$ le polynôme proposé. Remplaçons x par $(\alpha + \beta \mathrm{i})$ on aura

$$f(\alpha + \beta i) = P + Qi.$$

P et Q sont des polynômes entiers par rapport aux lettres α, β et par rapport aux coefficients, supposés réels, de U. Dans l'identité précédente, les deux membres étant absolument les mêmes, il est évident que l'identité subsiste si l'on change i en $(-i)$. Les polynômes P et Q ayant leurs coefficients réels, conservent des valeurs identiques et l'on a

$$f(\alpha - \beta i) = P - Qi.$$

132. Forme trigonométrique de l'expression imaginaire. Posons

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

le radical étant, par convention, pris avec le signe +. Cette quantité ρ, qui est évidemment réelle et que nous supposons positive, est ce que nous appellerons le *module* de l'expression imaginaire. L'identité évidente,

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right]$$

peut s'écrire

$$a+bi=\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$$

en posant

$$\cos\omega=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad\sin\omega=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Les nombres

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

sont, quels que soient a et b, compris entre $+1$ et -1. On a d'ailleurs

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1\,;$$

Cette identité prouve qu'il existe entre 0 et 2π *un arc, et un seul arc* admettant pour cosinus, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et, en même temps, pour sinus $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Cet arc ω, *dont la valeur est bien déterminée*, est *l'argument* de la quantité imaginaire $(a+bi)$.

De là résultent les remarques suivantes : 1° *une quantité imaginaire nulle a un module nul; et réciproquement;* 2° *deux expressions imaginaires égales ont le même module et le même argument, et réciproquement;* 3° *deux expressions imaginaires conjuguées ont le même module, mais des arguments dont la somme est égale à* 2π *; et réciproquement;* 4° *deux imaginaires*

égales et de signes contraires, deux imaginaires dont la somme est nulle, en d'autres termes, ont : 1° le même module, 2° deux arguments différents de π; et réciproquement.

133. Représentation géométrique de l'expression imaginaire[1]. Imaginons deux axes rectangulaires ox, oy et une expression imaginaire $(a + bi)$. Il y a dans le plan des axes ox, oy, un point M, et un seul, dont les coordonnées sont $x = a$ $y = b$; nous convenons de dire que ce point M représente l'imaginaire $(a + bi)$. Réciproquement, à un point quelconque du plan, au point M′, correspondent une abcisse a' et une ordonnée b' et nous dirons que l'imaginaire $a' + b'i$ correspond à ce point M′.

Dans cette manière de voir les nombres réels sont considérés comme un cas particulier des expressions imaginaires; la forme $a + bi$ représente en effet un nombre réel quand on suppose $b = o$: les points qui correspondent aux nombres réels sont ceux qui sont placés sur l'axe des x.

Lorsque l'expression imaginaire proposée est mise sous la forme trigonométrique $\rho(\cos\omega + i\sin\omega)$, le point qui la représente est celui dont les coordonnées polaires sont ρ et ω.

On peut, d'après cela, faire les remarques suivantes : 1° *L'origine représente l'imaginaire nulle ; 2° deux imaginaires égales sont représentées par le même point ; 3° deux imaginaires conjuguées, par deux points symétriques par rapport à* ox *; 4° deux imaginaires égales et de signes contraires, par deux points symétriques par rapport à l'origine.*

134. Théorème VI. *Lorsqu'on multiplie plusieurs imaginaires : 1° le module du produit est égal au produit des modules, 2° l'argument du produit est égal à la somme des arguments des facteurs considérés.*

Considérons d'abord les deux facteurs U_1 et U_2; soit

$$U_1 = \rho_1(\cos\omega_1 + i\sin\omega_1),$$

1. Voyez la représentation du point en Géométrie Analytique. (*Cours de Mathématiques spéciales*, deuxième partie.)

et

$$U_2 = \rho_2 (\cos \omega_2 + i \sin \omega_2).$$

On aura donc

$$U_1U_2 = \rho_1\rho_2(\cos\omega_1\cos\omega_2 - \sin\omega_1\sin\omega_2 + i\sin\omega_1\cos\omega_2 + i\sin\omega_2\cos\omega_1)$$

ou

$$U_1U_2 = \rho_1\rho_2 [\cos (\omega_1 + \omega_2) + i \sin (\omega_1 + \omega_2)].$$

Sous cette forme on voit que $U_1\ U_2$ est une expression imaginaire dont le module est $\rho_1\ \rho_2$ et l'argument $(\omega_1 + \omega_2)$.

Le théorème est vrai pour deux facteurs ; il se généralise sans difficulté.

135. Formule de Moivre. *La puissance* m *d'une expression imaginaire* (m *nombre entier et positif*) *s'obtient en élevant le module à la puissance* m *et en multipliant l'argument par* m.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent aux facteurs U_1, $U_2, \dots U_m$ en supposant que tous les facteurs soient égaux à U;
$U = \rho (\cos \omega + i \sin \omega)$.
On a ainsi

$$U^m = \rho^m (\cos m\omega + i \sin m\omega).$$

Cette formule remarquable est due à *Moivre*. Elle est démontrée dans l'hypothèse où m est entier et positif. Il est facile de reconnaître qu'elle subsiste quand m est entier et négatif.

Soit $m = -m'$, alors m' est entier et positif. On a $U^m = U^{-m'} = \frac{1}{U^{m'}}$: par conséquent, et d'après la formule de Moivre

$$U^m = \frac{1}{\rho^{m'} (\cos m'\omega + i \sin m'\omega)}.$$

Multiplions, haut et bas, par $(\cos m'\omega - i \sin m'\omega)$, il vient

$$U^m = \rho^{-m'} (\cos m'\omega - i \sin m'\omega),$$

ou enfin

$$U^m = \rho^m (\cos m\omega + i \sin m\omega).$$

136. Théorème VII. *Le quotient de deux expressions imaginaires s'obtient en divisant les modules, et en retranchant les arguments de ces deux expressions.*

Soit

$$U_1 = \rho_1 (\cos \omega_1 + i \sin \omega_1)$$
$$U_2 = \rho_2 (\cos \omega_2 + i \sin \omega_2).$$

Désignons par U le quotient cherché, et posons

$$U = \rho (\cos \omega + i \sin \omega).$$

On aura donc

$$U_1 = UU_2.$$

En appliquant le théorème précédent, on obtient

$$\rho_1 = \rho \cdot \rho_2 \quad \text{et} \quad \omega_1 = \omega + \omega_2,$$

par suite

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_1 - \omega_2.$$

137. Théorème VIII. *Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il est nécessaire et suffisant que l'un de ces facteurs soit nul.*

Cette proposition peut être considérée comme évidente pour des facteurs réels ; nous allons l'étendre au cas où l'on considère des facteurs imaginaires de la forme $(a + bi)$.

Soit

$$U = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \ldots (a_n + b_n i),$$

U est une expression imaginaire que nous désignerons par $(A + Bi)$, (§ 127). On a d'ailleurs (§ 134),

$$(1) \quad \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \ldots \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

1° Si l'un des facteurs proposés est nul ; si l'on a, par exemple,

$$a_1 + b_1 i = 0,$$

il faut alors supposer que l'on a $a_1 = 0$, et $b_1 = 0$. Le second membre de l'égalité (1) est un produit de facteurs réels ; l'un d'eux étant nul, le produit est nul. On a donc

$$A^2 + B^2 = 0,$$

et comme A et B sont réels on doit supposer $A = 0$ et $B = 0$. Ainsi le produit est nul quand l'un des facteurs est nul.

2° Supposons maintenant que le produit soit nul ; nous allons démontrer que l'un des facteurs est nécessairement nul. En effet si l'on a $A + Bi = 0$ on doit supposer (§ 126), $A = 0$ et $B = 0$. Dans l'égalité (1) le premier membre est nul ; le second l'est donc aussi. Les facteurs étant réels, il est nécessaire que l'un d'eux soit nul, que l'on ait, par exemple $a_1^2 + b_1^2 = 0$; par suite $a_1 = 0$ et $b_1 = 0$, puisque a_1 et b_1 sont réels. Le facteur $(a_1 + b_1 i)$ est donc nul.

138. Théorème IX. *Le module d'une somme est plus petit que la somme des modules, ou est tout au plus égal à cette somme.*

Cette proposition est évidente quand on se sert de la représentation géométrique de l'imaginaire. On voit ainsi, sans peine, que la propriété en question est la conséquence immédiate de cette vérité géométrique : qu'une ligne droite est plus courte qu'une ligne brisée aboutissant à ses extrémités, ou est égale à cette ligne brisée, quand celle-ci vient s'aplatir sur la ligne droite. Mais nous voulons établir cette proposition par des considérations purement algébriques.

Prenons d'abord les deux expressions imaginaires U_1 et U_2,

$$U_1 = a_1 + b_1 i, \quad U_2 = a_2 + b_2 i.$$

On a

$$U_1 + U_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i ;$$

et il faut reconnaître l'inégalité suivante

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Les deux membres étant positifs on peut les élever au carré et nous aurons à démontrer que l'on a bien

$$\text{(A)} \quad a_1a_2 + b_1b_2 \leqslant \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Si le premier membre est négatif, le second étant positif, l'inégalité est vraie : Supposons donc que le premier membre soit positif. Élevons alors les deux membres au carré, il vient

$$a_1^2a_2^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + b_1^2b_2^2 \leqslant (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2),$$

ou finalement

$$(a_1b_2 - b_1a_2)^2 \geqslant 0.$$

Si l'on suppose $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, l'inégalité précédente est vérifiée : dans le cas particulier où $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ (1) le module de la somme est égal à la somme des modules.

Nous ferons remarquer ici que la condition (1) ne suffit pas pour que l'on puisse dire, quand elle est vérifiée, que le module de la somme est égal à la somme des modules. Nous reviendrons tout à l'heure sur ce point, mais nous voulons d'abord achever la démonstration du théorème qui nous occupe et considérer le cas général, celui où l'on compare le module d'une somme de n expressions imaginaires avec la somme des modules de ces expressions.

Soit

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + U_n,$$

$U_1, U_2, \dots U_n$ désignant des expressions imaginaires. On peut poser

$$V = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1},$$

On a alors

$$U = V + U_n.$$

Le théorème précédent donne

$$(1)\quad \text{Mod}\,U \leqslant \text{Mod}\,V + \text{Mod}\,U_n.$$

D'ailleurs le théorème en question, étant supposé vrai pour $(n-1)$ expressions imaginaires, on a

$$(2)\quad \text{Mod}\,V \leqslant \text{Mod}\,U_1 + \text{Mod}\,U_2 + \ldots + \text{Mod}\,U_{n-1}.$$

En combinant (1) et (2), il vient

$$\text{Mod}\,U \leqslant \text{Mod}\,U_1 + \text{Mod}\,U_2 + \ldots + \text{Mod}\,U_n.$$

Le théorème est donc général.

139. Théorème X. *Le module d'une différence est plus grand que la différence des modules ou tout au moins égal à cette différence.*

Soit

$$(1)\quad U = U_1 - U_2$$

Je dis que l'on a

$$\text{Mod}\,U \geqslant \text{Mod}\,U_1 - \text{Mod}\,U_2.$$

En effet de l'égalité (1) on déduit

$$U_1 = U + U_2,$$

Le théorème précédent donne donc

$$\text{Mod}\,U_1 \leqslant \text{Mod}\,U + \text{Mod}\,U_2$$

ou

$$\text{Mod}\,U \geqslant \text{Mod}\,U_1 - \text{Mod}\,U_2.$$

140. Remarque. Lorsque l'on suppose

$$(1)\quad a_1b_2 - b_1a_2 = 0,$$

les théorèmes IX et X montrent que l'inégalité qui a lieu dans le cas général, se transforme dans ce cas particulier en une égalité.

Le module de U est alors égal, ou à la somme, ou à la différence des modules des expressions imaginaires U_1 et U_2. L'objet de la présente remarque est d'établir comment on peut distinguer, l'un de l'autre, ces deux cas particuliers.

Soient M_1 et M_2 les deux points qui correspondent aux imaginaires U_1 et U_2; l'égalité (1) prouve que ces points sont situés en ligne droite avec l'origine O. Supposons, pour fixer les idées $a_1 > 0$ et $b_1 > 0$; si a_2 est positif, b_2 est aussi positif, puisque $b_2 = \frac{b_1 a_2}{a_1}$; les points M_1 et M_2 sont situés du même côté par rapport à l'origine, et si l'on suit avec soin la démonstration du théorème IX, on voit qu'elle conduit à la conclusion : Mod U = Mod U_1 + Mod U_2. Mais supposons $a_2 < 0$: alors on a aussi $b_2 < 0$. Reportons-nous à la démonstration du théorème IX; le premier membre de l'inégalité (A) est alors essentiellement négatif; l'élévation au carré des deux membres de cette inégalité n'est plus permise et la conclusion précédente n'est plus exacte.

Dans ce cas les deux points M_1 et M_2 sont encore en ligne droite avec l'origine, mais ils sont situés de part et d'autre de ce point et le module de U est alors égal à la différence des modules de U_1 et de U_2 (1).

141. Théorème XI. *Pour qu'une fonction entière* f(x), *soit exactement divisible par* $(x - \mathrm{a} - \mathrm{b}i)$, *il est nécessaire et suffisant que la condition* $\mathrm{f}(\mathrm{a} + \mathrm{b}i) = 0$ *soit vérifiée.*

En effet, on peut toujours diviser $f(x)$ par $(x - a - bi)$ conformément à la règle de la division algébrique et en se conformant à la convention faite sur la lettre i. On obtient ainsi l'identité

$$(1) \quad f(x) = (x - a - bi)\varphi(x) + m + ni.$$

Dans cette identité, $\varphi(x)$ désigne une fonction entière et le

1. Ceci résulte aussi de l'identité évidente

$$\sqrt{a^2+b^2} - k\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2(1-k)^2 + b^2(1-k)^2}.$$

reste $(m+ni)$ est indépendant de x. Si l'on suppose d'abord $f(a+bi)=0$, l'identité précédente, quand on remplace x par $(a+bi)$ donne l'égalité

$$m+ni=0:$$

on a donc

$$m=0 \quad \text{et} \quad n=0;$$

par suite $f(x)$ est exactement divisible par $(x-a-bi)$. *Réciproquement*, si la division se fait exactement, si l'on suppose, par conséquent, $m=0$ et $n=0$; l'identité (1) prouve que pour $x=a+bi$, on a $f(a+bi)=0$.

EXERCICES

1. *Démontrer que l'expression* $\dfrac{a+bi}{a'+b'i}$ *représente un nombre réel quand on suppose* $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=0$.

2. *Déduire de la formule de Moivre les identités suivantes :*

$$\cos ma=\cos^m a-\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}a\sin^2 a+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}a\sin^4 a+\dots$$

$$\sin ma=\sin a\left[m\cos^{m-1}a-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}a\sin^2 a+\dots\right]$$

$$\operatorname{tg} ma=\frac{m\operatorname{tg} a-\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{tg}^3 a+\dots}{1-\dfrac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{tg}^2 a+\dots}$$

3. *Reconnaître l'identité suivante :*

$$\begin{vmatrix} a+bi & a+b & ai+b \\ a-bi & a-b & ai-b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=4ab$$

4. *Démontrer que l'on a,*

$$(i+\lambda_1)(i+\lambda_2)\dots(i+\lambda_p)\equiv(i)^p(1-\lambda_1 i)(1-\lambda_2 i)\dots(1-\lambda_p i).$$

Il suffit de remarquer l'identité évidente

$$i\equiv\frac{i+\lambda}{1-\lambda i}.$$

DOUZIÈME LEÇON

ÉQUATIONS ET TRINOMES DU SECOND DEGRÉ.

142. Lorsqu'on égale à zéro la fonction entière du second degré

$$\text{(A)} \quad ax^2 + 2bx + c = 0$$

on obtient l'équation générale du second degré; les coefficients sont réels ou imaginaires. Nous nous proposons de résoudre cette équation. Mais nous devons définir d'abord ce qu'il faut entendre par là.

D'une façon générale, et sans distinguer les solutions réelles et les solutions imaginaires, on peut dire que *résoudre une équation* $f(x) = 0$, ($f(x)$, représentant la fonction entière telle que l'a définie Cauchy, Lec. XI) *c'est trouver une expression de la forme* $(\alpha + \beta i)$, *telle que, étant substituée dans* $f(x)$, *cette fonction prenne la forme* $(P + Qi)$, *avec les conditions* $P = 0$, $Q = 0$.

143. Formules de résolution. Nous examinerons d'abord le cas où les coefficients a, b, c, sont réels et nous supposerons $a \neq 0$.

Posons

$$U = ax^2 + 2bx + c$$

on aura

$$aU = (ax + b)^2 - (b^2 - ac).$$

Cette forme donnée à l'équation $U = 0$ met en évidence l'importance de la valeur du nombre $t = b^2 - ac$; elle conduit à distinguer trois cas, suivant que t est positif, nul, ou négatif. Mais dans tous les cas on a

$$(1) \quad aU = (ax + b + \sqrt{t})(ax + b - \sqrt{t}).$$

Le trinôme U se trouve ainsi décomposé identiquement en facteurs du premier degré. Mais il faut ajouter que suivant les cas ces facteurs sont réels ou imaginaires. Dans l'hypothèse $t>0$ on a pour satisfaire à la condition $U = 0$ les deux valeurs réelles

$$\text{(B)} \quad x' = \frac{-b+\sqrt{t}}{a} \quad x'' = \frac{-b-\sqrt{t}}{a};$$

formules dans lesquelles on a posé $t = b^2 - ac$.

Si l'on suppose $t<0$, x' et x'' sont des expressions imaginaires; mais d'après l'identité (1), elles vérifient toujours l'équation $U = 0$

144. Cas des racines égales. Le cas où l'on suppose $t = 0$, mérite d'être particulièrement signalé ici.

Nous voulons faire remarquer que la condition $b^2 - ac = 0$, qui exprime que l'équation a ses deux racines égales, peut s'écrire aussi

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+c}{2} + b\right)$$

ou encore

$$1 = \left(\frac{2b}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2.$$

Cette remarque a son importance parce que dans certains exemples, notamment en géométrie analytique, il est utile de pouvoir écrire un résultat sous des formes algébriques différentes; chacune de ces formes, mettant en évidence certaines propriétés de la courbe que l'on étudie.

145. Relations entre les coefficients et les racines. Des formules (B) on déduit

$$x' + x'' = -\frac{2b}{a}, \quad x'x'' = \frac{c}{a};$$

et aussi

$$x' - x'' = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

De ces formules on peut tirer beaucoup d'autres relations; en particulier celles qui donnent la somme ou la différence des carrés, la somme ou la différence des cubes, etc.... des racines de l'équation, ou des inverses de ces racines. Nous indiquerons seulement ici la formule qui donne la somme des puissances p des racines de l'équation du second degré.

Posons d'abord

$$(1) \quad \lambda y = x$$

L'équation

$$(A') \quad ax^2 + bx + c = 0$$

devient

$$a\lambda^2y^2 + b\lambda y + c = 0$$

Si $\frac{c}{a}$ est positif, on pourra poser (2) $\lambda = \sqrt{\frac{c}{a}}$; soit aussi posé (3) $\frac{b\lambda}{c} = \beta$, l'équation (A′) devient

$$y^2 - \beta y + 1 = 0.$$

Soient y' et y'' les racines de cette équation et soit

$$U_p = y'^p + y''^p.$$

On a d'ailleurs

$$(4) \quad y'^p - \beta y'^{p-1} + y'^{p-2} = 0$$
$$(5) \quad y''^p - \beta y''^{p-1} + y''^{p-2} = 0.$$

relations qui se déduisent des égalités

$$y'^2 - \beta y' + 1 = 0$$
$$y''^2 - \beta y'' + 1 = 0.$$

en les multipliant respectivement par y'^{p-2} et y''^{p-2}.

Ajoutons (4) et (5) il vient

$$(\lambda) \quad U_p - \beta U_{p-1} + U_{p-2} = 0.$$

C'est la relation de récurrence entre trois fonctions U consécutives. Elle permet de calculer de proche en proche, par voie récurrente, les fonctions U_2, U_3, etc... connaissant les deux premiers termes de la suite : savoir.

$$U_0 = 2 \quad U_1 = \beta.$$

On trouve ainsi

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
U_2 &= \beta^2 - 2\\
U_3 &= \beta^3 - 3\beta\\
U_4 &= \beta^4 - 4\beta^2 + 2\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

146. Formule de Waring. Cette formule donne le développement de U_p suivant les puissances décroissantes de β.

Posons

$$U_p = \beta^p + A_p^1\beta^{p-2} + A_p^2\beta^{p-4} + \dots \quad (7)$$

L'égalité

$$U_p = \beta U_{p-1} - U_{p-2}.$$

prouve d'abord que si U_{p-2} est un polynôme entier ne renfermant que les puissances $(p-2)$, $(p-4)$ etc... de β; U_{p-1} un autre polynôme entier ne renfermant que les puissances $(p-1)$ $(p-3)$, etc... de β; U_p sera lui aussi un polynôme entier en β, ne renfermant que les puissances p, $p-2$, etc .. de la lettre β. Cette loi étant vraie pour les deux premières fonctions U_0 et U_1, est donc générale.

On peut remarquer que la formule (λ) donne

$$A_p^1 = -1 + A_{p-1}^1.$$

En supposant $A_{p-1}^1 = -(p-1)$; hypothèse permise parce que cette loi se vérifie pour les premières fonctions U; on en déduit

$$A_p^1 = -p.$$

Nous allons maintenant déterminer le coefficient A_p^2. On a, d'après (λ) et (7),

$$A_p^2 = A_{p-1}^2 - A_{p-2}^1$$

ou

$$A_p^2 = A_{p-1}^2 + (p-2).$$

Changeons p en $(p-1)$, puis p en $(p-2)$, etc....; on a successivement

$$A^2_{p-1} = A^2_{p-2} + (p-3)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$A^2_5 = A^2_4 + 3.$$

On a d'ailleurs $A^2_4 = 2$. Ajoutons ces égalités, il vient

$$A^2_p = [2 + 3 + \ldots + (p-2)] = [1 + 2 + \ldots + (p-2)] - 1,$$

ou

$$A^2_p = \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} - 1 = \frac{(p-2)(p-3)}{1.2} + \frac{(p-3)}{1}$$

On trouve, de même

$$-A^3_p = \frac{(p-3)(p-4)(p-5)}{1.2.3} + \frac{(p-4)(p-5)}{1.2}.$$

On peut alors soupçonner la loi suivie par les coefficients et nous allons montrer qu'on a généralement

$$\text{(C)} \quad A^k_p = (-1)^k \frac{(p-k)(p-k-1)\ldots(p-2k+1)}{k!} + (-1)^k \frac{(p-k-1)\ldots(p-2k+1)}{(k-1)!}$$

ou, plus simplement,

$$A^k_p = (-1)^k p \frac{(p-k-1)\ldots(p-2k+1)}{k!}.$$

Remarquons d'abord que les derniers coefficients sont donnés par les formules

$$A^{2i-1}_{4i} = +2$$

$$A^{2i}_{4i+1} = 4i + 1$$

$$A^{2i}_{4i+2} = -2$$

$$A^{2i+1}_{4i+3} = -(4i+3)$$

Ces relations se vérifient sur les premières fonctions U, qui font précisément soupçonner cette loi. On les généralise sans difficulté au moyen de la formule (λ)

Ceci posé, (λ) donne, en égalant, de part et d'autre, les coefficients de β^{p-2k}.

$$A_p^k = A_{p-1}^k - A_{p-2}^{k-1}.$$

Nous supposerons $k = 2i$, pour fixer les idées, et, par le changement successif de p en $(p-1)$, nous déduirons de l'égalité précédente une suite d'égalités dont la dernière sera

$$A_{4i+2}^{2i} = A_{4i+1}^{2i} - A_{4i}^{2i-1}$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$A_{4i+1}^{2i} = 4i + 1 = 2k + 1,$$

et ajoutant ces égalités, membre à membre, il vient

$$A_p^k = 2k + 1 - \left(A_{p-2}^{k-1} + A_{p-3}^{k-1} + \dots + A_{2k}^{k-1}\right).$$

La formule (C) est supposée vraie pour les nombres A_x^{k-1}. On a donc

$$A_p^k = 2k + 1 + \frac{3.4\ldots(k+1) + \ldots + (p-2k+1)\ldots(p-k-1)}{(k-1)!}$$
$$+ \frac{3.4\ldots k + \ldots + (p-2k+1)\ldots(p-k-2)}{(k-2)!}.$$

Appliquons au second membre l'identité d'Euler (§ 9), on a

$$A_p^k = 2k + 1 + \frac{(p-k)\ldots(p-2k+1) - 2.3\ldots(k+1)}{(k-1)!\,k}$$
$$+ \frac{(p-k-1)\ldots(p-2k+1) - 2.3\ldots k}{(k-2)!\,(k-1)};$$

ou, en réduisant

$$A_p^k = p\,\frac{(p-k-1)\ldots(p-2k+1)}{k!}.$$

La formule de Waring se trouve ainsi établie.

147. Remarque. Nous avons supposé plus haut, pour effectuer la transformation de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

et lui substituer l'équation

$$y^2 - \beta y + 1 = 0$$

$\frac{c}{a} > 0$; si l'on a $\frac{c}{a} < 0$ on pose

$$a\lambda^2 = -c, \quad \frac{b\lambda}{c} = \beta.$$

L'équation devient alors

$$y^2 - \beta y - 1 = 0.$$

Le calcul précédent peut être effectué et il n'y a d'autre modification à la formule de Waring que le changement des termes négatifs en termes positifs.

148. Cas où *a* tend vers zéro. Il peut arriver que les coefficients a, b, c renfermant un ou plusieurs paramètres variables, α, β, γ... et que, pour certaines valeurs de ces coefficients, a prenne la valeur zéro. Dans l'hypothèse $a = 0$ les formules (B) donnent $x' = \frac{0}{0}$, $x'' = \frac{-2b}{0}$.

L'indétermination de x' n'est qu'apparente. Les formules (B), par une transformation évidente, peuvent s'écrire

$$x' = \frac{-c}{b + \sqrt{t}} \quad x'' = \frac{-c}{b - \sqrt{t}}.$$

On voit alors que dans l'hypothèse $a = 0$ on a $x' = -\frac{c}{2b}$.
D'autre part, si l'on suppose que a tende vers zéro, la valeur de x'' croît au delà de toute limite.

C'est ce que montre encore l'équation proposée mise sous la forme

$$\frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=-a \quad (8)$$

Si l'on suppose que a tende vers zéro il y a deux façons de choisir x en satisfaisant à la condition précédente : on peut admettre, en effet, que x prenne la valeur qui annule le second facteur $x=-\frac{c}{b}$; ou bien que x croisse au delà de toute limite *mais avec un signe bien déterminé, si la variation de* a *est elle-même bien définie,* c'est-à-dire si l'on sait que a tend vers zéro, en conservant toujours le signe +, ou toujours le signe —.

149. Examen du cas où a et b tendent vers zéro. Les formules (B) dans lesquelles on suppose $c \neq 0$, prennent l'une et l'autre la forme $\frac{m}{0}$; ainsi les deux racines croissent sans limite. C'est aussi ce qu'indique l'équation proposée, écrite sous la forme (8).

Enfin si *les trois coefficients* a, b, c, *tendent simultanément vers zéro*, les formules donnent des valeurs indéterminées pour x' et x''. Il est évident en effet, qu'à la limite, tous les nombres imaginables satisfont à l'équation.

150. Condition nécessaire et suffisante pour que deux équations du second degré admettent une racine commune.

Soient les deux équations

$$(9) \quad \begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ a'x^2+b'x+c'=0 \end{cases}$$

1° Supposons d'abord $ab'-ba' \neq 0$, et considérons x^2 et x comme des inconnues distinctes : les valeurs de x^2 et de x qui vérifient simultanément ces deux équations sont

$$(10) \quad \begin{cases} x^2=\dfrac{bc'-cb'}{ab'-ba'} \\ x=\dfrac{ca'-ac'}{ab'-ba'} \end{cases}$$

et il n'y a pas d'autres valeurs de x vérifiant ces deux équations.

Si les deux équations admettent la racine commune x', on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'^2 = \dfrac{bc' - cb'}{ab' - ba'} \\ x' = \dfrac{ca' - ac'}{ab' - ba'} \end{array} \right.$$

Ainsi la condition est

$$\text{(D)} \quad (ca' - ac')^2 = (bc' - cb')(ab' - ba').$$

Elle a été obtenue en écrivant que le carré de x' soit égal à la valeur de x'^2.

Réciproquement, si cette condition est remplie la valeur $x = \dfrac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$, est une racine commune aux équations (9).

2° Soit $ab' - ba' = 0$: ceci peut arriver quand a et a', étant fonctions d'un même paramètre, tendent simultanément vers zéro ; dans ce cas les deux équations ont une racine commune infinie, et d'ailleurs la condition (D) est vérifiée. Si a et a' ne sont pas nuls à la fois, supposons $a \neq 0$.

De $ab' - ba' = 0$, on tire $b' = \dfrac{ba'}{a}$. Portons cette valeur dans la seconde équation, elle devient :

$$\frac{a'}{a}(ax^2 + bx) + c' = 0.$$

Soit x' une racine commune, on a

$$ax'^2 + bx' = -c,$$

par suite

$$-\frac{a'}{a}c + c' = 0,$$

ou enfin

$$ac' - ca' = 0.$$

Or la condition (D) se réduit à $ac' - ca' = 0$, lorsque l'on a

$$ab' - ba' = 0.$$

En résumé la condition (D) est générale.

151. La relation précédente est souvent employée; notamment dans les questions de géométrie analytique lorsque l'on veut éliminer un paramètre variable λ, entre les deux relations.

$$P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0$$
$$P'\lambda^2 + Q'\lambda + R' = 0$$

Le résultat de l'élimination est

$$(PR' - RP')^2 = (PQ' - QP')(QR' - RQ').$$

On l'écrit immédiatement, en appliquant la règle suivante : *Ayant formé le tableau suivant, avec les coefficients donnés,*

$$\left\| \begin{matrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \end{matrix} \right\|$$

si l'on prend, successivement, deux colonnes de ce tableau rectangulaire on obtient trois déterminants, lesquels sont en progression géométrique ; le terme moyen étant celui qu'on a obtenu en supprimant la colonne du milieu.

La relation précédente peut encore s'écrire :

$$(QQ' - 2PR' - 2RP')^2 = (Q^2 - 4PR)(Q'^2 - 4P'R').$$

Cette autre forme est, en général, plus compliquée que la première : pourtant, dans certains cas, il peut être utile de la connaître et de l'appliquer. On verra, en effet, en géométrie analytique qu'il importe à l'étude et à la construction d'une courbe, de pouvoir écrire son équation sous des formes diverses, mais identiques; les formes précédentes peuvent, pour ce motif, être l'une et l'autre utilisées dans l'étude et la construction des courbes :

152. Décomposition du trinôme du second degré. Nous avons déjà fait remarquer que l'identité (1) résout, tout à la fois, le problème de la décomposition du trinôme en facteurs, réels ou imaginaires, du premier degré et celui qui a pour but de chercher les racines, réelles ou imaginaires, a l'équation du second degré. Si l'on désigne, comme nous l'avons fait plus haut, par x' et x'' ces racines, on a

$$ax^2 + 2bx + c \equiv a(x - x')(x - x'').$$

La décomposition précédente est d'un usage constant dans la discussion des problèmes du second degré. Mais cette discussion se trouve ordinairement simplifiée quand on lui applique les théorèmes suivants, qui sont d'ailleurs une conséquence immédiate de cette décomposition.

153. Théorème. *Étant donnée une équation du second degré* $f(x) = 0$ *à coefficients réels si l'on substitue à* x *les nombres* α, β; 1° *si* $f(\alpha)$ *et* $f(\beta)$ *sont de signes contraires, l'équation a deux racines réelles et l'une de ces racines est comprise entre* α *et* β. 2° *Si* $f(\alpha)$ *et* $f(\beta)$ *ont le même signe, il y a entre* α *et* β *deux racines de l'équation, ou il n'y en a aucune.*

En effet, on a dans ce cas l'identité :

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

Elle prouve que, en supposant $a > 0$, et $x' < x''$, tout nombre inférieur à x', ou supérieur à x'', substitué à x donne un résultat positif. Au contraire le nombre substitué donne un résultat négatif, s'il est compris entre x' et x''.

Cette remarque faite, si l'on suppose d'abord $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ de signes contraires on peut donc dire que l'un de ces nombres, α ou β, est compris dans l'intervalle qui sépare x' et x''; l'autre, étant situé hors de cet intervalle. Il y a donc une racine unique entre α et β.

Supposons maintenant $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ de même signe. On doit distinguer deux cas. Dans une première hypothèse on peut supposer α et β situés dans l'intervalle x' x''; il n'y a alors aucune racine entre α et β: dans une seconde hypothèse on peut admettre que α et β sont situés, l'un et l'autre, hors de l'intervalle x', x'' : les deux racines x' et x'' sont alors situées dans l'intervalle α, β.

154. Théorème. *Soit* $f(x) = ax^2 + 2bx + c = 0$ *une équation du second degré à coefficients réels; si l'on suppose* $t = b^2 - ac < 0$, *les deux nombres* $f(\alpha)$ *et* $f(\beta)$, *ont, quels que soient* α *et* β, *toujours le même signe, savoir celui de* a.

L'identité

$$a(ax^2+2bx+c)=(ax+b)^2-t$$

prouve que si t est négatif, comme nous le supposons, le second nombre est toujours positif.

Ainsi on a *quel que soit* x.

$$af(x)>0.$$

Si l'on suppose $a>0$ on a donc *quel que soit* x, $f(x)>0$. De même si $a<0$ on doit avoir, pour toutes les valeurs de x, $f(x)<0$. Dans tous les cas $f(x)$ a un signe toujours le même, ce signe étant celui du coefficient a.

155. Théorème. *Lorsque dans l'équation du second degré* $f(x)=0$ *on substitue à x un nombre très grand, ou seulement supérieur à la plus grande des deux racines, le résultat obtenu a le même signe que celui du premier coefficient.*

Si les racines de $f(x)=0$ sont imaginaires, nous venons de reconnaitre que le signe de $f(x)$ était constamment le même que celui de a. Supposons maintenant que les racines soient réelles, l'identité

$$f(x)=a(x-x')(x-x'')$$

prouve que, pour toute valeur de x supérieure à la plus grande des deux racines, $f(x)$ a le même signe que a.

EXERCICES

1. *On considère la fonction*

$$U_p=\frac{y'^p-\frac{1}{y'^p}}{y'-\frac{1}{y'}};$$

on propose de démontrer que si l'on pose

$$y'+\frac{1}{y'}=\beta,$$

on a :

$$U_p = \beta^p - (p-2)\beta^{p-2} + \frac{(p-3)(p-4)}{1 \cdot 2}\beta^{p-4} - \frac{(p-4)(p-5)(p-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\beta^{p-6}$$
$$+ \ldots + H.$$

le dernier terme H *étant égal :*

1° *A la moitié de l'indice* p *prise avec le signe —, si* p *est un multiple de* 4 ;

2° *A* (+1) *si l'indice est un multiple de* 4+1 ;

3° *A la moitié de l'indice* p *si celui-ci est un multiple de* 4, + 2 ;

4° *Ou enfin à* (−1) *si l'indice* p *est un multiple de* 4, + 3.

On remarque d'abord que les fonctions U_p satisfont à la loi de récurrence,

$$U_p - \beta U_{p-1} + U_{p-2} = 0$$

avec les conditions initiales $U_0 = 0$ $U_1 = 1$.

On peut ainsi calculer U_2, U_3,... et l'on trouve la formule proposée en suivant la marche adoptée pour établir la formule de Waring.

2. *Calculer* $\dfrac{\sin pb}{\sin b}$ *et* $\cos pb$, *en fonction de* $\cos b$ *seulement.*

1° La formule

$$\sin pb + \sin(p-2)b = 2\cos b \sin(p-1)b$$

donne en posant :

$$U_p = \frac{\sin pb}{\sin b} \quad \text{et} \quad 2\cos b = \beta$$

$$U_p - \beta U_{p-1} + U_{p-2} = 0; \text{ avec } \quad U_0 = 0, \quad U_1 = 1.$$

2° De même, en partant de la formule

$$\cos pb + \cos(p-2)b = 2\cos b \cos(p-1)b$$

et en posant

$$2\cos pb = V_p$$
$$2\cos b = \beta,$$

on a :

$$V_p - \beta V_{p-1} + V_{p-2} = 0$$

avec les conditions initiales

$$V_0 = 2, \quad V_1 = \beta,$$

etc...

3. *Démontrer que si l'on considère l'équation*

$$x^2 + px + q = 0.$$

dont les racines sont a et b; *si l'on pose :*

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} \quad V_n = a^n + b^n.$$

ces fonctions U_n, V_n, *nommées par M. Edouard Lucas* **fonctions numériques simplement périodiques**, *jouissent, entre autres, des propriétés suivantes :*

$$U_n - pU_{n-1} + qU_{n-2} = 0$$
$$V_n - pV_{n-1} + qV_{n-2} = 0$$
$$V_n - pU_n + 2qU_{n-1} = 0$$
$$2U_{2n-1} = V_nU_{n-1} + U_nV_{n-1}$$
$$U_{2n} = U_nV_n$$
$$U_n^2 - pU_nU_{n-1} + qU_{n-1}^2 = q^{n-1}$$
$$V_nU_{n-1} - U_nV_{n-1} + 2q^{n-1} = 0$$

et en posant

$$\begin{cases} \delta = a - b \\ \Delta = \delta^2 \end{cases}$$

$$2^{n-1}U_n = \frac{n}{1}p^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}p^{n-3}\Delta + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1.2.3.4.5}\Delta^2 + \ldots$$

$$2^{n-1}V_n = p^n + \frac{n(n-1)}{1\ 2}p^{n-2}\Delta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}p^{n-4}\Delta^2 + \ldots$$

Ces formules se vérifient facilement; les deux dernières peuvent s'établir en remarquant que l'on a, $2a = p + \delta$, et $2b = p - \delta$.

On élève ces égalités à la puissance n; puis après avoir développé les seconds membres par la formule de Newton, on ajoute et on retranche les deux égalités ainsi obtenues.

4. *Démontrer que l'on a*

$$\left(U_\alpha - aU_{\alpha-1}\right)\left(U_\beta - aU_{\beta-1}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \left(U_\lambda - aU_{\lambda-1}\right)$$
$$= U_{\alpha+\beta+\ldots+\lambda-t+1} - aU_{\alpha+\beta+\ldots+\lambda-t}\;.$$

t *désignant le nombre des lettres* α, β, ... λ.

On appliquera la remarque suivante :

$$U_\alpha - aU_{\alpha-1} = b^{\alpha-1}.$$

TREIZIÈME LEÇON

ÉQUATIONS BICARRÉES. — ÉQUATIONS QUADRATIQUES.

156. Avant de résoudre l'équation générale du second degré à coefficients imaginaires nous rappellerons rapidement la résolution de l'équation bicarrée à coefficients réels

$$ax^4 + 2bx^2 + c = 0.$$

On sait comment, en posant $x^2 = y$, on ramène cette résolution à celle de trois équations du second degré.

$$(1) \quad ay^2 + 2by + c = 0$$
$$x^2 - y' = 0$$
$$x^2 - y'' = 0$$

y' et y'' étant les racines de l'équation (1). Mais on peut aussi effectuer cette résolution directement, et trouver immédiatement les racines sous la forme $(a + bi)$, en s'appuyant sur le théorème suivant.

157. Théorème. *Le trinôme bicarré* U,

$$U = ax^4 + 2bx^2 + c$$

peut toujours être décomposé en deux facteurs réels du second degré.

Nous distinguerons deux cas suivant que la quantité t,

$$t = b^2 - ac$$

est positive ou négative.

Premier cas ($t > 0$). On a

$$aU = (ax^2 + b)^2 - t$$

ou

$$aU = (ax^2 + b + \sqrt{t})(ax^2 + b - \sqrt{t});$$

la décomposition est donc effectuée.

Deuxième cas ($t < 0$). On a

$$aU = (a^2x^4 + ac) + 2abx^2$$

ou

$$aU = (ax^2 + \sqrt{ac})^2 - 2a(\sqrt{ac} - b)x^2.$$

Il faut remarquer que l'hypothèse $b^2 - ac < 0$ entraîne nécessairement la condition $ac < 0$: on voit aussi que le coefficient $\sqrt{ac} - b$ est positif. Ceci est évidemment vrai quand on suppose $b < 0$, le radical étant pris, expressément, avec le signe $+$; quand b est positif, l'inégalité $b^2 < ac$ donne $b < \sqrt{ac}$. On peut d'ailleurs supposer $a > 0$; car si l'on avait $a < 0$ on décomposerait le trinôme $(-U)$. Ainsi aU, est mis sous la forme d'une différence de deux carrés, et l'on a finalement

$$aU = \left\{ ax^2 + x\sqrt{2a(\sqrt{ac} - b)} + \sqrt{ac} \right\}$$
$$\left\{ ax^2 - x\sqrt{2a(\sqrt{ac} - b)} + \sqrt{ac} \right\}.$$

Dans la pratique on voit que, pour effectuer la décomposition du trinôme bicarré en facteurs réels du second degré, on associe le premier et le second terme dans le cas où l'on a $t > 0$; au contraire, le premier et le troisième terme, quand on suppose $t < 0$.

Exemples (*Premier cas*). Décomposer

$$U = x^4 - 5x + 6.$$

On a

$$U = \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = (x^2 - 2)(x^2 - 3).$$

(*Deuxième cas*). Décomposer

$$U = x^4 + 4.$$

On écrira

$$U = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$$

ou

$$U = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$

158. Résolution de l'équation du second degré à coefficients imaginaires.

Nous abordons maintenant l'étude de l'équation

$$(1) \quad (a + a'i)x^2 + (b + b'i)x + (c + c'i) = 0.$$

En multipliant les deux membres par $\frac{a - a'i}{a^2 + a'^2}$, cette équation prend la forme

$$(2) \quad x^2 + (p + p'i)x + q + q'i = 0$$

que nous allons considérer uniquement.

Soit $y + zi$ une racine de cette équation : on doit avoir

$$(y + zi)^2 + (p + p'i)(y + zi) + q + q'i = 0$$

ou, après calcul,

$$(3) \quad y^2 - z^2 + py - pz + q' = 0$$

$$(4) \quad yz + \frac{p'}{2}y + \frac{p}{2}z + \frac{q'}{2} = 0.$$

Telles sont les deux équations qu'il s'agit de résoudre. Il se présente ici, à propos de cette résolution, une légère difficulté qui tient à ce que la méthode ordinaire, celle qui consiste à tirer z de la seconde équation pour en porter la valeur dans la première, conduit à une équation complète du quatrième degré. On évite cette complication en dirigeant le calcul comme nous allons l'indiquer.

Les équations (3) et (4) peuvent s'écrire

$$\left(y+\frac{p}{2}\right)^2-\left(z+\frac{p'}{2}\right)^2=\frac{p^2-p'^2-4q}{4}$$

$$\left(y+\frac{p}{2}\right)\left(z+\frac{p'}{2}\right)=\frac{pp'-2q'}{4}.$$

On est ainsi conduit à poser

$$y+\frac{p}{2}=\mathrm{Y},\quad z+\frac{p'}{2}=\mathrm{Z},\quad \frac{p^2-p'^2-4q}{4}=h,\quad \frac{pp'-2q'}{4}=h',$$

les équations deviennent

$$\mathrm{Y}^2-\mathrm{Z}^2=h$$

$$\mathrm{YZ}=h'.$$

La méthode de substitution conduit alors à une équation bicarrée. Mais il est plus simple de remarquer que l'on déduit de ces deux équations, par combinaison,

$$\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2=\sqrt{h^2+4h'^2}.$$

On a donc, finalement, pour Y et pour Z deux valeurs

$$(5)\qquad \mathrm{Y}=\pm\sqrt{\frac{h+\sqrt{h^2+4h'^2}}{2}}$$

$$(6)\qquad \mathrm{Z}=\pm\sqrt{\frac{-h+\sqrt{h^2+4h'^2}}{2}}.$$

Ces valeurs de Y et de Z sont réelles parce que l'on a toujours

$$\sqrt{h^2+4h'^2}>h.$$

Si h' est positif on prendra le même signe pour Y et Z ; si h' est négatif on choisira des signes contraires, de façon à satisfaire toujours à la condition $\mathrm{YZ}=h'$. Désignons par Y_1 l'une des valeurs de Y, donnée par (5) ; à Y_1 correspond une valeur Z_1 donnée par (6), et une seule. De même à la valeur $-\mathrm{Y}_1$, cor-

respond la seule valeur $(-Z_1)$, et l'on a, finalement, pour les racines de l'équation proposée deux valeurs,

$$x_1 = Y_1 - \frac{p}{2} + \left(Z_1 - \frac{p'}{2}\right)i$$
$$x_2 = -Y_1 - \frac{p}{2} - \left(Z_1 + \frac{p'}{2}\right)i.$$

159. Racine carrée de $(a+bi)$. La racine carrée d'une expression imaginaire $(a + bi)$ est, par définition, une expression imaginaire $(y + zi)$, vérifiant l'égalité

$$(7) \quad (y+zi)^2 = a+bi.$$

Le problème que nous allons résoudre peut donc être considéré comme un cas particulier du précédent; savoir, le cas où l'on propose de résoudre l'équation

$$x^2 - a - bi = 0.$$

L'égalité (7) donne

$$y^2 - z^2 = a$$
$$2yz = b.$$

On retrouve ainsi les équations du paragraphe précédent. Le même calcul donne

$$y^2 + z^2 = \sqrt{a^2+b^2},$$

et l'on trouve, comme tout à l'heure,

$$y = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$
$$z = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Il y a deux valeurs réelles de y, et aussi deux valeurs réelles pour z. Mais à la valeur y_1 ne correspond pour z qu'une seule valeur z_1, le produit $y_1 z_1$ devant avoir un signe bien déterminé, celui de b. D'ailleurs à la valeur $(-y_1)$, correspond aussi la

seule valeur $(-z_1)$. La racine carrée de l'expression imaginaire a donc deux valeurs :

$$x_1 = y_1 + z_1 i$$
$$x_2 = -y_1 - z_1 i.$$

Comme la somme $x_1 + x_2$ est identique à zéro, on peut dire, pour rappeler ce fait, que les deux expressions imaginaires de la racine carrée de $a + bi$ sont égales et de signes contraires.

160. Théorème. *Une équation bicarrée admet quatre racines de la forme $(a + bi)$, lesquelles sont deux à deux égales et de signes contraires.*

L'équation considérée étant

$$ax^4 + 2bx^2 + c = 0,$$

si l'on pose, comme on le fait habituellement, $x^2 = y$ l'équation

$$ay^2 + 2by + c = o$$

admet deux racines $a' + b'i$, $a'' + b''i$; c'est ce que nous venons de démontrer. D'ailleurs on détermine x par les deux équations

$$x^2 = a' + b'i$$
$$x^2 = a'' + b''i.$$

Or on a vu, au paragraphe précédent, que chacune de ces équations admettait deux solutions égales et de signes contraires.

Le théorème en question se trouve ainsi établi.

161. Discussion de l'Équation bicarrée. Certains problèmes, et notamment, comme nous le verrons dans la géométrie analytique, la construction des courbes, donnent lieu, assez fréquemment, à des discussions portant sur une équation bicarrée $U = 0$

$$U \equiv ax^4 + 2bx^2 + c.$$

Nous supposerons $a > \sigma$; ceci est toujours possible. On

pourra, dans l'étude de cette équation, suivre la marche que nous allons indiquer. Ayant calculé la quantité t,

$$t = b^2 - ac,$$

on distinguera trois cas suivant que l'on supposera $t < 0$, $t = 0$ et $t > 0$

1. *Soit* $t < 0$. L'identité

$$aU = (ax^2 + b)^2 - t$$

prouve qu'aucun nombre réel ne peut satisfaire à l'équation $U = 0$; les qnatre racines sont imaginaires.

2. *Soit* $t = 0$. On a :

$$aU = (ax^2 + b)^2,$$

L'équation a donc quatre racines réelles, et différentes de zéro, si l'on a $b < 0$; quatre racines nulles, si b est nul; enfin quatre racines imaginaires si l'on suppose $b > 0$.

Il faut ajouter que, dans l'un et l'autre cas, ces racines x_1, x_2, x_3, x_4 coïncident deux à deux : on a $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$; et aussi $x_1 = -x_2$, $x_3 = -x_4$.

3. *Soit enfin* $t > 0$. L'équation

$$ay^2 + 2by + c = 0$$

obtenue en posant $x^2 = y$, a ses racines réelles; soient y', y'' ces racines. Si c est négatif, comme l'on a $y'y'' = \frac{c}{a}$, l'un des nombres y' ou y'' est positif, l'autre est négatif. L'équation bicarrée a deux racines réelles; les deux autres sont imaginaires. Si l'on suppose c positif, alors les racines y', y'' sont de même signe : elles sont positives si l'on a $b < 0$; négatives, au contraire, si l'on suppose $b > 0$. Dans la première hypothèse les quatre racines sont réelles; elles sont imaginaires dans l'autre cas.

On remarquera que si l'on suppose $c < 0$ il y a nécessairement deux racines réelles; les deux autres étant imaginaires.

Le tableau suivant résume cette discussion :

Équation bicarrée. — (Discussion).

$$ax^4 + 2bx^2 + c = 0 \quad a > 0$$
$$t = b^2 - ac$$

$t > 0$	$c < 0$	Deux racines réelles, les deux autres imaginaires.
	$c = 0$ Deux racines nulles	$b < 0$ Les deux autres racines sont réelles.
		$b > 0$ Les deux autres racines sont imaginaires.
	$c > 0$	$b < 0$ Les quatre racines sont réelles.
		$b > 0$ Les quatre racines sont imaginaires.
$t = 0$	$b < 0$	Quatre racines réelles deux à deux coïncidentes.
	$b = 0$	Quatre racines nulles.
	$b > 0$	Quatre racines imaginaires.
$t < 0$		Quatre racines imaginaires.

Équations quadratiques

162. Lorsqu'une équation, d'un degré supérieure à 2, peut se résoudre par la considération d'équations dont le degré est égal à 1, ou à 2, on dit que l'équation proposée est *quadratique*. Si à cette équation correspond un problème de géométrie, on pourra dire aussi que ce problème est quadratique. Nous verrons, en géométrie analytique, qu'un pareil problème jouit de cette propriété remarquable de pouvoir être résolu par la règle et le compas.

Les équations bicarrées, qui viennent de nous occuper, donnent un premier exemple d'équations quadratiques. Les équations réciproques du quatrième degré, dont nous allons maintenant parler, en fournissent un second exemple.

163. Équations réciproques du quatrième degré. Nous nommerons, en généralisant un peu la définition donnée ordinairement, *équations réciproques du quatrième degré* celles qui jouissent de cette propriété que *si* $f(x) = 0$ *désigne une pareille équation,* λ *et* k *étant des nombres déterminés, indépendants de* x*, on a identiquement*

$$f(x) = \lambda x^4 f\left(\frac{k}{x}\right).$$

Il résulte de cette définition que l'équation $f(x) = 0$ ne peut admettre la racine x' sans admettre nécessairement la racine $\frac{k}{x'}$. En effet si $f(x') = 0$, on a $\lambda x'^4 f\left(\frac{k}{x'}\right) = 0$, ou $f\left(\frac{k}{x'}\right) = 0$. Ainsi les racines peuvent se grouper deux à deux de telle façon que *le produit de ces deux nombres soit, pour l'un et l'autre groupe, égal à* k. Nous reviendrons plus tard sur les équations réciproques de degré quelconque. Nous nous bornerons pour le moment au cas particulier des équations du quatrième degré.

[7]. **Théorème**. *L'équation réciproque du quatrième degré est de la forme :*

$$(A) \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + bkx + ak^2 = 0.$$

En effet l'identité

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \equiv \lambda x^4 \left(\frac{ak^4}{x^4} + \frac{bk^3}{x^3} + \frac{ck^2}{x^2} + \frac{dk}{x} + e\right)$$

donne

$$(1) \quad a = \lambda e$$
$$(2) \quad b = \lambda dk$$
$$(3) \quad c = \lambda k^2 c$$
$$(4) \quad d = \lambda bk^3$$
$$(5) \quad e = \lambda ak^4.$$

Soit d'abord $c \neq 0$; l'égalité (3) donne $\lambda k^2 = 1$. On a, par suite

$$d = bk, \quad e = ak^2.$$

Les égalités (1) et (2) sont d'ailleurs vérifiées par ces valeurs.

Soit maintenant $c = 0$; comme on suppose a différent de zéro on a donc $\lambda e \neq 0$ et, par suite, $e \neq 0$. Les égalités (1) et (5) donnent, par combinaison,

$$1 = \lambda^2 k^4$$

c'est à dire,

$$\lambda k^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda k^2 = -1.$$

Dans la première hypothèse on retombe sur le cas précédent et sur l'équation (A). Il faut seulement signaler cette particularité que celle-ci ne renferme pas de terme du milieu. Mais si l'on prend la solution $\lambda k^2 = -1$ on trouve

$$d = -bk, \quad b = -ak^2.$$

L'équation proposée devient alors

$$ax^4 + bx^3 - bkx - ak^2 = 0$$

ou

$$(x^2 - k)(ax^2 + bx + ak) = 0.$$

Elle se décompose donc en deux équations du second degré.

En résumé, il n'y a qu'*un seul genre d'équations réciproques du quatrième degré*, équations dont la forme est celle qu'indique l'égalité (A).

164. Théorème II. *Pour que l'équation générale du quatrième degré*

$$\text{(B)} \quad Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

soit réciproque (sens général) ; *il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$B^2E = D^2A.$$

En effet, si l'on identifie (B), avec (A), on a

$$D = BK \quad \text{et} \quad K^2A = E.$$

En éliminant K, il vient

$$B^2E = D^2A.$$

Soit $B = 0$, on a $D^2A = 0$ et comme l'on suppose $A \neq 0$, et $D = 0$, on retombe sur l'équation bicarrée qui peut être considérée comme un cas particulier des équations réciproques du quatrième degré. Enfin si l'on suppose $B \neq 0$, on a bien

$$E = \frac{D^2A}{B^2}.$$

165. Théorème III. *On peut toujours amener l'équation réciproque du quatrième degré à la forme :*

$$\alpha^2 x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \gamma^2 = 0.$$

En effet, supposons $B \neq 0$: la forme trouvée ci-dessus est

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \frac{D^2 A}{B^2} = 0.$$

Changeons d'inconnue et soit $x = \frac{A}{B^2} X$; il vient

$$\frac{A^4}{B^6} X^4 + \frac{A^3}{B^3} X^3 + \frac{AC}{B^2} X^2 + DX + D^2 = 0 ;$$

ou, en posant,

$$\frac{A^2}{B^3} = \alpha, \quad \frac{AC}{B^2} = \beta, \quad D = \gamma ;$$

$$(1) \quad \alpha^2 X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \gamma^2 = 0.$$

C'est la forme des équations réciproques du quatrième degré, dans le sens général que nous avons donné à ce mot. Il est fait abstraction, bien entendu, du cas particulier déjà signalé, celui où $B = 0$. L'équation, dans cette hypothèse, est bicarrée. Nous avons, tout à l'heure, résolu et discuté ce genre d'équations et nous n'avons pas à y revenir.

166. Théorème IV. *L'équation réciproque est quadratique.*

Écrivons cette équation sous la forme :

$$\alpha^2 X^2 + \frac{\gamma^2}{X^2} + \alpha x + \frac{\gamma}{X} + \beta = 0,$$

et posons :

$$\alpha X + \frac{\gamma}{X} = y.$$

On a d'abord

$$\alpha^2 X^2 + \frac{\gamma^2}{X^2} = y^2 - 2\alpha\gamma$$

et l'on obtient, pour déterminer y, l'équation

$$(2) \quad y^2 + y + \beta - 2\alpha\gamma = 0.$$

Si l'on désigne par y', y'', les racines de cette équation, les inconnues cherchées sont les racines des deux équations :

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha X^2 - Xy' + \gamma = 0 \\ \alpha X^2 - Xy'' + \gamma = 0 \end{cases}$$

Le problème proposé se résout donc au moyen de trois équations du second degré.

167. Remarque. Dans la pratique, quand il s'agit de résoudre une équation réciproque, il n'est pas nécessaire d'effectuer la transformation précédente.

Reprenons en effet la première forme :

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \frac{D^2A}{B^2} = 0.$$

On peut écrire cette équation

$$\frac{A}{B^2}\left(B^2x^2 + \frac{D^2}{x^2}\right) + Bx + \frac{D}{x} + C = 0;$$

et en posant

$$Bx + \frac{D}{x} = y;$$

on voit, par un calcul tout semblable à celui que nous avons fait tout à l'heure, que l'équation proposée se résout par trois équations du second degré.

168. Exemple. *On propose de résoudre l'équation*

$$2x^4 - 15x^3 + 40x^2 - 45x + 18 = 0.$$

On vérifie d'abord que cette équation est réciproque. On a en effet,

$$B^2E = \overline{15}^2 \times 18$$
$$D^2A = \overline{45}^2 \times 2$$

et, par conséquent,

$$B^2E = D^2A.$$

Cette remarque faite, écrivons l'équation donnée sous la forme

$$2\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)-15\left(x+\frac{3}{x}\right)+40=0\,;$$

si nous posons

$$x+\frac{3}{x}=y,$$

nous obtenons

$$2y^2-15y+28=0.$$

On tire de cette équation les racines y', y'';

$$y'=4\quad y''=\frac{7}{2}.$$

Les valeurs de x sont alors données par les deux équations

$$\begin{cases} x^2-4x+3=0\\ 2x^2-7x+6=0.\end{cases}$$

On trouve finalement

$$x_1=1,\quad x_2=3,\quad x_3=2,\quad x_4=\frac{3}{2}.$$

169. Résolution directe de l'équation réciproque. On peut éviter, pour la résolution de l'équation réciproque, l'emploi d'une inconnue auxiliaire et décomposer immédiatement le premier membre en deux facteurs réels ou imaginaires du second degré, comme nous allons le montrer.

Soit

$$\varphi=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\frac{D^2A}{B^2}=0$$

l'équation proposée. En posant

$$U=B\,(B^3-4\,ABC+8\,A^2D)$$

on a

$$A\varphi = \left(Ax^2 + \frac{Bx}{2} + \frac{DA}{B}\right)^2 - U\frac{x^2}{4B^2}.$$

Si U est positif, la décomposition en deux facteurs réels du second degré est une conséquence immédiate de cette identité. Si U est égal à zéro, φ est un carré parfait. Enfin, si U est négatif on voit que φ n'a que des racines imaginaires. L'identité précédente permet, dans tous les cas, de résoudre directement l'équation réciproque.

170. Décomposition de l'équation réciproque en deux facteurs réels du second degré. En terminant cette étude de l'équation réciproque du quatrième degré, nous ferons voir qu'on peut toujours décomposer cette équation en deux facteurs réels du second degré. Nous verrons ultérieurement, et d'une façon générale, pourquoi cette décomposition est possible; nous voulons seulement montrer ici comment elle peut être faite sur l'équation que nous étudions. Conformément à une idée que nous développerons plus tard, en exposant la résolution de l'équation générale du quatrième degré, écrivons l'équation donnée $f = 0$, en supposant

$$f = \alpha^2 x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \gamma^2 = 0,$$

sous la forme

$$f = \left(\alpha x^2 + \frac{x}{2} + \lambda\right)^2 - \left(2\alpha\lambda - \beta + \frac{1}{4}\right)x^2 - (\lambda - \gamma)\,x - \lambda^2 + \gamma^2 = 0.$$

Disposons maintenant du paramètre λ au moyen de l'égalité suivante :

$$(1)\quad (\lambda - \gamma)^2 = 4\,(\lambda^2 - \gamma^2)\left(2\alpha\lambda - \beta + \frac{1}{4}\right).$$

On aura

$$f = P^2 - Q^2,$$

ou

$$f = P^2 + Q^2,$$

suivant le signe du coefficient $\left(2\alpha\lambda - \beta + \frac{1}{4}\right)$. On aperçoit d'abord la racine $\lambda = \gamma$ et cette racine conduit à la solution du paragraphe précédent. Mais on peut aussi déterminer λ par l'équation du second degré.

$$(2) \quad 2\alpha\lambda^2 + \lambda(2\alpha\gamma - \beta) + \frac{\gamma}{2}(1 - 2\beta) = 0.$$

Si $\lambda = \gamma$ n'a pas donné la décomposition cherchée, en deux facteurs réels du second degré, on peut être certain que l'une des racines de l'équation (2) permettra de mettre f, sous cette forme algébrique.

En effet, l'équation (1) après suppression de la racine γ s'écrit :

$$4(\lambda + \gamma)\left(2\alpha\lambda - \beta + \frac{1}{4}\right) - (\lambda - \gamma) = 0.$$

Or si l'on suppose $2\alpha\gamma - \beta + \frac{1}{4} < 0$, en substituant dans cette égalité $\lambda = \dfrac{\beta - \frac{1}{4}}{2\alpha}$, et $\pm\infty$, on a des résultats de signes contraires. Il y a donc une racine plus grande que $\dfrac{\beta - \frac{1}{4}}{2\alpha}$, et une autre plus petite que $\dfrac{\beta - \frac{1}{4}}{2\alpha}$. Suivant le signe de α, l'une ou l'autre de ces racines rendra positif $2\alpha\lambda - \beta + \frac{1}{4}$.

171. Méthode pour reconnaître qu'une équation donnée est quadratique. Nous voulons faire connaître ici un procédé élémentaire, souvent commode, pour décomposer le premier membre d'une équation quadratique. Ce procédé consiste à considérer particulièrement un paramètre α de l'équation donnée, lorsque ce paramètre entre dans celle-ci au second degré.

L'équation proposée peut dans ce cas se mettre sous la forme,

$$Px^2 + Qx + R = 0.$$

S'il arrive que la fonction $Q^2 - 4PR$ soit *le carré parfait d'une fonction rationnelle* φ; si l'on suppose que l'on ait

$$\varphi^2 = Q^2 - 4PR,$$

on pourra former l'identité suivante

$$(1) \quad P\alpha^2 + Q\alpha + R = P\left(\alpha + \frac{Q+\varphi}{2P}\right)\left(\alpha + \frac{Q-\varphi}{2P}\right).$$

La résolution proposée est ainsi ramenée à celle des *deux équations rationnelles*

$$\begin{cases} 2P\alpha + Q + \varphi = 0 \\ 2P\alpha + Q - \varphi = 0 \end{cases}$$

qui sont, en général, d'un degré plus faible que celui de l'équation donnée.

Nous allons montrer, sur un exemple, une application de cette idée. On remarquera que la méthode précédente s'applique aussi aux équations bicarrées en α et, généralement, à toutes les équations résolubles rationnellement par rapport à un paramètre.

172. Application. *Résoudre et discuter l'équation* $\varphi = 0$,

$$\varphi = S^3 - (4m^2 + 3)S^2 + 4m^2(m^2 + 2)S - 4(m^4 - 1) \text{ [1]}$$

Le premier membre de cette équation peut être considéré comme un trinôme bicarré en m, et on peut l'écrire

$$4m^4(S - 1) + 4m^2S(2 - S) + S^3 - 3S^2 + 4 = 0.$$

Si l'on cherche à résoudre cette équation par rapport à m^2 on trouve, pour la quantité soumise au radical,

$$4[S^2(2 - S)^2 - (S - 1)(S^3 - 3S^2 + 4)] = 4(S - 2)^2.$$

1. On rencontre cette équation lorsque l'on discute la surface

$$x^2 + (2m^2+1)(y^2+z^2) - 2(zy + zx + xy) = 2m^2 - 3m + 1.$$

(*École Polytechnique*, 1858.)

La méthode s'applique donc à l'exemple proposé ; on trouve finalement

$$\varphi = (S - 2m^2 - 2)\,[S^2 - (1 + 2m^2)\,S + 2\,(m^2 - 1)].$$

On discute alors, sans difficulté, l'équation donnée.

EXERCICES

1. ***Établir la discussion suivante :***

Soit l'équation réciproque (sens général) ;

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F = 0$$

En supposant

$$(1) \quad \frac{A}{F} = \frac{B^2}{D^2} \quad \text{et} \quad B \neq 0$$

et en posant

$$U = B\,(B^3 - 4ABC + 8A^2D$$
$$V = (BC + 2AD)^2 - 4B^3D$$
$$W = B\,(B^3 + 2AC - 4A^2D)$$

on propose de démontrer les résultats suivants.

- $U > 0$
  - $V < 0$: Deux racines réelles, les deux autres imaginaires.
  - $V > 0$
    - $W > 0$: Quatre racines réelles.
    - $W < 0$: Quatre racines imaginaires.
  - $V = 0$
    - $W < 0$: Quatre racines réelles, mais deux coïncidentes.
    - $W < 0$: Deux racines réelles égales, les deux autres imaginaires et inégales.
- $U < 0$: Les quatre racines sont imaginaires.
- $U = 0$
  - $B\,(B^3 - 16A^2D) > 0$: Quatre racines réelles, deux à deux coïncidentes.
  - $B\,(B^3 - 16A^2D) < 0$: Quatre racines imaginaires, deux à deux coïncidentes.
  - $B\,(B^3 - 16A^2D) = 0$: Quatre racines réelles et égales.

2. *On considère l'équation*

$$x^4 + qx^2 + rx + s = 0$$

et après avoir posé x = y + h *on demande de déterminer* h *de façon que l'équation en* y *soit réciproque* (dans le sens général donné à ce mot).

(Todhunter.)

L'équation en y est :

$$y^4 + 4hy^3 + (6h^2 + q)y^2 + (4h^3 + 2qh + r)y + h^4 + qh^2 + rh + s = 0$$

si on applique, à cette équation, la condition (1), on trouve :

$$8h^3r + 4h^2(4s - q^2) - 4hqr - r^2 = 0$$

On peut ainsi ramener la résolution de l'équation du quatrième degré à celle d'une équation du troisième degré et de deux équations du second degré.

3. *Résoudre l'équation* U = 0,

$$U \equiv (x + p)(x + p + 1)(x + p + 2)(x + p + 3) - (x + q)(x + q + 1)(x + q + 2)(x + q + 3).$$

On sait que l'on a

$$(x + \alpha)(x + \alpha + 1)(x + \alpha + 2)(x + \alpha + 3) + 1 \equiv [(x + \alpha)^2 + 3(x + \alpha) + 1]^2,$$

en appliquant cette formule, U se décompose en deux facteurs, dont l'un est du premier degré et donne la racine x_1,

$$x_1 = -\frac{p + q + 3}{2}.$$

On examinera ensuite l'équation du second degré

$$2x^2 + 2x(p + q + 3) + p^2 + q^2 + 3p + 3q + 2 = 0$$

qui donne les deux autres racines.

Le cas particulier où $p - q = 1$; celui où $p - q = 2$, donnent des nombres commensurables; et si p et q désignent des nombres entiers différents, il n'y a pas de racines réelles, en dehors de ces deux cas.

4. *Résoudre l'équation* U = 0

$$U \equiv (x + \alpha)(x + \alpha + 1)(x + \alpha + 2)(x + \alpha + 3) + h$$

On pourra considérer encore l'identité de l'exercice précédent et l'on distinguera les trois cas suivants :

$$h > 1, \quad h = 1, \quad h < 1.$$

On constatera que dans le premier cas les quatre racines sont imaginaires; deux à deux coïncidentes si $h = 1$; enfin toujours réelles et distinctes si l'on suppose $h < 1$.

5. *Résoudre l'équation*

$$x(x+\alpha)(x+\beta)(x+\alpha+\beta)+h=0$$

et montrer 1° *que si l'on suppose* $h > \frac{\alpha^2\beta^2}{4}$, *les racines sont imaginaires;* 2° *dans le cas où* $h = \frac{\alpha^2\beta^2}{4}$ *les racines sont deux à deux coïncidentes et réelles;* 3° *enfin si l'on a* $h < \frac{\alpha^2\beta^2}{4}$, *il y a toujours deux racines réelles.*

6. *Résoudre l'équation*

$$h(x+h)(2x+h)(3x+h)-h'(x+h')(2x+h')(3x+h')=0$$

on ajoute et on retranche x^4 et on utilise l'identité

$$h(x+h)(2x+h)(3x+h)+x^4 \equiv (x^2+3hx+h^2)^2.$$

7. *Démontrer que si l'équation*

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

a quatre racines x_1, x_2, x_3, x_4, *telles que* $x_1+x_2=x_3+x_4$ *les coefficients satisfont à la condition*

$$8r+p(p^2-4q)=0.$$

Cette relation étant accordée, on propose de résoudre l'équation.

8. *Résoudre l'équation*

$$x^3-3abx+a^3b^3=0$$

on appliquera l'identité

$$a^3+b^3+c^3-3abc \equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

9. *Résoudre l'équation*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\alpha}+\frac{1}{x+\beta}+\frac{1}{x+\alpha+\beta}=0$$

et montrer que les trois racines sont des nombres commensurables quand $\alpha^2+\beta^2$ *est un carré parfait.*

10. *Soit* $f(x)=0$ *une équation bicarrée, si* α *et* β *sont deux nombres de même signe et si l'on a* $f(\alpha)f(\beta)<0$, *démontrer qu'il y a une seule racine de l'équation, entre* α *et* β.

QUATORZIÈME LEÇON

TRANSFORMATION DES EXPRESSIONS IRRATIONNELLES.

173. Une expression irrationnelle donnée peut, dans certains cas, se mettre sous une forme différente, mais plus simple, ou mieux appropriée au calcul approximatif qu'elle comporte. Notamment les expressions de la forme $x=\frac{U}{V}$, dans lesquelles V désigne une quantité irrationnelle, peuvent quelquefois être remplacées par des quantités égales mais ayant un dénominateur rationnel. Il y a, à une pareille transformation, plusieurs avantages que nous mettrons en évidence par l'exemple suivant.

174. Soit x un nombre irrationnel défini par la formule

$$(1) \quad x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

On sait que

$$\sqrt{2}=1,412\ldots$$

et

$$\sqrt{3}=1,732\ldots$$

En prenant la formule (1) il faudrait, pour calculer x, effectuer la division de l'unité par 0, 320... Si, au contraire, on remarque que l'on a

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2},$$

une simple addition, fait connaître la valeur de x,

$$x = 3,144\ldots$$

Mais il faut aussi observer, et ceci constitue un second avantage de la transformation précédente, que la valeur ainsi trouvée 3,144.. représente l'inconnue avec une approximation qu'on détermine immédiatement et qui est inférieure à $\frac{2}{1000}$, puisque les nombres 1,412... et 1,732... sont approchés avec une erreur absolue plus petite que $\frac{1}{1000}$.

175. Transformation des expressions irrationnelles fractionnaires. Nous supposons d'abord que le dénominateur est de la forme $\sqrt{\alpha}$, ou $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, ou $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$.

1° Soit

$$x = \frac{P}{\sqrt{\alpha}};$$

on a évidemment

$$x = \frac{P\sqrt{\alpha}}{\alpha}.$$

2° Soit

$$x = \frac{P}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$$

On multiplie, haut et bas, par $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ et, on obtient pour x, la valeur

$$x = \frac{P(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{\alpha-\beta}.$$

3° Soit maintenant

$$x = \frac{P}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}.$$

On transforme d'abord l'expression en multipliant les deux termes par

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}$$

et l'on obtient :

$$x=\frac{P(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\alpha+\beta-\gamma+2\sqrt{\alpha\beta}}.$$

On est ainsi ramené au second cas. En multipliant de nouveau, haut et bas, par $(\alpha+\beta-\gamma-2\sqrt{\alpha\beta})$ le dénominateur de x sera rationnel.

Remarque. — La transformation précédente peut se faire en employant l'un ou l'autre des facteurs

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma},\quad \sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma},\quad -\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}.$$

On peut profiter de cette remarque pour choisir entre ceux-ci, celui qui donne lieu au calcul le plus simple. Prenons par exemple la quantité irrationnelle

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

on voit que le facteur

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

se prête plus commodément à la transformation et donne

$$x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}.$$

ou

$$x=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}.$$

Plus généralement l'expression

$$x=\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha+\beta}}$$

peut s'écrire, par cette transformation,

$$x = \frac{\sqrt{\alpha^2\beta}+\sqrt{\beta^2\alpha}-\sqrt{\alpha\beta(\alpha+\beta)}}{2\alpha\beta}.$$

176. Considérons encore l'expression irrationnelle

$$x = \frac{P}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}}$$

On multiplie, haut et bas, par

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta},$$

ou par l'un des facteurs analogues, et l'on est ramené au cas précédent.

177. Remarque. On peut, assez souvent, abréger ce dernier calcul en appliquant la remarque suivante.

L'expression $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}$ est décomposable en deux facteurs de la forme $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, quand les quatre nombres α, β, γ, δ forment une proportion.

Soit

$$\alpha\delta = \beta\gamma.$$

Si nous posons

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} = K$$

on aura :

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta} = (\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta})(1+\sqrt{K}).$$

Cette expression peut s'écrire aussi

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}).$$

Exemple. Soit :

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}.$$

Ayant observé que $10.21 = 15.14$, on trouve en appliquant la remarque précédente

$$x = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$$

ou

$$x = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}.$$

178. L'idée précédente peut être appliquée, utilement, dans des cas analogues.

Soit, par exemple, l'expression

$$x = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}+\sqrt{\alpha_3}+\sqrt{\alpha_4}+\sqrt{\alpha_5}}$$

dans laquelle on a

$$\alpha_1\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3.$$

On peut, par la transformation indiquée tout à l'heure, établir l'égalité

$$\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}+\sqrt{\alpha_3}+\sqrt{\alpha_4} = (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha'}+\sqrt{\beta'}).$$

La valeur proposée s'écrit alors :

$$x = \frac{1}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha'}+\sqrt{\beta'})+\sqrt{\alpha_5}},$$

en multipliant, haut et bas, par $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})$, le dénominateur devient une somme de quatre radicaux carrés.

179. Méthode générale pour rendre rationnel le dénominateur d'une fraction, lorsque celui-ci est la somme algébrique de radicaux carrés.

Les artifices de calcul que nous venons d'exposer sont ceux auxquels on a le plus souvent recours dans la pratique, car

il est rare qu'on ait à calculer, ou à transformer, des expressions de la forme

$$(1) \qquad z = \frac{A}{\Sigma\sqrt{a_1}},$$

plus compliquées que celles que nous venons d'examiner. Mais il existe une méthode générale pour rendre rationnel le dénominateur des expressions de la forme (1), et, au moins au point de vue théorique, il est intéressant de montrer que le problème qui nous occupe peut être résolu *quel que soit le nombre des radicaux carrés qui constituent le dénominateur de* z.

Soit donc

$$z = \frac{A}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} \ldots + \sqrt{a_p}},$$

les radicaux ayant un signe explicite, pour que z soit bien déterminé.

Posons

$$x_1 = \sqrt{a_1}, \quad x_2 = \sqrt{a_2}, \ldots x_p = \sqrt{a_p},$$

et considérons tous les polynômes que l'on peut déduire de l'expression

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \cdots \pm x_p,$$

en choisissant les signes par toutes les combinaisons possibles. On peut, pour trouver ces polynômes, opérer de la manière suivante. Le signe de x_1 peut toujours être choisi arbitrairement, puisque l'on peut, dans la fraction $\frac{A}{\Sigma\sqrt{a_1}}$, changer les signes des deux termes. Supposons donc que x_1 ait explicitement le signe +. On formera le tableau

$$x_1 + x_2, \qquad x_1 - x_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3, \qquad x_1 - x_2 + x_3$$
$$x_1 + x_2 - x_3, \qquad x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{array}{ll} x_1+x_2+x_3+x_4, & x_1-x_2+x_3+x_4 \\ x_1+x_2+x_3-x_4, & x_1-x_2+x_3-x_4 \\ x_1+x_2-x_3+x_4, & x_1-x_2-x_3+x_4 \\ x_1+x_2-x_3-x_4, & x_1-x_2-x_3-x_4 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

En général, on voit que, si P_1, $P_2 \ldots P_k$ désignent les polynômes formés avec les $(p-1)$ lettres $x_1, x_2 \ldots x_{p-1}$, on a $k = 2^{p-2}$; et que les polynômes qui correspondent aux p lettres $x_1, x_2 \ldots x_p$, sont

$$\begin{array}{lll} P_1+x_p, & P_2+x_p, & \ldots P_k+x_p \\ P_1-x_p, & P_2-x_p, & \ldots P_k-x_p \end{array}$$

Le produit U, de ces polynômes est donc

$$U = (P_1^2-x_p^2)(P_2^2-x_p^2)\ldots(P_k^2-x_p^2).$$

Ainsi U est une fonction entière de x_p^2; ou de a_p. Mais U ne change pas, par la permutation deux à deux, des lettres x_1, $x_2, \ldots x_p$, et ceci est une conséquence de la loi même qui sert de définition à cette fonction. Il est donc déjà reconnu que U est une fonction rationnelle des lettres a_2, a_3, a_p.

Il reste encore à vérifier que U est une fonction entière et rationnelle par rapport à x_1. Observons, à cet effet, que dans l'expression de U, à tout polynôme (x_1+Q_1) correspond le polynôme (x_1-Q_1); on aura donc

$$U = (x_1^2-Q_1^2)(x_1^2-Q_2^2)\ldots(x_1^2-Q_k^2).$$

Cette égalité prouve que U est aussi une fonction entière, et rationnelle de x_1.

Ceci posé, désignons par X_t le dénominateur proposé;

$$X_t = \Sigma a_1$$

et considérons tous les polynômes analogues X_2, X_3, ...

X_h qui, multipliés entre eux, et multipliés par X_t constituent la fonction U. L'expression proposée z, peut donc s'écrire

$$z = \frac{A}{\Sigma a_1} = \frac{AX_1X_2 \dots X_h}{X_1X_2 \dots X_hX_t}.$$

Son dénominateur est alors rationnel et égal à cette fonction U, que nous venons de définir.

180. Transformation des expressions $\pm\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.

Cette transformation repose sur un principe, que nous établirons d'abord et que nous énoncerons ainsi :

THÉORÈME. *Si α et α' sont des nombres rationnels, et si β et β' ne sont pas des carrés parfaits, on ne peut pas avoir*

$$(1) \quad \alpha + \sqrt{\beta} = \alpha' + \sqrt{\beta'}$$

si l'on ne suppose pas

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'.$$

En effet l'égalité proposée peut s'écrire

$$\sqrt{\beta} = \alpha' - \alpha + \sqrt{\beta'}.$$

Les deux nombres $\sqrt{\beta}$, $(\alpha' - \alpha + \sqrt{\beta'})$ étant égaux, leurs carrés sont aussi égaux. On a donc

$$\beta = (\alpha' - \alpha)^2 + \beta' + 2(\alpha - \alpha')\sqrt{\beta'}.$$

Si l'on suppose $(\alpha' - \alpha) \neq 0$, on peut alors résoudre cette égalité par rapport à $\sqrt{\beta'}$. On trouve pour $\sqrt{\beta'}$ un quotient dont les deux termes sont rationnels, et il n'en peut être ainsi; puisque nous supposons que β' n'est pas un carré parfait. Ainsi il faut supposer que $\alpha = \alpha'$: on a donc d'après l'égalité (1), $\beta = \beta'$

181. Ceci posé, nous nous proposons d'effectuer sur l'expression

$$u = \sqrt{a + \sqrt{b}}$$

la transformation qui a pour but de mettre cette quantité irrationnelle identiquement sous la forme $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Lorsque x et y sont des quantités rationnelles, on observera qu'il y a avantage à calculer u par la formule

$$u=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

1° parce que l'on extrait la racine carrée de deux nombres connus; 2° parce que l'on évalue plus facilement l'erreur absolue qui a été commise dans le calcul.

Posons donc, les signes des radicaux étant explicites,

$$(1) \quad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Nous supposons que b est un nombre positif, mais qu'il n'est pas un carré parfait.

L'égalité (1) donne

$$(2) \quad a+\sqrt{b}=x+y+\sqrt{4xy};$$

$4xy$ ne peut être un carré parfait, puisque $\sqrt{b}$ est une quantité irrationnelle. On peut donc appliquer ici le principe précédent et l'on obtient, pour déterminer x et y les deux équations

$$x+y=a$$
$$4xy=b.$$

On en tire, par combinaison, la relation

$$(x-y)^2=a^2-b.$$

Si x et y, et par suite $(x-y)$, sont commensurables, il faut supposer que a^2-b est un carré parfait.

Soit, $a^2-b=k^2$, k étant un nombre positif représentant la valeur arithmétique de la racine carrée de a^2-b, et soit x, le plus grand des deux nombres cherchés. On a

$$x-y=k.$$

par suite,

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+k}{2} \\ y = \dfrac{a-k}{2} \end{cases}$$

et finalement

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+k}{2}} + \sqrt{\frac{a-k}{2}}.$$

C'est la formule cherchée.

182. Remarque I. Nous avons supposé dans ce qui précède que x et y étaient des nombres commensurables. On peut remarquer que la transformation que nous venons d'effectuer peut être encore employée *dans le cas où x et y sont incommensurables.* Mais alors cette transformation (au moins, au point de vue pratique) n'est pas avantageuse.

En effet on satisfait à l'égalité (2), *quels que soient x et y*, en posant

$$x + y = a$$
$$4xy = b.$$

On tire de ces équations

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b} \\ y = \dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b}. \end{cases}$$

On a donc

$$\text{(A)} \quad \sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Cette identité a lieu *quels que soient* a *et* b, mais elle n'est avantageuse que si $(a^2 - b)$ est un carré parfait.

183. Remarque II. Un calcul tout semblable donne la

transformation de l'irrationnelle $\sqrt{a-\sqrt{b}}$, en une expression de la forme $(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

Les signes étant explicites, on trouve

$$\text{(B)}\quad \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

184. Remarque III. *Lorsque le dernier terme* q, *de l'équation bicarrée*

$$x^4+px^2+q=0$$

est un carré parfait, la transformation précédente s'applique avantageusement.

On a en effet :

$$x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

Prenons, par exemple, la racine x_1

$$x_1=\sqrt{-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

La quantité (a^2-b), dont il a été question tout à l'heure, est ici égale à q. Si q est un carré parfait la transformation est donc avantageuse

185. Exemple. *Résoudre l'équation*

$$x^4-8x^2+4=0.$$

Posons

$$x^2=y,$$

on trouve

$$y=4\pm\sqrt{12}.$$

Considérons l'une des racines x_1,

$$x_1=\sqrt{4+\sqrt{12}}$$

On a, ici, $a^2 - b = 4$; par conséquent $k = 2$, et, par suite,

$$\frac{a+k}{2} = 3, \quad \frac{a-k}{2} = 1.$$

On trouve ainsi

$$x_1 = 1 + \sqrt{3}.$$

Les autres racines sont :

$$x_2 = \sqrt{3} - 1$$
$$x_3 = -x_1$$
$$x_4 = -x_2;$$

ou, à $\frac{1}{1000}$ près,

$$x_1 = 2,732$$
$$x_2 = 0,732$$
$$-x_3 = 2,732$$
$$-x_4 = 0,732.$$

186. Remarque IV. Si l'on suppose que $(a^2 - b)$ soit négatif; les formules (A) et (B) sont, bien entendu, toujours exactes; mais elles n'offrent, en général, aucune utilité parce que les seconds membres sont imaginaires. Ainsi, d'après la formule (A), on a

$$\sqrt{1+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{1+2i}{2}} + \sqrt{\frac{1-2i}{2}};$$

si l'on cherche, d'autre part, à débarrasser le second membre des imaginaires qu'il renferme; si l'on pose

$$\sqrt{\frac{1+2i}{2}} = A + Bi,$$

on a

$$\sqrt{\frac{1-2i}{2}} = A - Bi.$$

On trouve alors, par le calcul que nous avons fait connaître précédemment, pour extraire la racine carrée d'une quantité imaginaire,

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{5}}.$$

On retombe ainsi sur la quantité même que l'on voulait transformer. Il n'en pouvait être différemment.

L'égalité

$$\sqrt{1+\sqrt{5}} = (A + Bi) + (A - Bi)$$

donne, en effet,

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{5}}.$$

On rencontre ici un exemple de ces impossibilités algébriques, impossibilités qu'on ne peut pas toujours prévoir *à priori*, mais que revèle le calcul. Si l'on veut transformer, comme nous avons essayé de le faire, l'expression $\sqrt{1+\sqrt{5}}$; on obtient des quantités, en apparence, imaginaires : et si l'on cherche à débarrasser ces expressions, des imaginaires qu'elles semblent renfermer, on retombe sur le point de départ ; nous voulons dire sur l'expression qu'on voulait transformer. C'est là un de ces cas irréductibles, dont l'analyse offre quelques exemples curieux, et qui semblent constituer comme un cercle vicieux algébrique.

187. Irrationnelles cubiques. Nous terminerons cette leçon en montrant comment on peut, dans quelques cas simples, transformer des expressions renfermant des radicaux du troisième degré.

1° Soit la quantité x,

$$x = \frac{P}{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}}.$$

L'identité

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

donne

$$\alpha + \beta = (\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta})(\sqrt[3]{\alpha^2} - \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}).$$

On a donc

$$x = \frac{P(\sqrt[3]{\alpha^2} - \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2})}{\alpha + \beta}.$$

Le dénominateur de x est alors rationnel.

2° soit maintenant la quantité x,

$$x = \frac{P}{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\gamma}}$$

L'identité

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc),$$

prouve que si l'on pose

$$a = \sqrt[3]{\alpha}, \quad b = \sqrt[3]{\beta}, \quad c = \sqrt[3]{\gamma};$$

et

$$u = \sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\beta^2} + \sqrt[3]{\gamma^2} - \sqrt[3]{\alpha\beta} - \sqrt[3]{\alpha\gamma} - \sqrt[3]{\beta\gamma}$$

on a

$$x = \frac{P.u}{\alpha + \beta + \gamma - \sqrt[3]{27\alpha\beta\gamma}}.$$

Si $\alpha\beta\gamma$ est un cube, la transformation de x se trouve effectuée; le nouveau dénominateur est rationnel : si non, on remarquera que celui-ci peut s'écrire

$$\sqrt[3]{(\alpha + \beta + \gamma)^3} + \sqrt[3]{-27\alpha\beta\gamma}.$$

et l'on retombe dans le cas traité précédemment.

3° Soit enfin la quantité x,

$$x = \frac{P}{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\alpha'} + \sqrt[3]{\beta'}}$$

et supposons que l'on ait $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{6}{6'}$. On voit facilement que le dénominateur est le produit de deux facteurs de la forme $\sqrt[3]{U} + \sqrt[3]{V}$, et l'on retombe dans le premier cas.

EXERCICES

1. *Démontrer que la somme de deux radicaux carrés, radicaux portant sur des quantités commensurables et qui ne sont pas carrés parfaits, n'est jamais une quantité rationnelle.*

Si l'on avait

$$\alpha = \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma},$$

on aurait donc

$$\alpha^2 = \beta + \gamma + 2\sqrt{\beta\gamma},$$

ce qui prouve que $\beta\gamma$ serait rationnel; on a d'ailleurs

$$\alpha\sqrt{\beta} = \beta + \sqrt{\beta\gamma};\ \text{etc}\ldots$$

2. *Démontrer que si* α, β, γ δ *désignent des quantités commensurables et si* β, γ δ *ne sont pas des carrés parfaits, on ne peut pas avoir*

$$\alpha + \sqrt{\beta} = \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta}.$$

On élève l'égalité au carré et, par une combinaison évidente, on est conduit à l'égalité $\alpha^2 = \gamma$ ou $\alpha^2 = \delta$ qui sont l'une et l'autre incompatibles avec l'hypothèse.

3. *Démontrer que si* b *n'est pas un carré parfait la quantité* $\sqrt{a + \sqrt[4]{b}}$ *n'est pas réductible à la forme* $\sqrt{x} + \sqrt{y}$; x *et* y *étant commensurables.*

Par deux élévations au carré, successives, on trouve

$$\sqrt{b} = (x + y - a)^2 + 4xy + \sqrt{16xy\,(x + y - a)^2}$$

b, n'étant pas un carré parfait il faudrait (*Ex. I*) que l'on eut

$$(x + y - a)^2 + 4xy = 0$$
$$b = 16xy\,(x + y - a)^2$$

la première égalité est impossible si l'on suppose x et y positifs.

4. *Vérifier que l'on a :*

$$-2 = \sqrt[3]{-2 + \frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{-2 - \frac{10}{9}\sqrt{3}}.$$

On désigne par x la somme des deux radicaux cubiques proposés et on fait voir que ce nombre x satifait à l'équation

$$x^3 - 2x + 4 = 0$$

$x = -2$ est une racine de cette équation ; les deux autres racines sont imaginaires.

5. *Résoudre l'équation*

$$ay^4 + 2y^2(a - 2b) + a = 0$$

on trouve, en appliquant la transformation des irrationnelles,

$$y = \pm\sqrt{b} \pm \sqrt{b - a}.$$

6. *Transformer la quantité irrationnelle u,*

$$u = \sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$$

en un produit

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{X} + \sqrt{Y}).$$

Montrer que si l'on a

$$a^2 d = bc$$

la transformation est toujours possible, et que si $(a^2 - b)$ *et* $(a^2 - c)$ *sont des carrés parfaits, elle est avantageuse.*

L'égalité

$$\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{X} + \sqrt{Y})$$

donne :

$$a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = (x + y + 2\sqrt{xy})(X + Y + 2\sqrt{XY})$$

et l'on satisfait à cette égalité en posant :

$$(1) \quad \begin{cases} a = (x + y)(X + Y) \\ b = 4(x + y)^2 XY \\ c = 4(X + Y)^2 xy \\ d = 16xyXY \end{cases}$$

Ces équations sont incompatibles si l'on n'a pas $a^2d = bc$. Si l'on suppose $a^2d = b^2c$, le système est indéterminé. Cette indétermination s'explique aisément au moyen de l'identité

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{X}+\sqrt{Y}) = (\sqrt{\lambda x}+\sqrt{\lambda y})\left(\sqrt{\frac{X}{\lambda}}+\sqrt{\frac{Y}{\lambda}}\right).$$

Cette identité a lieu, quelque soit λ; elle prouve donc que la décomposition est possible d'une infinité de façons.

On profite de cette indétermination pour poser $x + y = 1$ et l'on obtient finalement

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}\sqrt{a^2 - c}$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}\sqrt{a^2 - c}$$

$$X = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}$$

$$Y = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}$$

7. *Transformer* $\sqrt[4]{a + \sqrt{b}}$ *en une somme de deux radicaux simples.*

Démontrer que si $(a^2 - b)$ *est une quatrième puissance exacte et si* $\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$ *est un carré parfait la transformation est avantageuse.*

Exemple :

$$\sqrt[4]{7+\sqrt{48}} = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

La transformation est encore avantageuse, mais à un degré moindre quand la première condition est seule remplie.

Exemple :

$$\sqrt[4]{6+\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}.$$

8. *Transformer les expressions*

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}}.$$

et

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}.$$

On trouve

$$x = \frac{\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{4}}{4}$$

$$y = \frac{1 + \sqrt[3]{2}}{3}$$

9. *Transformer la quantité irrationnelle x,*

$$x = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{a'} + \sqrt{b'} + \sqrt{c'}}$$

quand on suppose que l'on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

10. *Transformer l'expression*

$$x = \sqrt{4ab + 2(a+b)(a-b)\sqrt{-1}}$$

(Lacroix.)

On trouve

$$x = (a+b) + (a-b)\sqrt{-1}.$$

11. *Transformer l'expression*

$$x = \sqrt{a^2 - ab + \frac{b^2}{4} + 2\sqrt{a^3b - 2a^2b^2 + \frac{ab^3}{4}}}$$

(Lacroix.)

Le résultat qu'on doit trouver est

$$x = \sqrt{ab} + \sqrt{a^2 - 2ab + \frac{b^2}{4}}$$

12. *Dans quel cas est-il possible de transformer l'expression*

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} \ ?$$

Montrer que la transformée ne peut jamais être de la forme $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; *mais qu'elle peut être, pour une infinité de valeurs de* λ, *de la forme*

$$\left(x+\sqrt{y}\right)\sqrt[3]{\lambda}.$$

(Lacroix.)

La transformation devient avantageuse en disposant de λ de façon que $\lambda\,(a^2-b)$ soit un cube parfait.

Par exemple :

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}$$

de même

$$\sqrt[3]{52+30\sqrt{3}}=\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2}.$$

QUINZIÈME LEÇON

INÉGALITÉS.

188. Définition. Lorsque la différence entre deux quantités A, B, n'est pas égale à zéro, on dit que ces quantités sont *inégales* et l'on exprime ce fait en écrivant

$$A \neq B \text{ (1)}$$

Si la différence est positive, on dit que A est plus grand que B; au contraire A est plus petit que B si la différence est négative. Dans le premier cas on écrit : $A > B$; dans le second $A < B$. Dans les égalités que nous avons considérées jusqu'ici nous avons distingué deux genres; le premier était formé par les égalités que nous avons nommées *équations*, ce sont celles qui n'ont lieu que pour certaines valeurs attribuées aux lettres, valeurs en nombre fini, et convenablement choisies; l'autre comprenait les égalités que nous avons nommées *identités*, et qui étaient vérifiées pour une infinité de valeurs données aux lettres.

De même, on peut distinguer les inégalités en deux genres suivant que l'inégalité proposée a lieu *pour toutes les valeurs numériques attribuées aux lettres; ou seulement pour des valeurs qui peuvent être en nombre infini, mais qui sont comprises entre des limites bien déterminées.*

Résoudre une inégalité renfermant les lettres x, y,... c'est chercher entre quelles limites, bien déterminées, peuvent être prises les valeurs de ces lettres pour que l'inégalité soit véri-

1. Lisez : A *différent de* B.

fiée. Si ces limites sont arbitraires, c'est-à-dire si l'inégalité est vérifiée pour toutes les valeurs numériques des lettres, nous exprimerons ce fait en disant que l'*inégalité est absolue.*

Ainsi :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc + 1 > 0$$

est une inégalité absolue. Elle peut s'écrire en effet :

$$\frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2 + \frac{1}{2}(c-a)^2 + 1 > 0\,;$$

et, sous cette forme, on reconnaît qu'elle est vérifiée *quelles que soient les valeurs de* a, b, c.

Au contraire l'inégalité :

$$x^2 - (p+1)x + p < 0$$

qui peut s'écrire,

$$(x-1)(x-p) < 0$$

n'a lieu que si la valeur de x est prise dans l'intervalle $1, p$: ce n'est donc pas une inégalité absolue.

Assez souvent, et notamment dans les discussions que soulèvent les problèmes du second degré, on a à résoudre une inégalité, telle que $U > 0$; mais on admet aussi, dans cette discussion, ce qu'on peut appeler les *valeurs extrêmes*, celles qui donnent $U = 0$. On écrit alors que la condition de possibilité du problème donné est $U \geqslant 0$. Les valeurs cherchées sont, dans ce cas, celles qui satisfont : 1° à l'inégalité $U > 0$; 2° à l'équation $U = 0$.

Nous rappellerons d'abord quelques principes qui sont fondamentaux dans le calcul des inégalités.

189. Théorème I. *On peut ajouter ou retrancher une même quantité aux deux membres d'une inégalité.*

Il faut entendre, par cet énoncé, qu'au lieu de résoudre l'inégalité

$$(1) \quad A > B$$

on peut résoudre, m étant positif ou négatif, l'inégalité

$$(2)\quad A + m > B + m.$$

En effet on a

$$(3)\quad A - B = (A + m) - (B + m).$$

Si le premier membre est positif, l'autre l'est aussi : Si la différence $(A + m) - (B + m)$ est positive, c'est que, par définition même $(A + m)$ est plus grand que $(B + m)$. Ainsi toute solution de l'inégalité (1) convient à (2). La réciproque est vraie ; les inégalités (1) et (2) sont donc équivalentes.

190. Corollaire. *On peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre, mais en changeant son signe.*

Soit l'inégalité

$$A > B + B'.$$

Retranchons B' aux deux membres, l'inégalité

$$A - B' > B$$

est équivalente à la proposée, d'après le théorème précédent, et la propriété se trouve établie.

191. Théorème II. *On peut multiplier ou diviser, par un facteur positif, les deux membres d'une inégalité.*

Soit $m > 0$, je dis que

$$(1)\quad A > B$$

et

$$(2)\quad Am > Bm$$

sont des *inégalités équivalentes.*

En effet, si l'on a $A > B$, il faut supposer que $(A - B)$ est positif. Le produit $m(A - B)$ est donc aussi positif si m est positif comme nous l'admettons.

Mais on a

$$m(A - B) = mA - mB.$$

Ainsi $mA - mB$ est positif; on a donc bien, d'après la définition même,

$$mA > mB.$$

La réciproque est vraie et l'on reconnait, de la même façon, que toute solution de (2) appartient à (1); les deux inégalités peuvent donc être substituées l'une à l'autre.

192. Remarque. Ce principe a de nombreuses applications dans le calcul des inégalités, on l'utilise notamment pour simplifier celles-ci en supprimant les facteurs communs aux deux membres d'une inégalité, lorsque l'on est certain que ces facteurs sont positifs. Si l'on aperçoit, par exemple, un facteur dont la forme algébrique est celle d'un carré, ou d'une somme de carrés, on peut, purement et simplement, le supprimer. Ainsi l'inégalité

$$8(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x + 1)(x - 2) > 0$$

peut, d'après le théorème précédent, être remplacée par l'inégalité plus simple

$$x - 2 > 0.$$

On applique encore ce principe quand on a besoin *de chasser les dénominateurs des inégalités*. Par exemple, si l'on veut résoudre l'inégalité,

$$\frac{P}{Q} > \frac{R}{S}$$

ou

$$\frac{P}{Q} - \frac{R}{S} > 0$$

ou encore

$$\frac{PS - QR}{QS} > 0.$$

On pourra remplacer l'inégalité proposée par l'inégalité équivalente

$$QS(PS - QR) > 0.$$

193. Théorème III. *On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un facteur négatif à la condition de changer le sens de l'inégalité.*

La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à celle que nous avons exposée tout à l'heure (§ 191).

194. Théorème IV. *On peut ajouter membre à membre deux ou plusieurs inégalités de même sens.*

Si l'on a :

$$A > B$$
$$A' > B'$$

je dis que l'on a aussi :

$$A + A' > B + B'.$$

En effet, $(A - B)$ et $(A' - B')$ sont, par hypothèse, des quantités positives : leur somme est donc aussi positive. Mais on a :

$$(A - B) + (A' - B') = (A + A') - (B + B').$$

Le second membre étant positif, on a bien

$$A + A' > B + B'.$$

Cette proposition étant vraie pour deux inégalités, se généralise évidemment ; elle peut d'ailleurs s'établir directement pour un nombre quelconque d'inégalités.

195. Remarque. Il faut observer que les deux systèmes

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A > B \\ A' > B' \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left. \begin{array}{c} A > B \\ A + A' > B + B' \end{array} \right\} \quad (2)$$

ne sont pas équivalents et ne peuvent pas, dans une discussion, être substitués l'un à l'autre. Sans doute, toute solution de (1) appartient à (2), mais la réciproque n'a pas lieu nécessairement. On peut en effet avoir

$$A > B$$

et

$$(A - B) + (A' - B') > 0$$

sans avoir

$$A' - B' > 0.$$

Il suffit que la valeur négative attribuée à $(A' - B')$ soit, en valeur absolue, plus faible que $(A - B)$.

C'est par une raison semblable *qu'il n'est pas permis de retrancher membre à membre deux inégalités de même sens.*

On peut en effet, la chose est évidente, supposer

$$A - B > 0$$

et

$$A' - B' > 0$$

sans avoir nécessairement :

$$(A - B) - (A' - B') > 0.$$

196. Théorème V. *Lorsque deux ou plusieurs inégalités de même sens, ont leurs membres positifs ; si on les multiplie, membre à membre, l'inégalité obtenue peut être considérée comme une conséquence des inégalités proposées.*

Soient les deux inégalités.

$$A > B$$

et

$$A' > B'$$

A, B, A', B' étant d'ailleurs des quantités positives. Avant de démontrer le théorème en question nous ferons une remarque générale, remarque que nous utiliserons encore dans la suite, et que nous énoncerons ainsi : *une inégalité telle que* $A \gtrless B$ *peut toujours être remplacée par une égalité*

$$A - B = x ;$$

la lettre x *désignant une quantité dont le signe est explicite; savoir le signe* + *si l'on a* $A > B$ *et le signe* —, *si l'on suppose* $A < B$. On a donc d'après cette observation évidente

$$A = B + x$$
$$A' = B' + y$$

x et y étant plus grands que zéro. De ces égalités on déduit :

$$AA' - BB' = B'x + By + xy.$$

Le second membre est essentiellement positif puisque B, B' x, y représentent des nombres positifs.

On a donc

$$AA' > BB'.$$

Si l'on considère maintenant plusieurs inégalités

$$\begin{cases} A_1 > B_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_p > B_p \end{cases}$$

On aura de même

$$\begin{cases} A_1 = B_1 + x_1 \\ A_2 = B_2 + x_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_p = B_p + x_p \end{cases}$$

et par suite

$$A_1A_2 \dots A_p = (B_1 + x_1)(B_2 + x_2) \dots (B_p + x_p)$$

ou

$$A_1A_2 \dots A_p - B_1B_2 \dots B_p = \Sigma x_1 (B_2 + x_2) \dots (B_p + x_p).$$

Le second membre ne renferme que des termes positifs. On a donc bien :

$$A_1A_2 \dots A_p > B_1B_2 \dots B_p.$$

197. Théorème VI. *Si l'on a, entre deux quantités positives, une inégalité ; on peut lui substituer l'inégalité obtenue en élevant les deux membres à une puissance quelconque, et positive.*

Ceci revient à reconnaître que l'inégalité (1) $A > B$ dans laquelle A et B sont des quantités positives, est équivalente à l'inégalité

$$(2) \quad A^p > B^p,$$

p étant un nombre entier et positif.

Remarquons d'abord que le théorème précédent, appliqué au cas particulier où l'on suppose,

$$A_1 = A_2 = \ldots A_p = A$$

et

$$B_1 = B_2 = \ldots B_p = B$$

donne bien

$$A^p > B^p.$$

Mais il faut encore démontrer que : réciproquement toute solution de l'inégalité (2) convient à (1). On a, en effet,

$$A^p - B^p = (A - B)(A^{p-1} + BA^{p-2} + \ldots + B^{p-1})$$

le polynôme $A^{p-1} + \ldots + B^{p-1}$ est constitué par des termes tous positifs : par conséquent si $A^p - B^p$ est positif, $A - B$ l'est aussi, nécessairement.

Remarque. *Si les quantités* A, B *sont toutes deux négatives on peut encore élever les deux membres de l'inégalité à une puissance* p *quelconque, mais il faut changer le sens de l'inégalité, dans le cas où* p *est pair.*

Soit l'inégalité

$$A > B;$$

A et B étant, l'un et l'autre négatifs. Posons $A = -A'$, $B = -B'$; on a donc

$$A' < B';$$

par suite, puisque A' et B' sont positifs,

$$A'^p < B'^p$$

ou

$$(-1)^p A^p < (-1)^p B^p.$$

Si p est pair on peut diviser par $(-1)^p$, et il reste

$$A^p < B^p;$$

Si p est impair, on peut encore diviser par $(-1)^p$, mais il faut changer le sens de l'inégalité et, dans ce cas, l'on obtient l'inégalité

$$A^p > B^p\,;$$

198. Théorème VII. *Si l'on a, entre des quantités positives* A, B; A′, B′; *les deux inégalités*

$$A > B$$
$$A' < B'$$

on a aussi

$$\frac{A}{A'} > \frac{B}{B'}.$$

Posons

$$A = B + x$$

et

$$A' = B' - y,$$

x et y sont alors des quantités positives. On a donc

$$\frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = \frac{B+x}{B'-y} - \frac{B}{B'}$$

ou

$$\frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = \frac{B'x + By}{A'B'}.$$

Le second membre est essentiellement positif; ainsi $\frac{A}{A'}$ est plus grand que $\frac{B}{B'}$.

199. Théorème VIII. *Si entre deux quantités positives* A *et* B *on a l'inégalité :*

$$A^p > B^p$$

on peut lui substituer l'inégalité plus simple,

$$A > B;$$

p *désignant un nombre entier et positif.*

Cette propriété est la conséquence évidente de l'identité

$$A^p - B^p = (A - B)(A^{p-1} + BA^{p-2} + \ldots + B^{p-1}).$$

200. Théorème IX. *Si des quantités positives* A, B, C, D, *vérifient l'inégalité*

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D},$$

elles satisfont aussi à l'inégalité

$$\frac{B}{A} < \frac{D}{C}$$

En effet, on a d'abord : $AD - BC > 0$. Divisons par le produit positif AC, il vient

$$\frac{D}{C} - \frac{B}{A} > 0$$

ou,

$$\frac{B}{A} < \frac{D}{C}.$$

On exprime quelquefois cette propriété en disant qu'on peut renverser les deux membres d'une inégalité, mais en changeant le sens de celle-ci.

RÉSOLUTION DES INÉGALITÉS.

201. La méthode la plus générale que l'on puisse indiquer pour résoudre les inégalités rationnelles algébriques qui renferment une variable x, consiste à faire passer tous les termes de l'inégalité proposée dans un des deux membres. On donne à celui-ci la forme entière, chose toujours possible, et l'on est ainsi ramené à discuter l'inégalité

$$f(x) > 0,$$

$f(x)$ désignant une *fonction entière de* x. On décompose

alors celle-ci en facteurs binômes de la forme $(x - \alpha)$ ou en facteurs de degré supérieur mais dont le signe soit connu. Le signe de $f(x)$ est alors bien déterminé, pour une valeur donnée de x.

Prenons, pour montrer une application de cette méthode, l'exemple suivant :

$$\frac{x^2+3}{x^2-4} > \frac{2(x-1)}{x^2(x^2-4)}.$$

Écrivons d'abord cette inégalité sous la forme

$$\frac{x^2+3}{x^2-4} - \frac{2(x-1)}{x^2(x^2-4)} > 0,$$

ou

$$\frac{x^4+3x^2-2x+2}{x^2(x^2-4)} > 0,$$

ou encore

$$(x^2-4)(x^4+3x^2-2x+2) > 0.$$

Ici se présente une difficulté qui porte sur la détermination du signe de la fonction

$$x^4+3x^2-2x+2.$$

En effet, on ne sait pas, en général, décomposer en facteurs binômes les polynômes dont le degré est supérieur à 2.

Mais cette décomposition n'est pas toujours nécessaire pour résoudre l'inégalité. Il suffit évidemment, pour la discussion qui nous occupe, que l'on soit fixé sur le signe du facteur. C'est ainsi que, dans l'exemple proposé, ayant observé que l'on a

$$x^4+3x^2-2x+2 = (x^2+1)^2+(x-1)^2\,;$$

on peut affirmer que cette fonction est constamment positive. Dès lors l'inégalité donnée revient à celle-ci,

$$(x-2)(x+2) > 0\,;$$

inégalité qui est vérifiée pour toutes les valeurs de x qui ne sont pas comprises dans l'intervalle $-(2+2)$.

202. Inégalités quadratiques. Nous appelons ainsi les inégalités qui ramenées à la forme $f(x) > 0$, sont telles que la fonction entière $f(x)$, puisse être décomposée en facteurs du premier, ou du second degré, au plus.

1° Soit d'abord l'inégalité

$$(1) \quad ax + b > a'x + b'$$

ou

$$(a - a')x + b - b' > 0,$$

dans laquelle on suppose, bien entendu, $a - a' \neq 0$. On peut donc écrire l'inégalité (1), sous la forme

$$(a - a')\left(x - \frac{b - b'}{a - a'}\right) > 0.$$

Si l'on suppose $a - a' > 0$, les valeurs de x qu'il faut choisir sont celles qui sont supérieures à $\frac{b - b'}{a - a'}$; si l'on a $a - a' < 0$ on doit prendre, au contraire, les valeurs de x inférieures à $\frac{b - b'}{a - a'}$.

2° Proposons-nous maintenant de résoudre l'inégalité

$$ax^2 + bx + c > a'x^2 + b'x + c'$$

ou

$$V > 0$$

en posant :

$$V = (a - a')x^2 + (b - b')x + c - c'.$$

Si $(a - a')$ est nul on retombe dans le cas précédent. Supposons donc $(a - a') \neq 0$ et distinguons trois cas, suivant que la quantité U

$$U = (b - b')^2 - 4(a - a')(c - c').$$

est positive, nulle ou négative.

Premier cas. $(U > 0)$. On a

$$V = (a - a')(x - x')(x - x'')$$

x' et x'' étant les racines de l'équation $V=0$. Si l'on a $(a-a')>0$ les valeurs cherchées pour x sont celles qui ne sont pas comprises entre les limites x', x''. La conclusion est inverse si l'on suppose $a-a'<0$.

Deuxième cas. $(U=0)$. Dans ce cas on a

$$V=(a-a')\left[x-\frac{b-b'}{2(a-a')}\right]^2.$$

Le second facteur est toujours positif, sauf pour la valeur $x=\frac{b-b'}{2(a-a')}$. Si l'on a $a-a'>0$, l'inégalité est vérifiée pour toutes les valeurs de x, excepté pour $x=\frac{b'-b}{2(a-a')}$; si, au contraire, on suppose $a-a'<0$, il n'y a aucune solution à l'inégalité proposée.

Troisième cas. $U<0$. Nous avons vu que, dans cette hypothèse, le trinôme V conservait toujours le signe de son premier terme; si $(a-a')$ est positif, l'inégalité est *absolue;* si $(a-a')$ est négatif aucun nombre ne peut la résoudre; l'inégalité est *impossible.*

3° Considérons maintenant l'inégalité

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}>\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'}.$$

Elle peut s'écrire, en utilisant la transformation indiquée plus haut,

$$(a'x+b')(\alpha'x+\beta)(Ax^2+Bx+C)>0;$$

en posant

$$A=\begin{vmatrix} a & \alpha \\ a' & \alpha' \end{vmatrix}$$

$$B=\begin{vmatrix} a & \beta \\ a' & \beta' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & \alpha \\ b' & \alpha' \end{vmatrix}$$

$$C=\begin{vmatrix} b & \beta \\ b' & \beta' \end{vmatrix}$$

La discussion est ainsi ramenée à celle du trinôme $Ax^2 + Bx + C$; et l'on vient de voir comment cette discussion peut être faite.

Remarque. Nous avons supposé

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0,$$

et aussi

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si l'une ou l'autre de ces expressions était nulle, l'une des fractions proposées serait constante et l'inégalité proposée s'écrirait

$$\frac{ax + b}{a'x + b'} > \frac{\beta}{\beta'}$$

ou encore

$$\beta'(a'x + b')\,[(a\beta' - \beta a')\,x + b\beta' - b'\beta] > 0.$$

Sous cette forme, sa discussion n'offre aucune difficulté.

4° Considérons enfin l'inégalité

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} > \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Elle peut s'écrire sous la forme

$$\alpha'(a'x^2 + b'x + c')[(a\alpha' - a'\alpha)x^2 + (b\alpha' - \alpha b')x + c\alpha' - \alpha c'] > 0.$$

Le premier membre est un produit de deux facteurs trinômes du second degré, et l'on peut résoudre cette inégalité en suivant la marche indiquée plus haut.

Remarque. En dehors des cas que nous venons d'examiner le problème qui vient de nous occuper, ne peut pas *en général* être résolu, du moins par les méthodes élémentaires, les inégalités cessant d'être quadratiques. Ce n'est plus que dans des cas particuliers que l'on peut opérer leur discussion.

203. Inégalités irrationnelles. Les inégalités renfermant des radicaux présentent une difficulté particulière qui tient à la discussion du signe des fonctions soumises à ces radicaux.

Nous indiquerons rapidement, sur un exemple simple, tel que celui que fournit l'inégalité

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} > x-3,$$

la marche qu'il faut suivre dans ces discussions.

Nous supposons explicitement que le radical est pris avec le signe +, pour que l'inégalité soit bien déterminée.

La variation de x ne peut évidemment avoir lieu qu'entre $-\infty$ et 1, ou entre 2 et $+\infty$. D'ailleurs l'inégalité a lieu, visiblement, pour toutes les valeurs de x qui n'étant pas comprises entre 1 et 2, sont inférieures à 3.

On a donc déjà, pour les valeurs cherchées de x, toutes celles de l'intervalle $(-\infty, +1)$; et aussi celles de l'intervalle $(2, 3)$.

Supposons maintenant que x soit plus grand que 3. Les deux membres étant positifs on peut les élever au carré et chercher les nombres qui satisfont à l'inégalité :

$$x^2 - 3x + 2 > x^2 - 6x + 9$$

ou

$$x - \frac{7}{3} > 0.$$

Celle-ci est vérifiée par tous les nombres supérieurs à 3. En résumé les solutions cherchées sont celles qui sont comprises entre $-\infty$ et $+1$ et entre $+2$ et $+\infty$.

EXERCICES

1. *Démontrer que si* $a_1, a_2, \ldots a_p$; *sont des nombres différents, positifs et inférieurs à l'unité, on a toujours*

$$2^{2p}.a_1.a_2\ldots a_p < \Sigma \frac{1}{(1-a_1)(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_p)}$$

On établit d'abord l'identité

$$\frac{1}{(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_p)} = \Sigma \frac{1}{(1-a_1)(a_1-a_2)\dots(a_1-a_p)}$$

puis l'on remarque que l'on a, quel que soit a,

$$4a(1-a) \leqslant 1.$$

2. *Démontrer que si* $a_1, a_2 \dots a_p$, *sont des nombres qui ne sont pas tous égaux on a*

$$(a_1+a_2 \dots + a_p)^2 < p(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2).$$

Pour résoudre cette question on pourra se servir de l'inégalité absolue

$$\Sigma(\alpha-\beta)^2 > 0.$$

3. *Démontrer, avec la même hypothèse sur les nombres* $a_1, a_2 \dots a_p$, *l'inégalité absolue*

$$(a_1+a_2+\dots+a_p)^2 < p(2a_1^2+2a_2^2+\dots+2a_p^2 - a_1a_2 - a_2a_3 \dots - a_pa_1))$$

On considère les inégalités

$$x^2 + a_1^2 + a_2^2 - xa_1 - xa_2 - a_1a_2 > 0$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x^2 + a_p^2 + a_1^2 - xa_p - xa_1 - a_pa_1 > 0.$$

4. *Démontrer que l'on a l'inégalité absolue*

$$px^2 - 2x(a_1+a_2+\dots+a_p-p^2) + a_1^2 + \dots a_p^2 - 2p(a_1+a_2 + \dots + a_p) + p^3 > 0.$$

On peut, par un groupement convenable, ramener le premier membre à la forme

$$\Sigma(a_1 - p^2 - x)^2.$$

On peut aussi suivre la méthode générale. On considère le trinôme du second dégré en x

$$Ax^2 + Bx + C,$$

et l'on montre que l'on a ici

$$B^2 - 4AC < 0;$$

on trouve, en effet, l'inégalité de l'exercice (2).

5. *Vérifier que les deux égalités*

$$\left.\begin{aligned} (q-q')^2-(p'-p)(pq'-qp') &= 0 \\ p(p'-p)-2(q-q') &= 0 \end{aligned}\right\}$$

entraînent : ou $p=p'$, et par suite $q=q'$; ou $p^2-4q=0$, si $p-p'\neq 0$.

On supposera $p-p'\neq 0$ et on formera avec les égalités proposées les deux combinaisons

$$pp'-2(q+q')=p^2-4q$$
$$2p(q+q')=4qp' \quad \text{etc...}$$

6. *On considère les fractions inégales, et rangées par ordre de grandeur croissante*

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots\ \frac{a_p}{b_p}$$

et l'on propose de démontrer 1° que le nombre Z

$$Z=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{b_1+b_2+\ldots+b_p}$$

est compris entre

$$\frac{a_1}{b_1}\quad \text{et}\quad \frac{a_p}{b_p};$$

2° que la différence $Z-\frac{a_1}{b_1}$ est plus grande que

$$b_1\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_1+b_2+\ldots b_p}\right).$$

On pourra poser :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{a_2}{b_2}&=\frac{a_1}{b_1}+x_1 \\ \frac{a_3}{b_3}&=\frac{a_1}{b_1}+x_2 \\ &\ldots\ldots \\ \frac{a_p}{b_p}&=\frac{a_1}{b_1}+x_{p-1} \end{aligned}\right.$$

On aura ainsi

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2 - b_2 x_1}{b_2} = \frac{a_3 - b_3 x_2}{b_3} = \ldots = \frac{a_p - b_p x_{p-1}}{b_p}.$$

On doit remarquer aussi que l'on a

$$x_2 > x_1, \quad x_3 > x_2 > x_1 \ldots \text{etc.}\ldots$$

7. *Résoudre l'inégalité*

$$\frac{(1+ab)^2}{(a+b)^2} < 1.$$

8. *Démontrer que si* a, b, c,...k, l, *représentent des quantités qui ne sont pas toutes égales, et qui sont supposées en nombre* p, *on a :*

$$\sqrt[p]{a.b\ldots k.l} < \frac{a+b+\ldots+k+l}{p}$$

(Cauchy.)

1° Le théorème est vrai pour $p=2$; il résulte de l'identité

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

2° La propriété s'étend à 4 nombres car

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}} < \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} < \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}$$

ou

$$\sqrt[4]{abcd} < \frac{a+b+c+d}{4}.$$

3° On généralise la remarque précédente pour 8, 16, ... 2^k, nombres.

4° Pour établir le théorème général il suffira, d'après ce qui précède, de vérifier que s'il est vrai pour $(p+1)$ nombres, il est vrai pour p.

Cette méthode inverse de celle qui est ordinairement suivie pour la généralisation d'une propriété, est remarquable ; elle a été employée par Cauchy pour établir le théorème qui nous occupe.

On a par hypothèse

$$\sqrt[p]{a.b.c\ldots k} = \sqrt[p+1]{a.b\ldots k\sqrt[p]{a.b.c.k}}$$

Le théorème étant vrai pour $(p+1)$ quantités, on peut écrire

$$\sqrt[p+1]{a.b\ldots k\sqrt[p]{ab\ldots k}}<\frac{a+b+\ldots k+\sqrt[p]{abc\ldots k}}{p+1}$$

Remarque. La racine, d'indice p, du produit de p nombres, s'appelle quelquefois moyenne géométrique : le théorème de Cauchy peut, en adoptant cette expression, s'énoncer ainsi : la moyenne géométrique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique.

9. *Démontrer que la moyenne harmonique est toujours plus grande que la moyenne géométrique.*

(On appelle moyenne harmonique, un nombre égal à p fois l'inverse de la somme des inverses des nombres donnés.)

L'inégalité

$$\sqrt[p]{a.b\ldots k.l}>\frac{p}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{l}},$$

que l'on propose de démontrer, est la conséquence immédiate du théorème précédent. On a, en effet, d'après ce théorème,

$$\sqrt[p]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\ldots\frac{1}{l}}<\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{l}}{p}.$$

10. *Demontrer que l'on a, a étant différent de* b

$$(1)\quad a^3+b^3>\frac{(a+b)^3}{4}$$

et, plus généralement,

$$(2)\quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^k<\frac{a^k+b^k}{2}.$$

k *étant un nombre entier positif.*)

Etendre ce théorème à des quantités positives a, b, c,... k, l, *en nombre* p.

1° L'inégalité (1) revient à celle-ci, qui est évidente

$$(x+y)(x-y)^2>0$$

2° L'inégalité (2), en posant

$$a=x+z$$
$$b=x-z$$

se transforme et devient l'inégalité évidente

$$0 < c_k^2 x^2 x^{k-2} + c_k^4 x^4 x^{k-4} + \dots$$

3° Pour généraliser la propriété et l'étendre à p quantités positives, on suit la marche indiquée dans l'exercice précédent.

On remarque d'abord que le théorème est vrai pour quatre nombres a, b, c, d, car

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^k = \left(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\right)^k < \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^k + \left(\frac{c+d}{2}\right)^k}{2};$$

mais on a vu que

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k < \frac{a^k+b^k}{2}$$

$$\left(\frac{c+d}{2}\right)^k < \frac{c^k+d^k}{2};$$

on a donc

$$\frac{(a+b+c+d)^k}{4} < \frac{a^k+b^k+c^k+d^k}{4}.$$

Ainsi le théorème est vrai pour 2, 4, 8, 16... quantités positives. Enfin on montre que si le théorème est vrai pour $(p+1)$ quantités $a, b, \dots k, l, m$: il est vrai aussi pour les p quantités $a, b, \dots k, l$.

On remarque à cet effet que :

$$\frac{a+b+\dots+l}{p} = \frac{\frac{p+1}{p}(a+b+\dots+l)}{p+1} = \frac{a+b+\dots+l+\frac{a+b+\dots+l}{p}}{p+1}$$

on a donc

$$\left(\frac{a+b+\dots+l}{p}\right)^k = \left(\frac{a+b+\dots+l+\frac{a+b+\dots+l}{p}}{p+1}\right)^k < \frac{a^k+\dots+l^k+\left(\frac{a+b+\dots+l}{p}\right)^k}{p+1}$$

11. *Soient* p *nombres en progression arithmétique*, a, b... k, l, *démontrer que l'on a*

$$1^\circ \quad \sqrt[p]{a.b\dots l} < \frac{a+l}{2}$$

$$2^\circ \quad \sqrt[p]{a.b\dots l} > \sqrt{al}.$$

Pour la première propriété on peut appliquer le théorème de Cauchy, et la formule connue,

$$a + b + \ldots + l = \frac{p}{2}(a + l).$$

Pour l'autre propriété, on appelle r la raison de la progression, et on forme le tableau suivant :

$$al = al$$
$$ak = (a + r)(l - r) = al + (p - 2)r^2$$
$$ch = (a + 2r)(l - 2r) = al + 2(p - 3)r^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a, par suite,

$$la = al$$
$$kb > al$$
$$hc > al$$
$$\ldots$$
$$al = al$$

d'où

$$(abc\ldots kl)^2 > (al)^p$$

Application. On a, p étant entier et positif,

$$\sqrt{p} < \sqrt[p]{1.2\ldots p} < \frac{p+1}{2}$$

(Todhunter.)

SEIZIÈME LEÇON

FRACTIONS CONTINUES.

204. Définitions. Imaginons des nombres U_p, U_{p-1}, U_{p-2} etc. . . se déduisant les uns des autres au moyen de la relation de récurrence

$$U_p U_{p-1} - a_p U_{p-1} - b_p = 0.$$

Cette égalité, dans laquelle les coefficients a_p et b_p peuvent être supposés fixes, ou, dans d'autres cas, variables avec p, permet de calculer U_2 connaissant U_1 ; puis U_3 connaissant U_2, etc. . . . On peut écrire l'expression de U_p sous la forme

$$U_p = a_p + \frac{b_p}{U_{p-1}}.$$

On a donc

$$U_p = a_p + \cfrac{b_p}{a_{p-1} + \cfrac{b_{p-1}}{U_{p-2}}};$$

et, finalement,

$$U_p = a_p + \cfrac{b_p}{a_{p-1} + \cfrac{b_{p-1}}{a_{p-1} + \cdots + a_2 + \cfrac{b_2}{U_1}}}.$$

Ces formes algébriques représentent, dans l'acception la plus générale du mot, *les fractions continues*.

On considère plus ordinairement, et nous nous occuperons exclusivement, de fractions continues d'un genre particulier,

de celles qui correspondent aux hypothèses suivantes :

1° tous les coefficients $b_2, b_3 \ldots b_p$ sont égaux à $+1$

2° tous les coefficients $a_2, a_3 \ldots a_p$, et le terme initial U_1, représentent des nombres positifs et entiers.

205. Origine des fractions continues. Nous ferons remarquer d'abord comment ces fractions continues particulières s'introduisent, par une voie naturelle, dans l'analyse. Imaginons une quantité quelconque x, commensurable ou non; cette quantité est nécessairement comprise entre deux nombres entiers consécutifs a_1 et $a_1 + 1$. On peut donc poser

$$(1) \quad x = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

x étant supposé plus grand que l'unité. L'égalité (1) donne

$$x_1 = \frac{1}{x - a_1}.$$

La quantité $\frac{1}{x - a_1}$ est, elle aussi, comprise entre deux nombres entiers consécutifs $a_2, a_2 + 1$; a_2 étant au moins égal à l'unité. On peut donc écrire

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2},$$

avec la condition $x_2 > 1$.

En continuant ce raisonnement on a, pour déterminer x, la formule

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}$$

C'est une fraction continue, dans le sens restreint et ordinaire du mot ; $a_1, a_2, a_3 \ldots$ sont des nombres entiers, positifs ; a_1 seul, peut être nul.

Dans l'étude que nous allons faire des fractions continues nous considérerons d'abord le cas où $a_1\, a_2 \ldots a_p$, sont en

nombre fini. Ces quantités sont appelées *les éléments de la fraction continue* ; on les nomme aussi *quotients incomplets*.

Pour abréger l'écriture, nous représenterons quelquefois par la notation symbolique

$$x = | a_1, | a_2, \dots a_n |,$$

la fraction continue dont les éléments sont : $a_1, a_2 \dots a_n$.

206. Théorème I. *Toute fraction continue limitée est un nombre commensurable.*

Soit

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}};$$

On a, par suite,

$$\frac{1}{x - a_1} = a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Faisons passer le terme a_2 dans le membre de gauche, il vient

$$\frac{x - a_1}{1 + a_1 a_2 - a_2 x} = a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

En poursuivant cette manière de faire, le premier membre est toujours le quotient de deux formes linéaires de x. On a donc, finalement,

$$\frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'} = a_n.$$

On tire de cette égalité

$$x = \frac{\beta' a_n - \beta}{\alpha - \alpha' a_n};$$

valeur qui n'est ni nulle, ni infinie, puisque x est compris entre a_1 et a_1+1

207. Remarque. Le calcul de x, et la démonstration du théorème précédent, peuvent encore se faire en remarquant que l'on a

$$a_{n-1}+\frac{1}{a_n}=\frac{a_n a_{n-1}+1}{a_n},$$

puis

$$a_{n-2}+\frac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}=a_{n-2}+\frac{a_n}{a_n a_{n-1}+1}=\frac{a_n a_{n-1} a_{n-2}+a_n+a_{n-2}}{a_n a_{n-1}+1},$$

etc... On arrive ainsi, de proche en proche, à la valeur de x qui est, d'après cela, le quotient de deux nombres entiers.

208. Théorème II. *Réciproquement, tout nombre commensurable peut être écrit sous la forme d'une fraction continue limitée.*

Soit $\frac{a}{b}$ le nombre proposé ; a et b désignant des nombres entiers, premiers entre eux. Nous supposerons d'abord que a est plus grand que b. En cherchant le *p. g. c. d.* de a et de b, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a &= bq_1+r_1 \\ b &= r_1q_2+r_2 \\ r_1 &= r_2q_3+r_3 \\ &\ldots\ldots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n+r_n, \end{aligned}$$

Le dernier reste r_n étant d'ailleurs égal à l'unité. De ces égalités on déduit

$$\frac{a}{b}=q_1+\frac{1}{\left(\frac{b}{r_1}\right)}$$

$$\left(\frac{b}{r_1}\right) = q_2 + \frac{1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = q_3 + \frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_3}\right)}$$

. . . .

$$\left(\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}\right) = q_n + \frac{1}{r_{n-1}}.$$

On a donc

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + q_n + \cfrac{1}{r_{n-1}}}}$$

Remarque. Lorsque $\frac{a}{b}$ est une fraction proprement dite, on développe $\frac{b}{a}$ en fraction continue.

La méthode précédente, donne

$$\frac{b}{a} = \left| \, x_1, \, x_2, \, .. \, x_p \, \right|;$$

et, par suite,

$$\frac{a}{b} = \left| \, 0, \, x_1, \, x_2, \, \ldots \, x_p \, \right|.$$

209. Théorème III. *Le développement d'un nombre commensurable en fraction continue n'est possible que d'une seule façon.*

Soit x le nombre proposé. Ce nombre, développé en fraction continue par le procédé indiqué tout à l'heure, a donné le résultat suivant

$$(1) \quad x = \left| \, a_1, \, a_2, \, a_3, \, \ldots \, a_n \, \right|$$

Supposons que, par une autre méthode, il soit possible de

trouver pour x un second développement en fraction continue, tel que

$$(2) \quad x = \left| \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_p \right|.$$

Nous allons montrer que ces deux développements sont identiques. L'égalité (1) prouve que x est compris entre les deux nombres entiers consécutifs a_1, $a_1 + 1$: l'égalité (2) prouve à son tour que x est compris entre les deux nombres entiers consécutifs α_1, $\alpha_1 + 1$. En rapprochant ces deux conclusions on voit que $a_1 = \alpha_1$.

Cette première remarque étant faite, nous pouvons écrire les égalités (1) et (2) de la manière suivante:

$$\frac{1}{x - a_1} = \left| a_2, a_3, \ldots a_n \right|,$$

$$\frac{1}{x - a_1} = \left| \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_p \right|.$$

En raisonnant, comme nous venons de le faire, on déduit de là que $a_2 = \alpha_2$. On voit ainsi, de proche en proche, que les éléments a sont, deux à deux, égaux aux éléments α.

210. Réduites, ou fractions convergentes. Les p premiers éléments d'une fraction continue, constituent une fraction continue. Le calcul de cette fraction donne lieu à une expression fractionnaire dont nous désignerons le numérateur par X_p et le dénominateur par Y_p. Nous poserons donc

$$\frac{X_p}{Y_p} = \left| a_1, a_2, \ldots a_p \right|;$$

et nous dirons que $\frac{X_p}{Y_p}$ est *la réduite d'ordre* p

On a, d'après cela

$$\frac{X_1}{Y_1} = \frac{a_1}{1} \quad \frac{X_2}{Y_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} \quad \frac{X_3}{Y_3} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} \text{ etc...};$$

et, par suite,

$$(1)\quad X_1 = a_1 \qquad X_2 = a_1 a_2 + 1 \qquad X_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3 \text{ etc...}$$
$$(2)\quad Y_1 = 1 \qquad Y_2 = a_2 \qquad Y_3 = a_2 a_3 + 1 \text{ etc...}$$

211. Théorème IV. *Trois fonctions* X *et* Y *consécutives satisfont aux relations de récurrence*

$$X_p = a_p X_{p-1} + X_{p-2}$$
$$Y_p = a_p Y_{p-1} + Y_{p-2}.$$

Les égalités (1) et (2) prouvent que cette loi se vérifie pour les trois premières fonctions x et y. On a, en effet

$$X_3 = a_3 X_2 + X_1$$

et

$$Y_3 = a_3 Y_2 + Y_1.$$

Supposons donc que la loi énoncée soit vérifiée pour les fonctions X et Y jusqu'à celles que nous désignons par X_{p-1} et Y_{p-1}, inclusivement; admettons, en d'autres termes, que l'on ait

$$\frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}} = \frac{a_{p-1} X_{p-2} + X_{p-3}}{a_{p-1} Y_{p-2} + Y_{p-3}}.$$

Pour obtenir $\frac{X_p}{Y_p}$, il suffit de remplacer, dans cette expression, l'élément a_{p-1}, par $a_{p-1} + \frac{1}{a_p}$. On a donc

$$\frac{X_p}{Y_p} = \frac{\left(a_{p-1} + \frac{1}{a_p}\right) X_{p-2} + X_{p-3}}{\left(a_{p-1} + \frac{1}{a_p}\right) Y_{p-2} + Y_{p-3}}.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$(1)\quad \frac{X_p}{Y_p} = \frac{a_p (a_{p-1} X_{p-2} + X_{p-3}) + X_{p-2}}{a_p (a_{p-1} Y_{p-2} + Y_{p-3}) + Y_{p-2}}$$

Mais on a, par hypothèse

$$X_{p-1} = a_{p-1}X_{p-2} + X_{p-3}$$

et

$$Y_{p-1} = a_{p-1}Y_{p-2} + Y_{p-3};$$

l'égalité (1) devient alors

$$\frac{X_p}{Y_p} = \frac{a_pX_{p-1} + X_{p-2}}{a_pY_{p-1} + Y_{p-2}}.$$

On a donc, conformément à la définition des fonctions X et Y,

$$X_p = a_pX_{p-1} + X_{p-2}.$$

et

$$Y_p = a_pY_{p-1} + X_{p-2}.$$

La loi de récurrence des fonctions X et Y est donc démontrée.

212. Remarque. *Les nombres X_p et Y_p augmentent sans cesse, et croissent au delà de toute limite, en même temps que* p.

On a en effet

$$X_p > X_{p-1} + X_{p-2}$$

et

$$Y_p \geqslant Y_{p-1} + Y_{p-2}.$$

La remarque en question est la conséquence manifeste de ces inégalités.

213. Théorème V. *Les termes de deux réduites consécutives*

$$\frac{X_p}{Y_p}, \quad \frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}};$$

satisfont, quel que soit p, *à l'égalité*

$$X_{p-1}Y_p - X_pY_{p-1} = (-1)^{p-1}.$$

Cette propriété se vérifie facilement pour les deux premières réduites. En effet les égalités

$$X_1 = a_1 \quad X_2 = a_1a_2 + 1$$
$$Y_1 = 1 \quad Y_2 = a_2.$$

donnent bien

$$X_1Y_2 - Y_1X_2 = -1.$$

Supposons donc que la loi ait été reconnue exacte pour toutes les réduites, jusqu'à $\frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}}$, inclusivement. Les relations

$$X_p = a_pX_{p-1} + X_{p-2}.$$
$$Y_p = a_pY_{p-1} + Y_{p-2}.$$

donnent, par combinaison,

$$X_pY_{p-1} - Y_pX_{p-1} = -(X_{p-1}Y_{p-2} - X_{p-2}Y_{p-1}).$$

Mais on a, par hypothèse,

$$X_{p-1}Y_{p-2} - X_{p-2}Y_{p-1} = (-1)^{p-1}.$$

On obtient donc, finalement, la relation

$$X_pY_{p-1} - Y_pX_{p-1} = (-1)^p.$$

La loi est donc générale.

214. Théorème VI. *Les réduites sont des fractions irréductibles.*

L'égalité que nous venons d'établir

$$X_pY_{p-1} - Y_pX_{p-1} = (-1)^p$$

prouve, en effet, que X_p et Y_p qui sont des nombres entiers, ne peuvent admettre un diviseur commun, sans que ce nombre soit un diviseur de $(-1)^p$. Ainsi X_p et Y_p n'ont d'autre diviseur commun que l'unité; ces deux nombres sont donc premiers entre eux.

215. Théorème VII. *Une fraction continue a une valeur qui est toujours comprise entre celles de deux réduites consécutives : elle est plus grande que la réduite d'indice impair, et plus petite que la réduite d'indice pair.*

On a, comme nous venons de le montrer

$$(1) \quad \frac{X_p}{Y_p} = \frac{a_p X_{p-1} + X_{p-2}}{a_p Y_{p-1} + Y_{p-2}}.$$

Posons

$$\lambda = | \, a_p, a_{p+1}, \dots a_n |,$$

a_n étant le dernier élément de la fraction continue proposée f. La valeur de f se déduit de la formule (1) en remplaçant, dans celle-ci, a_p par λ. On a donc

$$(2) \quad f = \frac{\lambda X_{p-1} + X_{p-2}}{\lambda Y_{p-1} + Y_{p-2}}.$$

On tire de là

$$f - \frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}} = \frac{X_{p-2} Y_{p-1} - Y_{p-2} X_{p-1}}{Y_{p-1}(\lambda Y_{p-1} + Y_{p-2})}$$

et,

$$f - \frac{X_{p-2}}{Y_{p-2}} = \frac{\lambda (X_{p-1} Y_{p-2} - Y_{p-1} X_{p-2})}{Y_{p-2}(\lambda Y_{p-1} + Y_{p-2})}.$$

Soit maintenant

$$U = f - \frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}} \quad \text{et} \quad V = f - \frac{X_{p-2}}{Y_{p-1}}.$$

On a, par application du théorème V, les deux égalités

$$(A) \quad \begin{cases} U = \dfrac{(-1)^{p-2}}{Y_{p-1}(\lambda Y_{p-1} + Y_{p-2})} \\ V = \dfrac{(-1)^{p-1} \cdot \lambda}{Y_{p-2}(\lambda Y_{p-1} + Y_{p-2})} \end{cases};$$

et si l'on suppose que p soit pair on a $U > 0$, et $V < 0$; le théorème en question est donc démontré.

216. Théorème VIII. *La réduite* $\frac{X_p}{Y_p}$ *est plus voisine de la fraction continue* f, *que la réduite précédente* $\frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}}$.

Les égalités (A) donnent

$$\frac{U}{V} = -\frac{Y_{p-2}}{\lambda Y_{p-1}}.$$

On sait d'ailleurs que λ est plus grand que 1, et que Y_{p-1} est supérieur à Y_{p-2}: pour ce double motif, $\frac{U}{V}$ est une fraction proprement dite. On peut donc dire que le nombre $\left(f - \frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}}\right)$ est, en valeur absolue, plus faible que $\left(f - \frac{X_{p-2}}{Y_{p-2}}\right)$.

Cette propriété remarquable des réduites leur a fait donner le nom de *fractions convergentes;* et l'on veut exprimer, par ce mot, que les réduites se rapprochent, sans cesse, de la valeur de f, quand leur indice augmente.

217. Remarque. Il résulte de ce qui précède que la suite

$$(1) \quad \frac{X_1}{Y_1}, \quad \frac{X_3}{Y_3}, \ldots$$

est formée de nombres toujours croissants: et qu'au contraire les nombres

$$(2) \quad \frac{X_2}{Y_2}, \quad \frac{X_4}{Y_4}, \ldots$$

sont décroissants. De plus un nombre quelconque de (1) est inférieur au plus petit nombre de la suite (2).

218. Théorème IX. *Il n'existe aucun nombre commensurable qui s'approche plus de f, qu'une réduite $\frac{X_p}{Y_p}$, et qui s'exprime par des nombres plus simples que X_p et Y_p.*

Considérons les trois nombres

$$(1) \quad \frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}}, \quad f, \quad \frac{X_p}{Y_p}.$$

Nous supposons que p soit pair, pour fixer les idées; les trois nombres (1) sont, dans cette hypothèse, rangés par ordre de grandeur croissante.

Soit $\frac{\alpha}{\beta}$ le nombre proposé, nombre qui est supposé plus voisin de f que $\frac{X_p}{Y_p}$. Il est alors nécessaire que $\frac{\alpha}{\beta}$ fasse partie des nombres qui sont compris dans l'un ou l'autre des deux intervalles

$$\left(\frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}}, \ f\right) \quad ; \quad \left(f, \ \frac{X_p}{Y_p}\right).$$

Dans l'un et l'autre cas, on peut dire que les trois nombres

$$\frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}}, \quad \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{X_p}{Y_p};$$

sont rangés par ordre de grandeur croissante; on a donc

$$\frac{X_p}{Y_p} - \frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}} > \frac{\alpha}{\beta} - \frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}} > 0.$$

On peut remarquer, d'ailleurs, que l'on a $X_p Y_{p-1} - Y_p X_{p-1} = 1$; par suite,

$$\beta > Y_p(\alpha Y_{p-1} - \beta X_{p-1}) > 0.$$

Il résulte d'abord de là que $\alpha Y_{p-1} - \beta X_{p-1}$, est un nombre entier et positif; il est donc au moins égal à 1.

Ainsi, on a bien

$$\beta > Y_p.$$

Le même raisonnement appliqué aux fractions

$$\frac{Y_p}{X_p}, \quad \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{Y_{p-1}}{X_{p-1}}$$

prouverait que l'on a aussi

$$\alpha > X_p.$$

DIX-SEPTIÈME LEÇON

FRACTIONS CONTINUES ILLIMITÉES. — ANALYSE INDÉTERMINÉE

219. Définition. Soit la fraction continue x,

$$(1)\quad x = |\, a_1, a_2, a_3, \dots a_n \,|.$$

Supposons que le nombre n des éléments croisse au delà de toute limite et considérons les deux suites (A) et (B),

$$\text{(A)}\quad \frac{X_1}{Y_1}, \quad \frac{X_3}{Y_3}, \quad \frac{X_5}{Y_5}, \dots$$

$$\text{(B)}\quad \frac{X_2}{Y_2}, \quad \frac{X_4}{Y_4}, \quad \frac{X_6}{Y_6}, \dots$$

formées ; la première suite, avec les réduites d'indice impair ; l'autre, avec celles d'indice pair. La suite (A) comprend des nombres toujours croissants mais tous inférieurs à $\frac{X_2}{Y_2}$; ces nombres ont donc une limite ; soit θ cette limite. D'autre part, la suite (B) est constituée par des nombres toujours décroissants, mais qui sont tous supérieurs à $\frac{X_1}{Y_1}$; ces nombres ont aussi une limite θ'. Il est facile de reconnaître que l'on a $\theta = \theta'$. En effet, soit $\frac{X_p}{Y_p}$ un nombre de la suite (A) ; $\frac{X_{p+1}}{Y_{p+1}}$ est alors le nombre correspondant de la suite (B) : on a d'ailleurs,

$$\frac{X_{p+1}}{Y_{p+1}} - \frac{X_p}{Y_p} = \frac{1}{Y_p Y_{p+1}}$$

Les nombres Y_p, et Y_{p+1} croissent au delà de toute limite; par suite $\frac{1}{Y_pY_{p+1}}$ tend vers zéro, quand p croît au delà de toute limite. Les deux limites θ et θ' sont donc égales.

220. Fractions continues périodiques. Lorsque dans une fraction continue illimitée, fraction dont la valeur est maintenant bien définie, on suppose que les éléments se reproduisent dans un ordre constant, on dit que cette fraction continue est périodique. On distingue deux sortes de fractions continues périodiques : 1° *La fraction périodique simple*

$$x = \left| a_1, a_2, \dots a_p ; a_1, a_2 \dots a_p ; a_1, a_2 \dots a_p ; \dots \right|$$

qui est telle que les p premiers éléments se reproduisent dans le même ordre : 2° *La fraction périodique mixte*

$$x = \left| \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_h, a_1, a_2 \dots a_p, a_1, a_2 \dots a_p ; \dots \right|$$

dans laquelle la partie périodique est précédée d'éléments ne faisant pas partie de la période.

221. Théorème de Lagrange. *La racine d'une équation du second degré, à coefficients commensurables, peut se développer en fraction continue périodique.*

1er *Cas.— Les deux racines sont de signes contraires.* Nous distinguerons plusieurs cas, dans la démonstration de cette propriété. Nous supposerons d'abord que les racines de l'équation proposée ont des signes contraires, et que les dénominateurs, s'il en existe, ont été chassés.

L'équation que nous allons examiner peut alors s'écrire

$$\text{(P)} \quad Ax^2 + 2Bx - C = 0 ;$$

en supposant : 1° que A, B, C sont des nombres entiers ; 2° que A et C désignent des nombres positifs. Si le coefficient n'était pas un nombre pair, on changerait x en $2X$, et l'on considérerait l'équation en X. Il va sans dire que (B^2+AC) n'est pas un carré parfait ; car, si (B^2+AC) était un carré parfait, l'équation donnée aurait ses racines commensurables,

et nous savons que ces nombres se développent en fraction continue limitée.

Développement de la racine positive. Ces conditions diverses étant supposées remplies par les coefficients de l'équation (P) nous allons développer en fraction continue sa racine positive x.

$$(1) \quad x = \frac{-B + \sqrt{B^2 + AC}}{A}.$$

Ce nombre x est compris entre deux nombres entiers consécutifs α_1, $\alpha_1 + 1$. Nous pouvons donc poser

$$(2) \quad x = \alpha_1 + \frac{1}{x_1};$$

en supposant $x_1 > 1$. L'équation (P), d'après cette formule, devient

$$A\left(\alpha_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + 2B\left(\alpha_1 + \frac{1}{x_1}\right) - C = 0.$$

ou

$$(P_1) \quad A_1 x_1^2 + 2B_1 x_1 - C_1 = 0,$$

après avoir posé

$$(3) \quad \begin{cases} A_1 = C - 2B\alpha_1 - A\alpha_1^2 \\ B_1 = -A\alpha_1 - B \\ C_1 = A \end{cases}$$

L'équation (P_1) donne lieu aux remarques suivantes:

1° *Les coefficients* A_1, B_1, C_1 *sont des nombres entiers.*

2° *Les nombres* A_1 *et* C_1 *sont positifs.*

3° *On a*

$$(\alpha) \quad B_1^2 + A_1 C_1 = B^2 + AC.$$

Les formules (3) prouvent immédiatement que A_1, B_1, C_1, sont des nombres entiers et que C_1 est positif. Il reste à montrer que A_1 est positif et que l'égalité (α) est exacte.

Je dis d'abord que l'on a $A_1 > 0$. En effet la racine positive de l'équation (P), étant comprise entre x_1 et $(x_1 + 1)$, elle est aussi comprise entre x^1 et $+\infty$. On déduit de là que le premier membre de (P), prend une valeur négative, pour $x = x_1$. On a donc bien

$$Ax_1^2 + 2Bx_1 - C < 0$$

ou

$$A_1 > 0.$$

Passons au second point. Les formules (3) donnent

$$B_1^2 + A_1C_1 = (B + Ax_1)^2 + A(C - 2Bx_1 - Ax_1^2)$$

ou, après réduction,

$$B_1^2 + A_1C_1 = B^2 + AC.$$

Le théorème de Lagrange résulte, comme on va le voir, des remarques précédentes.

De l'équation en x_1, on peut déduire une équation en x_1, comme nous avons déduit l'équation P_1, de l'équation P. On obtient ainsi, par une sorte de voie récurrente, une suite d'équations donnant lieu au tableau suivant :

$$(\text{II}) \begin{cases} (\text{P}) & Ax^2 + 2Bx - C = 0 \\ (\text{P}_1) & A_1x_1^2 + 2B_1x_1 - C_1 = 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\text{P}_n) & A_nx_n^2 + 2B_nx_n - C_n = 0. \end{cases}$$

On a, d'ailleurs, les conditions suivantes :

$$x = x_1 + \frac{1}{x_1} \quad x_1 = x_2 + \frac{1}{x_2} \quad \ldots \quad x_{n-1} = x_n + \frac{1}{x_n};$$

et,

$$C_n = A_{n-1};$$

$$(B_n)^2 + A_nC_n = B^2 + AC.$$

On tire, de ces deux dernières égalités, la relation

$$(4) \quad (B_n)^2 + A_nA_{n-1} = h$$

en désignant par h le nombre entier et positif ($B^2 + AC$). Les nombres positifs A_n, A_{n-1}, B_n; qui peuvent satisfaire à (4), sont nécessairement *en nombre fini;* les combinaisons que l'on peut faire avec ces nombres en les écrivant dans l'ordre

$$A_n \quad B_n \quad A_{n-1}$$

sont elles-mêmes *en nombre fini.* Il est donc certain qu'en formant le tableau (II), on trouvera, à un certain moment, une équation (P_i), qui sera identique à une équation (P_j), précédemment écrite.

Lorsque ce résultat inévitable aura été atteint, les calculs se reproduiront identiquement dans l'ordre où ils auront été obtenus. On aura donc, pour x, un développement en fraction continue périodique.

Développement de la racine négative. Changeons x en $-x$, dans l'équation proposée; celle-ci devient

$$Ax^2 - 2Bx - C = 0.$$

En développant, en fraction continue, et comme nous venons de l'expliquer, la racine positive de cette équation, la valeur trouvée, changée de signe, représente le développement de la racine négative.

2me *Cas. — Les deux racines sont positives.* Soit α la plus grande de ces deux racines. Elle est comprise entre deux nombres entiers consécutifs a, $a + 1$. Nous supposerons d'abord que la seconde racine β n'est pas comprise dans cet intervalle. En posant $x = a + X$, l'équation en X aura deux racines réelles X' et X'', et l'on calculera les racines α et β par les formules

$$\alpha = a + X'$$
$$\beta = a + X'',$$

X' est donc, d'après cela, une quantité positive et plus petite que l'unité; X' est, au contraire, une quantité négative. On

pourra donc développer X′ et X″ en fractions continues, par la méthode indiquée au paragraphe précédent.

Dans le cas où les deux racines α et β sont comprises entre les deux nombres entiers consécutifs a, $a+1$, les nombres X′ et X″ sont, l'un et l'autre, positifs, et plus petits que l'unité. On pose alors

$$x = a + \frac{1}{y}.$$

L'équation en y a deux racines positives, et plus grandes que l'unité. Si la plus grande racine de cette équation est comprise entre deux nombres entiers consécutifs b, $b+1$; l'autre racine étant inférieure à b, on retombe sur le cas que nous venons d'examiner. Sinon on pose

$$y = b + \frac{1}{z};$$

et ainsi de suite. Il arrive certainement un moment où l'on obtient une équation dans laquelle la plus grande racine est comprise entre deux nombres entiers consécutifs, l'autre n'étant pas renfermée dans cet intervalle. Ceci résulte de ce fait, que la différence entre les racines α et β, est une quantité finie; tandis que la différence entre deux réduites consécutives tend vers zéro, quand le nombre des éléments croît au delà de toute limite. Il n'est donc pas possible que les deux racines α et β, qui se développent en fractions continues, d'après les formules

$$x = a + \frac{1}{y}, \quad y = b + \frac{1}{z}, \dots ;$$

aient, indéfiniment, les mêmes éléments.

3ᵉ *Cas. — Les deux racines sont négatives.* On ramène immédiatement ce cas, au précédent, en changeant x en $(-x)$.

222. Applications. Les racines d'une équation du second degré étant de la forme $\alpha + \sqrt{\beta}$, α et β désignant des nombres

commensurables, le théorème de Lagrange prouve que ces quantités irrationnelles sont susceptibles d'être développées en fractions continues périodiques. Nous nous proposons de vérifier cette propriété sur quelques exemples simples.

1[er] *Exemple.— Développer* $\sqrt{a^2+1}$ *en fraction continue,* a *désignant un nombre entier et positif.*

Soit

$$x=\sqrt{a^2+1},$$

x est compris entre a et $(a+1)$. Posons

$$x=a+\frac{1}{x_1}.$$

On a donc

$$a+\frac{1}{x_1}=\sqrt{a^2+1}$$

d'où

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}=a+\sqrt{a^2+1}.$$

D'après cette formule la valeur de x_1 est comprise entre $2a$ et $(2a+1)$. Soit

$$x_1=2a+\frac{1}{x_2}$$

ou

$$a+\sqrt{a^2+1}=2a+\frac{1}{x_2}.$$

On a donc

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}$$

ou

$$x_2=x_1.$$

La périodicité du développement se trouve ainsi vérifiée; et l'on a

$$x = |\ a; 2a, 2a, 2a, \dots\ |.$$

En supposant, successivement dans cette formule: $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$; on trouve

$$\sqrt{2} = |\ 1, 2, 2, \dots\ |$$
$$\sqrt{5} = |\ 2, 4, 4, \dots\ |$$
$$\sqrt{10} = |\ 3, 6, 6, \dots\ |$$

2° *Exemple.— Développer* $\sqrt{a^2 + 2a}$ *en fraction continue,* a *désignant un nombre entier et positif.*

Soit

$$x = \sqrt{a^2 + 2a}$$

x est compris entre a et $a + 1$. Posons

$$x = a + \frac{1}{x_1}.$$

On a

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2a}}{2a},$$

on pose alors

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2},$$

on trouve

$$x_2 = a + \sqrt{a^2 + 2a}.$$

Ce nombre x_2 est compris entre $2a$ et $(2a + 1)$. Posons donc

$$x_2 = 2a + \frac{1}{x_3},$$

on trouve $x_3 = x_1$. On a ainsi

$$x = \sqrt{a^2 + 2a} = |\ a; \overline{1, 2a}; \overline{1, 2a}; \dots\ |.$$

Par exemple

$$\sqrt{3} = \left| 1 ; \overline{1, 2} ; \overline{1, 2} ; \ldots \right|.$$

233. Théorème. *Lorsqu'une quantité est développée en fraction continue périodique, elle peut être considérée comme une quantité irrationnelle de la forme* $\alpha + \sqrt{6}$.

Ce théorème est le réciproque de celui de Lagrange.

Soit une fraction continue périodique.

$$(1) \quad x = \left| x_1, x_2 \ldots x_k ; a_1, a_2, \ldots a_p ; a_1, a_2, \ldots a_p ; \ldots \right|$$

Posons

$$(2) \quad y = \left| \overline{a_1, a_2, \ldots a_p} \quad \overline{a_1, a_2, \ldots a_p} \quad \ldots \right|,$$

on a donc

$$y = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_p + \cfrac{1}{z}}}},$$

z désignant une fraction continue dont les éléments sont les nombres $a_1, a_2, \ldots a_p$ se reproduisant sans cesse, dans le même ordre. Or, nous avons montré, au début de cette leçon, qu'une pareille quantité avait une valeur unique, bien déterminée. Cette valeur étant désignée par y, on a donc

$$y = \left| a_1, a_2, \ldots a_p, y \right|.$$

En effectuant le calcul indiqué dans le second nombre, celui-ci prend la forme $\frac{Ay + B}{A'y + B'}$. On conclut de là l'égalité

$$(3) \quad y = \frac{Ay + B}{A'y + B'}.$$

On a d'autre part

$$x = | x_1, x_2, .. x_k, y |.$$

Le second membre peut se mettre sous la forme $\frac{Cy+D}{C'y+D'}$;
on a donc

$$(4) \quad y = \frac{D'x - D}{C - C'x}.$$

Les égalités (3) et (4) donnent pour déterminer x une équation du second degré. Du moins, elle n'est pas d'un degré supérieur; je dis qu'elle n'est pas non plus d'un degré inférieur. En effet si la relation qui détermine x était

$$\alpha x + \beta = 0;$$

α étant différent de zéro, on aurait, puisque x est une valeur finie,

$$x = -\frac{\beta}{\alpha},$$

et le nombre x, étant commensurable, serait développable en fraction continue limitée. Ceci est en contradiction : d'une part avec l'hypothèse, et, d'autre part, avec la propriété démontrée plus haut (§ 209).

224. Développement des transcendantes en fractions continues. Ce développement repose sur la propriété suivante :

Théorème. *Soit une quantité incommensurable* X *dont la valeur est comprise entre deux nombres commensurables* A *et* B *; si* A *et* B *développés en fractions continues admettent les nombres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$, *pour leurs* h *premiers éléments, on peut affirmer que ces nombres sont aussi les* h *premiers éléments de* X *développé en fraction continue.*

On peut d'abord remarquer que tout nombre commensurable, ou non, étant nécessairement compris entre deux

nombres entiers consécutifs, toute quantité est susceptible d'être développée en fraction continue. Ceci prouve la possibilité du développement de x en fraction continue. Ce développement est unique (§ 209), et nous voulons démontrer qu'il a, pour premiers éléments, les nombres $x_1, x_2, \dots x_h$.

En effet les égalités

$$A = | x_1, x_2, \dots x_h, \lambda, \dots |$$
$$B = | x_1, x_2, \dots x_h, \mu, \dots |$$

prouvent que A et B sont compris dans l'intervalle x_1, $x_1 + 1$. Par suite X, quantité comprise entre A et B, a elle-même une valeur renfermée entre ces deux nombres entiers consécutifs; x_1 est donc le premier élément de X.

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{A - x^1} = | x_2, \dots |$$

et,

$$\frac{1}{B - x_1} = | x_2, \dots |.$$

La quantité $\frac{1}{X - x_1}$ est comprise dans l'intervalle $\frac{1}{A - x_1}$, $\frac{1}{B - x_1}$; par suite, et d'après ces égalités, $\frac{1}{X - x_1}$, a une valeur comprise entre les deux nombres entiers consécutifs x_2, $x_2 + 1$: x_2 est donc le second élément de x; et ainsi de suite.

225. Calcul de π. Prenons comme exemple le nombre transcendant π : il est compris entre les deux quantités fractionnaires

$$A = \frac{314159265 3}{10^9} \text{ et } B = \frac{3141592654}{10^9}.$$

En développant A et B en fractions continues on trouve

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1 comme éléments communs à ces deux développements. On a donc

$$\pi = | 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \ldots |$$

D'après cela on a des valeurs approchées de π, savoir :

$$\pi_1 = \frac{3}{1}, \pi_2 = \frac{22}{7}, \pi_3 = \frac{333}{106}, \pi_4 = \frac{355}{113}, \pi_5 = \frac{103993}{33102}.$$

Ces rapports sont célèbres parce qu'ils donnent, de la façon la plus simple (§ 218), une valeur approchée de π. Le rapport π_2 est attribué à *Archimède* ; π_3 a été donné par *Rivard*; et π_4, par *Métius*.

ANALYSE INDÉTERMINÉE.

226. Définition. On donne le nom d'analyse indéterminée à cette partie de l'algèbre qui se propose de trouver les solutions entières d'un système d'équation, système dans lequel il y a plus d'équations que d'inconnues. On a l'habitude de rattacher l'analyse indéterminée du premier degré à deux inconnues aux applications des fractions continues; parce que le principe qui sert de base à la résolution en nombres entiers de l'équation.

$$ax + by = c,$$

peut se démontrer très simplement en utilisant certaines propriétés des réduites. Il importe pourtant d'observer, et nous établirons ce point tout à l'heure, que les deux théories sont indépendantes l'une de l'autre.

Quoi qu'il en soit, le principe fondamental, auquel nous avons fait allusion tout à l'heure, est celui que nous allons, maintenant, énoncer et démontrer.

227. Théorème. *Quand deux nombres* A *et* B *sont premiers entre eux, on peut toujours trouver deux nombres* x *et* y, *entiers et de signes contraires, tels que l'on ait*

$$Ax + By = 1.$$

En effet, développons $\frac{A}{B}$ en fraction continue. Soit

$$\frac{A}{B} = \left| a_1, a_2, \dots a_n \right|,$$

et posons

$$\frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} = \left| a_1, a_2, \dots a_{n-1} \right|.$$

On peut considérer $\frac{A}{B}$ et $\frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}}$ comme étant deux réduites consécutives : on a donc, par une propriété connue (§ 213) :

$$AY_{n-1} - BX_{n-1} = (-1)^n.$$

Si l'on pose

$$x = (-1)^n Y_{n-1}$$
$$y = (-1)^{n+1} X_{n-1},$$

on a bien

$$Ax + By = 1$$

x et y étant des nombres entiers et de signes contraires.

Autrement. Cette propriété remarquable des nombres premiers peut aussi être établie élémentairement, comme il suit.

Cherchons à déterminer le plus grand commun diviseur de A et de B : nous sommes ainsi conduits aux égalités

$$A = BQ_1 + R_1$$
$$B = R_1Q_2 + R_2$$
$$R_1 = R_2Q_3 + R_3$$
$$\dots\dots\dots$$
$$R_{n-2} = R_{n-1}Q_n + R_n.$$

Le dernier reste obtenu R_n est égal à l'unité. Il résulte de ces égalités que tous les nombres R_1, R_2, etc... sont de la

forme arithmétique $Ax + By$: le dernier d'entre eux, R_n est donc aussi de cette forme ; et ceci établit la proposition.

228. Résolution de l'équation $ax + by = c$. Nous supposerons que a, b et c sont des nombres entiers et qu'il n'existe aucun nombre divisant à la fois a, b et c. Cette double condition est toujours réalisable, avec des coefficients commensurables. On peut aussi supposer que a et b représentent deux nombres premiers entre eux ; car si a et b admettaient un diviseur δ, δ ne divisant pas c, il n'existerait aucune solution entière de l'équation proposée.

Cette remarque faite, a et b étant premiers entre eux, il existe deux nombres u et v vérifiant l'égalité

$$au + bv = 1.$$

On a donc

$$acu + bcv = c.$$

En comparant cette égalité, avec l'équation proposée

$$(1) \quad ax + by = c,$$

on voit que les nombres entiers $x' = cu$, $y' = cv$,

constituent une solution de cette équation.

Nous allons montrer maintenant qu'il existe une infinité d'autres solutions entières de (1) et nous ferons connaître les formules qui donnent *toutes ces solutions*.

Soit x'' y'', une seconde solution entière de (1), en admettant, pour un instant, qu'il y ait pour l'équation proposée une solution autre que celle que nous avons trouvée tout à l'heure. On a donc

$$ax'' + by'' = c$$

et

$$ax' + by' = c;$$

par suite,

$$a(x''-x')+b(y''-y')=0,$$

ou

$$\frac{a}{b}=\frac{y'-y''}{x''-x'}.$$

On sait, d'ailleurs, que si une fraction $\frac{y'-y''}{x''-x'}$ est égale à une autre fraction irréductible $\frac{a}{b}$ ses termes sont des équimultiples de a et de b. *En désignant par* t *un nombre entier arbitraire*, on a donc

$$y'-y''=at$$
$$x''-x'=bt$$

ou

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} y''=y'-at \\ x''=x'+bt. \end{cases}$$

Mais nous avons admis qu'il y avait, à l'équation proposée, une solution autre que x', y' ; il importe de vérifier ce point. On remarquera à cet effet que l'on a, quel que soit t,

$$a(x'+bt)+b(y'-at)=c,$$

puisqu'on suppose

$$ax'+by'=c.$$

Il y a donc une infinité de solutions entières à l'équation proposée et il résulte de ce qui précède que les formules (A) donnent toutes ces solutions; en y comprenant même la solution x', y' qui correspond à l'hypothèse $t=0$.

EXERCICES

1. *Développer en fraction continue la racine positive de l'équation*

$$bx^2-abx-a=0$$

dans laquelle a *et* b *désignent deux nombres entiers et positifs.*

On trouvera

$$x = \left| \overline{a, b}; \overline{a, b}; \dots \right|$$

2. *Développer* $x = \frac{6 + \sqrt{6}}{6}$, *en fraction continue, et vérifier le résultat obtenu.*

On trouve

$$x = \left| 1, 2; \overline{2, 4}; \overline{2, 4}; \dots \right|,$$

et on vérifie que x est bien la plus grande racine de l'équation

$$6x^2 - 12x + 5 = 0.$$

3. *Montrer que les premiers éléments de* $\sqrt[3]{11}$, *développée en fraction continue, sont* 2, 4, 2, 6, *etc...*

4. *Trouver le minimum de* ax + by *quand on donne à* x *et* y *des valeurs arbitraires, mais entières.*

On distinguera deux cas, suivant que a et b sont premiers entre eux, ou non. Si a et b sont premiers entre eux, les nombres u et v, tels que l'on ait $au + bv = 1$, constituent la solution du problème.

Dans l'autre cas, quand on suppose que a et b admettent un plus grand commun diviseur δ, on pose

$$a = a'\delta \quad b = b'\delta$$

et l'on a

$$ax + by = \delta(a'x + b'y).$$

Le minimum de $ax + by$ a lieu quand $a'x + b'y$ prend sa valeur minima: etc...

5. *Trouver une infinité de solutions entières de l'équation*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

On remarque que cette équation peut s'écrire

$$(x + yi)(x - yi) = z^2;$$

on pose alors

$$x + yi = (\alpha + \beta i)^2;$$

on en déduit

$$x - yi = (\alpha - \beta i)^2.$$

On trouve ainsi

$$x_1 = \alpha^2 - \beta^2 \quad y_1 = 2\alpha\beta \quad z_1 = \alpha^2 + \beta^2,$$

dans ces formules α et β désignent des nombres entiers arbitraires.
Les formules

$$x_2 = \theta(t^2 - 1) \quad y_2 = 2t\theta \quad z_2 = \theta(t^2 + 1)$$

dans lesquelles t et θ représentent encore deux nombres entiers arbitraires, donnent aussi une infinité de solutions de l'équation proposée. On pourra vérifier que ces formules ne rentrent pas les unes dans les autres et que, par conséquent, ni les unes, ni les autres, ne donnent toutes les solutions cherchées.

6. *Trouver une infinité de solutions entières de l'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

On peut se servir, à cet effet, de l'identité

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)^2 \equiv (a^2 - ab - ac + bc)^2 + (b^2 - bc - ba + ac)^2 + (c^2 - ac - bc + ab)^2.$$

7. *Trouver en nombres commensurables, une infinité de solutions de l'equation*

$$x^2 + y^3 = z^2.$$

On verra, quand nous traiterons de la résolution de l'équation du troisième degré, que la formule renferme, entre autres éléments, un radical carré portant sur une quantité U, somme de deux nombres : l'un carré parfait, l'autre cube parfait Cette formule se prête donc plus commodément au calcul lorsque U est un carré parfait.

On trouve une infinité de solutions de ce genre, par les formules;

$$x = \frac{(2t+1)(t^2+t+1)}{2}$$
$$y = -t(t+1)$$
$$z = \frac{3t^2 + 3t + 1}{2},$$

t représentant un nombre commensurable arbitraire.

8. *Démontrer que l'équation*

$$7x^2 - 5y^2 - 1 = 0$$

n'admet aucune solution entière.

On remarquera d'abord que y est nécessairement de la forme $(7A \pm 2)$.

On posera alors

$$5(7A \pm 2)^2 + 1 = 7B.$$

et on démontrera que B est toujours terminé par un 3, ou par un 8.

9. *Résoudre le système indéterminé*

$$ax + by + cz = d$$
$$a'x + b'y + c'z = d'$$

On éliminera y et on obtiendra une équation à deux inconnues

$$Px + Qy = R.$$

Soient $x = \alpha + \beta t$, $y = a' + \beta' t$ les solutions entières de cette équation. On aura pour déterminer z et t une équation

$$At + Bz = c$$

qui donnera

$$t = \gamma + \delta\theta$$
$$z = \gamma' + \delta'\theta.$$

Par suite x, y, z s'expriment au moyen de l'indéterminée θ.

10. *Démontrer que si* α *désigne un nombre incommensurable, on peut trouver deux nombres commensurables* m *et* n, *tels que l'on ait*

$$0 < m\alpha - n < \varepsilon$$

ε *étant aussi petit que l'on veut.*

On imagine α développé en fraction continue et en désignant par

$$\frac{X_n}{Y_n} \text{ et } \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}}$$

deux réduites consécutives on a (n étant pair)

$$0 < \alpha - \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} < \frac{X_n}{Y_n} - \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}},$$

ou

$$0 < \alpha Y_{n-1} - X_{n-1} < \frac{1}{Y_n}.$$

DIX-HUITIÈME LEÇON

LES FONCTIONS CONTINUES. — FONCTION ENTIÈRE. — FONCTION EXPONENTIELLE.

229. Définitions. Une fonction de la variable indépendante x est *bien déterminée* dans l'intervalle a, b; lorsque pour toute valeur de x, prise entre a et b, la fonction prend une valeur réelle et unique.

Une fonction $f(x)$ est *croissante*, entre a et b, lorsque pour toutes les valeurs α, et β, de la variable x, valeurs satisfaisant aux inégalités

$$a < \alpha < \beta < b,$$

on a

$$f(\alpha) < f(\beta);$$

elle est *décroissante*, si l'on a au contraire

$$f(\alpha) > f(\beta).$$

Une fonction $f(x)$ est *continue* dans l'intervalle a, b, lorsqu'on suppose qu'elle satisfait aux conditions suivantes :

1° Elle est bien déterminée dans l'intervalle a, b;

2° Elle conserve une valeur finie pour toutes les valeurs de la variable x comprises entre a et b;

3° Si l'on appelle x_1 et x_2 deux valeurs de x prises dans l'intervalle (x_1, x_2); la différence $f(x_1) - f(x_2)$, tend vers zéro, en même temps que $x_1 - x_2$.

Une fonction est croissante pour $x = x'$, quand elle est croissante dans l'intervalle $x' - \varepsilon$, $x' + \varepsilon$: on dit, de même, qu'elle est continue pour $x = x'$, quand elle est continue dans

cet intervalle : ε désigne ici un nombre positif, qu'on peut, d'ailleurs, prendre aussi petit que l'on voudra.

230. Théorème. *Lorsqu'une fonction* f (x) *est continue entre* a *et* b (a < b); *si l'on suppose* f(a) ≠ f(b) *et si l'on désigne par* u *une quantité comprise entre* f (a) *et* f (b), *la fonction* f(x) *prend la valeur* u *pour une valeur de* x *comprise entre* a *et* b.

Considérons les trois nombres $a, \frac{a+b}{2}, b$; et considérons aussi les valeurs correspondantes de la fonction

$$f(a), \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad f(b).$$

Si u est égal à $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ le théorème est démontré ; si non, u est compris entre $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$; ou entre $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $f(b)$. Soient a_1 et b_1, $a_1 < b_1$, les deux valeurs de x qui sont telles que u soit compris entre $f(a_1)$ et $f(b_1)$; on a

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

En effet, si l'on a $a_1 = a$, on a nécessairement $b_1 = \frac{a+b}{2}$; par suite $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$: si l'on suppose au contraire $a_1 = \frac{a+b}{2}$, on a $b_1 = b$; et l'on trouve encore $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

Considérons maintenant les trois nombres a_1, $\frac{a_1+b_1}{2}$, b_1 et les valeurs correspondantes de la fonction

$$f(a_1), \quad f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right), \quad f(b_1).$$

Si l'on suppose $u = f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$, tout est démontré ; si non, on imagine, comme tout à l'heure, les deux nombres a_2 et b_2, $a_2 < b_2$, tels que u soit compris entre $f(a_2)$ et $f(b_2)$; et ainsi de suite.

On forme ainsi un tableau avec les nombres $a_1\ a_2 \dots a_p$, d'une part et $b_1\ b_2 \dots b_p$ d'autre part. Les premiers vont toujours en croissant, ou du moins ne décroissent jamais; on a donc

$$\text{(A)} \qquad a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \dots \leqslant a_p\ ;$$

les autres vont toujours en décroissant, ou du moins ne croissent jamais et, par suite, satisfont aux inégalités

$$\text{(B)} \qquad b_1 \geqslant, b_2 \geqslant, b_3 \dots \geqslant, b_p.$$

On a d'ailleurs, comme nous l'avons reconnu,

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$b_p - a_p = \frac{b_{p-1} - a_{p-1}}{2}.$$

On déduit de ces égalités

$$\text{(C)} \qquad b_p - a_p = \frac{b-a}{2^p}.$$

Il est maintenant facile de conclure.

Les nombres (A) sont tous plus petits que b, ils ne décroissent jamais, ils ont donc une limite α; les nombres (B) sont toujours supérieurs à a, ils ne croissent jamais, ils ont donc, eux aussi, une limite β. D'ailleurs, quand p croît au delà de toute limite la formule (C), indique que la différence $b_p - a_p$ tend vers zéro; les deux limites que nous venons de définir sont donc égales. Nous désignerons par l cette limite commune et nous allons montrer que l'on a

$$u = f(l).$$

Posons, en effet,

$$h = f(a_p) - f(l)$$
$$k = f(b_p) - f(l).$$

Il résulte des explications qui précèdent, que u est compris entre $f(a_p)$ et $f(b_p)$: on a d'ailleurs

$$h - k = f(a_p) - f(b_p).$$

Si nous supposons que p croisse indéfiniment, h et k tendent vers zéro ; par suite, la différence $h - k$. La quantité u a donc une valeur qui est égale à la limite commune des nombres $f(a_p)$ et $f(b_p)$, pour $p = \infty$: cette limite est précisément $f(l)$.

231. Théorème. *Lorsqu'une fonction* f (x) *est continue entre* a *et* b, *si l'on a* $f(a)f(b) < 0$, *l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins une racine, entre* a *et* b.

Cette propriété très importante est la conséquence évidente, et immédiate, de la proposition précédente. Il résulte, en effet, du théorème que nous venons d'établir qu'une fonction continue, dans un intervalle donné, ne peut passer d'une valeur positive à une valeur négative sans être égale à zéro, pour une valeur de la variable, convenablement choisie dans l'intervalle considéré.

232. Théorème. *La fonction* $y = Ax^m$, A *désignant une constante donnée, et* m *un nombre entier, est une fonction croissante et continue, quel que soit* x.

On peut d'abord remarquer que l'identité

$$(1 + \alpha)^p = (1 + \alpha)^{p-1}(1 + \alpha) = (1 + \alpha)^{p-1} + \alpha(1 + \alpha)^{p-1}$$

prouve que si α désigne un nombre positif on a

$$(1 + \alpha)^p > (1 + \alpha)^{p-1}.$$

Ainsi y est une fonction croissante, pour toutes les valeurs de x.

On peut ajouter que cette fonction croît au delà de toute limite, en même temps que x. Cette deuxième propriété est la conséquence évidente de l'inégalité

$$(1+x)^p > 1+px$$

laquelle a lieu quelle que soit la valeur entière de p, x étant positif. Cette inégalité peut être considérée comme une conséquence immédiate de la formule du binôme ; elle peut aussi s'établir directement, en vérifiant qu'elle a lieu pour $p=2$, et en démontrant que si elle est supposée vraie pour $p=n$, elle subsiste pour $p=n+1$. On sait comment on déduit de cette inégalité que les puissances des nombres plus grands que l'unité, croissent au delà de toute limite, en même temps que l'exposant ; ou, au contraire, décroissent au delà de toute limite, quand on les suppose plus petits que l'unité.

Montrons maintenant que y est, quel que soit x, une fonction continue. On peut d'abord remarquer que y est une fonction bien déterminée pour toutes les valeurs de x. On a d'ailleurs, par la formule du binôme

$$(x+h)^m - x^m = hU,$$

ou

$$k = AhU ;$$

k désignant l'accroissement de la fonction, et U un polynôme entier en x. Lorsque h tend vers zéro, U conserve une valeur finie et le produit Uh tend, lui aussi, vers zéro. Ainsi l'accroissement k de la fonction devient nul, en même temps que l'accroissement h de la variable indépendante ; en résumé, Ax^m est donc une fonction continue, pour toutes les valeurs de x.

233. Théorème. *La somme, ou le produit, de plusieurs fonctions continues, est aussi une fonction continue.*

Cette propriété résulte, sans qu'il soit nécessaire d'y insister : 1° de la définition des fonctions continues ; 2° des propriétés établies en arithmétique, sur la limite des sommes ou des produits de quantités variables.

On remarquera que l'énoncé que nous venons de donner ne comprend pas les autres opérations algébriques, telles que : *extraction de racines* et *quotient*. Le théorème en question est en effet soumis, dans ce cas, à certaines restrictions. Si u est une fonction continue entre a et b, $\sqrt{u}$ n'est pas nécessairement une fonction continue, dans cet intervalle, parce que $\sqrt{u}$ n'a pas une valeur réelle, quel que soit u. De même si u et v sont deux fonctions continues entre a et b, $y = \frac{u}{v}$ n'est pas toujours une fonction continue dans cet intervalle, parce qu'il est possible que y prenne, dans certains cas, une valeur infinie pour une valeur de x comprise entre a et b.

234. Théorème. *La fonction entière*

$$y = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m$$

est une fonction continue, quel que soit x.

En effet, chacun des termes de y est une fonction continue, la somme algébrique de ces termes est donc aussi, d'après le théorème précédent, une fonction continue.

235. Théorème. *La fonction entière dont le premier terme* A_0x^m *est positif, croît au delà de toute limite, en même temps que* x.

On a, en effet,

$$y = x^m\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_m}{x^m}\right)$$

ou

$$y = x^m U,$$

en posant

$$U = A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_m}{x^m}.$$

Si l'on suppose que x croisse au delà de toute limite, la

limite d'une somme étant égale à la somme des limites, U a une valeur variable et qui tend vers A_0. D'ailleurs la limite d'un produit est égale au produit des limites ; la variable y est le produit des deux facteurs x^m et U : celui-ci tend vers A_0, l'autre augmente indéfiniment; par suite, y croît au delà de toute limite.

236. Théorème. *La fonction entière* y, *a le signe de son dernier terme* A_m, *pour des valeurs suffisamment petites de la variable.*

En effet, pour $x = 0$, y est égale à A_m; mais y est une fonction continue ; par conséquent, pour des valeurs de x suffisamment petites, elle a une valeur qui diffère de A_m, aussi peu que l'on voudra. On peut conclure de cette remarque, en particulier, que pour ces valeurs de x, le signe de la fonction entière est le même que celui du terme A_m.

FONCTION EXPONENTIELLE.

On appelle *fonction exponentielle* celle qui est définie par l'équation

$$y = a^x;$$

Dans cette égalité a désigne un nombre donné *positif*, et x une variable indépendante, pouvant prendre toutes les valeurs réelles. Nous supposerons d'abord que les valeurs de x sont commensurables.

237. Théorème I. *En supposant* $a > 1$, 1° *la fonction exponentielle* $y = a^x$, *est croissante quelque soit* x; 2° *elle croît au delà de toute limite, en même temps que* x.

1° Soient deux valeurs de la variable : $x, x + h$; en désignant par k, l'accroissement de la fonction exponentielle on a

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1).$$

Dans cette égalité h désigne un nombre positif et commen-

surable. Soit posé $h = \frac{p}{q}$, p et q désignant deux nombres entiers, positifs :

On a

$$a^h - 1 = \sqrt[q]{a^p} - 1.$$

Le nombre a^p étant plus grand que 1, la racine d'indice q, de a^p, est aussi une quantité plus grande que l'unité ; on a, par suite,

$$a^h - 1 > 0;$$

l'accroissement k est donc positif.

2° Montrons maintenant que y croît au delà de toute limite, en même temps que x. Soit x' une valeur commensurable donnée à x ; elle est entière, ou comprise entre deux nombres entiers consécutifs X', $X' + 1$. Lorsque x' augmente au delà de toute limite, X' croît lui-même, sans limite : les nombres

$$a^{X'},\ a^{x'},\ a^{X'+1}$$

sont, d'après ce que nous venons de voir, rangés par ordre de grandeur croissante. D'ailleurs les puissances entières $a^{X'}$, $a^{X-1'}$; d'un nombre a plus grand que l'unité croissent sans limite (§ 232); il en est donc de même de la quantité intermédiaire $a^{x'}$.

238. Théorème. — *La fonction exponentielle* a^x *tend vers l'unité, quand* x *tend vers zéro.*

Nous supposerons d'abord que l'on donne à x les valeurs

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\ \frac{1}{p},\ \text{etc...};$$

nombres inverses des nombres entiers successifs. Considérons les deux valeurs consécutives, ainsi obtenues

$$y_1 = a^{\frac{1}{p}},\quad y_2 = a^{\frac{1}{p+1}};$$

Nous avons $y_1 > y_2$ puisque la fonction a^x est croissante, en même temps que x. D'ailleurs $\sqrt[p]{a}$ est une quantité bien définie, et supérieure à l'unité, quand on suppose $a > 1$. Il résulte de ceci que la suite

$$a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, .. \; a^{\frac{1}{p}};$$

est formée de nombres décroissants, et qui sont tous plus grands que l'unité. Ils ont donc une limite α ; il reste à faire voir que cette limite est l'unité. Posons en effet

$$(1) \quad a^{\frac{1}{p}} = 1 + h_p$$

ou

$$(2) \quad a = (1 + h_p)^p.$$

D'après (1), la limite de h_p, pour $p = \infty$, est $\alpha - 1$; si α n'est pas égal à 1, $1 + h_p$ a pour limite un nombre différent de l'unité. Or cette conclusion est contradictoire avec l'égalité (2) puisque les puissances d'un nombre différent de l'unité ont pour limite zéro, ou l'infini, quand l'exposant croît au delà de toute limite. Ainsi on doit supposer $\alpha = 1$.

Admettons maintenant que x tende vers zéro, par des valeurs commensurables quelconques. Le nombre $\frac{1}{x}$ est toujours compris entre deux nombres entiers consécutifs ; on peut donc poser,

$$p < \frac{1}{x} < p + 1$$

ou

$$\frac{1}{p} > x > \frac{1}{p+1}$$

p désignant un nombre entier qui croît au delà de toute limite, quand x tend vers zéro,

on a donc (§ 237)

$$a^{\frac{1}{p}} > a^x > a^{\frac{1}{p+1}}.$$

Nous venons de montrer que les nombres $a^{\frac{1}{p}}$ et $a^{\frac{1}{p+1}}$ avaient pour limite l'unité, quand p croissait au delà de toute limite; le nombre intermédiaire a^x, a donc aussi pour limite zéro.

239. Théorème. *La fonction exponentielle est une fonction continue, quel que soit x.*

Soit

$$y = a^x;$$

y est une fonction bien déterminée pour toutes les valeurs commensurables de x, les seules que nous examinions, en ce moment. Si nous donnons à x la valeur $x + h$, on obtient, pour la fonction, un accroissement k,

$$k = a^x (a^h - 1).$$

Lorsque h tend vers zéro, nous venons de démontrer que le facteur $a^h - 1$ tendait vers zéro, le produit $a^x (a^h - 1)$, a donc pour limite zéro ; ceci établit la continuité de a^x.

240. Définition de a^x, quand x est incommensurable. Soit x' une valeur incommensurable de x. Nous rappelons qu'un nombre incommensurable peut être défini de la manière suivante. Considérons les deux suites

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p;$$
$$\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p;$$

les nombres α étant croissants, ou tout au moins ne décroissant jamais; et les nombres β décroissants, ou tout au moins ne croissant jamais. On suppose que l'on a, quel que soit p, $\alpha_p < A$, $\beta_p > B$; et, aussi, $\lim (\alpha_p - \beta_p) = 0$, pour $p = \infty$; A et B désignant d'ailleurs des nombres commensurables, fixes, bien déterminés. Dans ces conditions, les nombres α et β ont une limite commune, que l'on peut imaginer, et qui définit la quantité incommensurable x',

Considérons donc les deux suites

$$(1)\quad a^{\alpha_1},\ a^{\alpha_2},\ \ldots\ a^{\alpha_p};$$
$$(2)\quad a^{\beta_1},\ a^{\beta_2},\ \ldots\ a^{\beta_p}.$$

Les nombres α et β sont commensurables, et a est supposé plus grand que l'unité. Les nombres (1) vont en croissant, ou, au moins, ne décroissent jamais ; ils restent inférieurs au nombre fixe, bien déterminé, a^A. D'autre part les nombres (2) vont en décroissant ou tout au moins ne croissent jamais ; d'ailleurs ils sont tous supérieurs à la valeur bien déterminée a^B. Dans ces conditions les nombres (1) et les nombres (2) ont chacun une limite. D'ailleurs cette limite est la même. En effet, si l'on pose

$$u = a^{\beta_p} - a^{\alpha_p}$$

ou

$$u = a^{\alpha_p}\left(a^{\beta_p - \alpha_p} - 1\right)$$

la limite de $\beta_p - \alpha_p$ étant zéro, le facteur $a^{\beta_p - \alpha_p} - 1$ tend aussi vers zéro (§ 238). Ainsi $\lim u = 0$; les deux limites considérées sont égales et c'est cette limite commune, ainsi définie, qui représente la valeur de $a^{x'}$.

Il résulte de cette définition que toutes les propriétés de la fonction exponentielle, propriétés établies en supposant l'exposant commensurable, subsistent pour les valeurs incommensurables de cet exposant.

Nous ferons aussi remarquer qu'un nombre incommensurable x' peut, dans certains cas, être défini comme la limite d'une suite unique de nombres commensurables, toujours croissants, ou toujours décroissants,

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_p.$$

Le nombre $a^{x'}$ est alors, par définition, la limite de la suite

$$a^{\lambda_1},\ a^{\lambda_2},\ \ldots\ a^{\lambda_p},$$

formée par des nombres toujours croissants mais inférieurs à un nombre fixe, ou toujours décroissants, mais supérieurs à une valeur déterminée.

241. Théorème. *Le rapport de la fonction exponentielle* a^x, *à la variable* x, *croît au delà de toute limite, en même temps que* x, *quand on suppose* a *plus grand que l'unité.*

Posons $a = 1 + \alpha$, α étant positif, et donnons à x des valeurs croissant au delà de toute limite : nous supposerons d'abord que ces valeurs sont entières. Dans ces conditions, la formule du binôme donne l'inégalité

$$(1+\alpha)^x > 1 + \alpha x + \frac{x(x-1)}{2}\alpha^2.$$

On a donc

$$\frac{a^x}{x} > \frac{1}{x} + \alpha + \frac{x-1}{2}\alpha^2,$$

et quand x croît au delà de toute limite, il est visible que le second membre de cette inégalité, croît lui-même au delà de toute limite. Ainsi le rapport $\frac{a^x}{x}$ dépasse toute valeur assignable, quand on donne à x des valeurs entières, suffisamment grandes.

Donnons maintenant à la variable x des valeurs croissantes, et quelconques. Toute quantité, non entière, étant comprise entre deux nombres entiers consécutifs, p, $p+1$; on peut toujours poser

$$p < x < p+1.$$

On a, par suite, et pour un double motif,

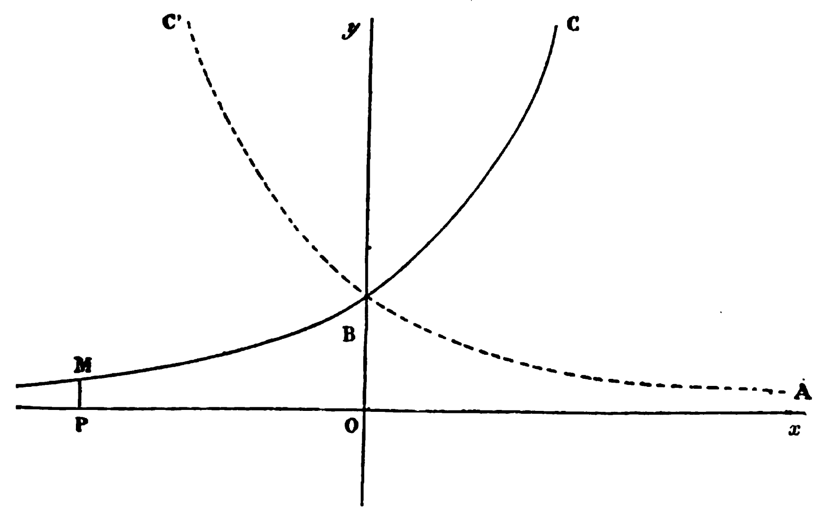
$$\frac{a^p}{p+1} < \frac{a^x}{x} < \frac{a^{p+1}}{p}.$$

ou encore

$$(1) \quad \frac{1}{a}\cdot\frac{a^{p+1}}{p+1} < \frac{a^x}{x} < a\cdot\frac{a^p}{p}.$$

Nous venons de montrer que les nombres $\frac{a^p}{p}$, $\frac{a^{p+1}}{p+1}$ croissaient au-delà de toute limite, en même temps que p ; il résulte de là, et des inégalités (1), que $\frac{a^x}{x}$ croît au delà de toute limite, avec x ; quelles que soient les valeurs entières, fractionnaires ou incommensurables attribuées à x.

242. Représentation de la fonction exponentielle. Si l'on pose $y = a^x$, et si l'on imagine que x et y soient les coordonnées d'un point, on peut représenter les variations de y par la courbe ci-dessous.



On voit que x variant de $-\infty$ à $+\infty$, y a une valeur toujours positive. En supposant $a > 1$ cette valeur tend vers zéro, quand x tend vers $-\infty$. La courbe, comme l'indique la figure, se rapproche donc indéfiniment de ox' ; et la distance MP d'un point M de la courbe à ox', tend vers zéro ; quand le point M s'éloigne à l'infini. Pour $x = 0$ on a $y = 1$; on a pris, sur la figure, OB $= 1$. Enfin x croissant de 0, à $+\infty$, y croît constamment de 1, à $+\infty$; toutes ces particularités sont exprimées par la forme donnée à la courbe ABC.

Nous avons toujours supposé, dans ce qui précède, que a

était plus grand que l'unité; si l'on avait $a < 1$ toutes les propriétés établies subsistent, avec des modifications évidentes. Le trait ponctué de la figure correspond précisément à la représentation graphique de la courbe $y = a^x$, quand on suppose $a < 1$.

EXERCICES

1. *Démontrer que la fonction* $y = \frac{a^x}{x^p}$ *croit quel que soit* p, *au delà de toute limite, en même temps que* x.

On supposera d'abord que p est entier et l'on raisonnera comme nous l'avons fait (§ 241).

On généralise ensuite la propriété en remarquant que toute quantité est toujours comprise entre deux nombres entiers consécutifs.

2. *Considérons la courbe* $y = a^x$ *et soient* M *et* N *les points de cette courbe qui correspondent aux valeurs positives* α, β *de* x; M′ *et* N′ *les points qui correspondent aux valeurs négatives* $-\alpha$, $-\beta$. *Les droites* MN, M′N′ *rencontrent l'axe* ox *respectivement aux points* R *et* R′; *démontrer que les points* R, α, β *forment un système superposable à celui des points* R′, $-\alpha$ $-\beta$. *Déduire de cette remarque que les sous-tangentes aux points correspondants* M, M′ *sont égales.*

3. *Si l'on convient d'appeler points correspondants sur la courbe* $y = a^x$ *ceux qui ont des abcisses égales et de signes contraires, trouver deux points correspondants* M *et* M′ *tels que la corde* MM′ *soit vue de l'origine sous un angle droit.*

Les points cherchés sont ceux qui correspondent aux abcisses $+1$, et -1.

4. *Démontrer que si l'on a une fonction* φ (x), *satisfaisant à la condition*

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x + y)$$

on a

$$\varphi(x) = a^x$$

On fera remarquer, successivement, que l'on a

$1^\circ\ \varphi(0) = 1$; $2^\circ\ \varphi(x)\varphi(-x) = +1$; $3^\circ\ \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) = \varphi(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$; $4^\circ\ [\varphi(x)]^n = \varphi(nx)$, ($n$ entier);

$5^\circ\ [\varphi(x)]^{\frac{p}{q}} = \varphi\left(\frac{p}{q}x\right)$; $6^\circ\ \varphi(x) = [\varphi(1)]^x$.

DIX-NEUVIÈME LEÇON

ÉTUDE DU NOMBRE *e*.

Considérons l'expression

$$y = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m,$$

expression dans laquelle nous allons supposer que l'on donne à m des valeurs positives, entières, et croissantes. Dans ces conditions le nombre y tend vers une limite finie et bien déterminée quand m augmente indéfiniment. Nous voulons établir d'abord ce point important.

243. Limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, pour $m = \infty$. Le nombre m étant entier et positif, on a, par la formule du binôme,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.}\frac{1}{m^3}$$
$$+ \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\,.\,2\ldots p}\frac{1}{m^p} + \ldots + \left(\frac{1}{m}\right)^m,$$

développement que l'on peut écrire

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{2\,!} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{3\,!} + \ldots +$$
$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)}{p\,!} + \ldots + \left(\frac{1}{m}\right)^m.$$

Dans cette formule p désigne un nombre entier, positif, inférieur ou égal à m.

On peut encore écrire le développement précédent, sous la forme

$$\left(1+\frac{m}{1}\right)^m = \text{U} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{p}\right)}{(p+1)!}\text{V};$$

en posant

$$\text{U} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)}{p!},$$

et

$$\text{V} = 1 + \frac{1-\frac{p+1}{m}}{p+2} + \frac{\left(1-\frac{p+1}{2}\right)\left(1-\frac{p+2}{m}\right)}{(p+2)(p+3)} + \cdots$$

Les termes de V sont, à partir du troisième, respectivement plus faibles que ceux de la progression géométrique

$$1 + \frac{1-\frac{p+1}{m}}{p+2} + \frac{\left(1-\frac{p+1}{m}\right)^2}{(p+2)^2} + \cdots;$$

car, pour former les termes de cette progression, on diminue le numérateur et on augmente le dénominateur du terme correspondant de V. Si l'on remarque, en outre, que V est une suite finie, on pourra dire que V est plus petit que la quantité

$$\frac{1}{1-\frac{1-\frac{p+1}{m}}{p+2}}, \quad \text{ou} \quad \frac{p+2}{(p+1)\left(1+\frac{1}{m}\right)}.$$

En désignant par θ, une quantité comprise entre zéro et l'unité, on a donc

$$V = \theta \frac{p+2}{\left(p+1\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)};$$

et, par suite,

$$(A) \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = U + \theta.\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{p}{m}\right)}{(p+1)\,!\,(p+1)} \cdot \frac{p+2}{1+\frac{1}{m}}.$$

Dans cette identité, supposons que l'on donne à m des valeurs qui croissent indéfiniment, l'identité (A) a toujours lieu ; θ est une fonction variable, mais ayant une valeur toujours comprise entre zéro et l'unité ; on peut donc dire que θ a une limite θ_p comprise elle-même, entre zéro et l'unité.

D'ailleurs U a pour limite la suite finie

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \, . \, 2} + \dots + \frac{1}{1 \, . \, 2 \dots p};$$

L'identité (A) prouve donc 1° que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ a une limite, pour $m = \infty$; 2° qu'en désignant cette limite par e, on a

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \, . \, 2} + \dots + \frac{1}{1 \, . \, 2 \, .. \, p} + \frac{1}{(p+1)\,!} \frac{p+2}{p+1} \theta_p \, .$$

Dans cette égalité, θ_p désigne un nombre, variable avec p, mais toujours compris entre zéro et l'unité. Le nombre p est entier et positif, mais aussi grand que l'on veut, puisque la condition $p \leqslant m$ qui était imposée à ce nombre, dans la démonstration précédente, n'empêche pas de supposer p aussi grand que l'on voudra, le nombre m, qu'il ne doit pas dépasser, ayant crû indéfiniment.

Nous poserons maintenant

$$(1) \quad \varepsilon_p = \frac{1}{(p+1)\,!} \frac{p+2}{p+1} \theta_p \, ;$$

et nous dirons que ε_p est le terme complémentaire du développement de e. D'après tout ce qui précède, on peut donc écrire finalement

$$(2) \quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{p!} + \varepsilon_p;$$

ε_p étant, d'après (1), une quantité qui tend vers zéro, quand p croît indéfiniment. C'est la formule que nous nous proposions d'établir (¹).

244. Remarque I. *L'expression* $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ *a pour limite le nombre* e, *quand on suppose que* m *prend des valeurs négatives, mais dont la valeur absolue dépasse tout nombre donné.*

Mettons, dans l'expression $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, le signe de m en évidence, et posons

$$y = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}.$$

Nous allons, dans cette formule, donner à m des valeurs croissant indéfiniment et nous ferons voir que y a une limite égale à e, nombre que nous avons défini tout à l'heure.

On a, en effet

$$y = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m$$

ou encore

$$y = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1 + \frac{1}{m-1}\right);$$

On peut considérer y, comme un produit de deux facteurs :

1. Cette démonstration, due à feu *Bellanger*, nous a été communiquée par M. *Rouché*.

le premier $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}$ a pour limite le nombre *e*, quand *m* croît indéfiniment ; l'autre a pour limite l'unité. En résumé, la limite de *y* est égale à *e*.

245. Remarque II. *L'expression* $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ *a encore pour limite le nombre* e, *quand* m *croît indéfiniment par des valeurs non entières.*

Le nombre *m* est toujours compris entre deux nombres entiers consécutifs $p, p+1$; et l'on peut écrire la double inégalité

$$\text{(H)}\quad \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{\mu}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}<\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1}.$$

Établissons d'abord la première de ces inégalités. On sait que a^x est une fonction croissante quand on suppose $a>1$. On a donc

$$(3)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{\mu}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.$$

On sait d'autre part que x^p est une fonction croissante avec x : on a, par suite,

$$(4)\quad \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{\mu}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\mu}.$$

Comparons (3) et (4) et nous avons

$$\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{\mu}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.$$

Un raisonnement analogue établit la seconde inégalité. Ceci posé, lorsque *m* croît indéfiniment, *p* et $p+1$ croissent aussi indéfiniment, par des valeurs entières. Ainsi les termes extrêmes de la double inégalité (H) ont, l'un et l'autre, pour limite *e*. Le terme intermédiaire $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ a donc, lui aussi, *e* pour limite.

246. Remarque III. *La limite de l'expression y,*

$$y = (1 + x)^{\frac{1}{x}},$$

pour $x = 0$, est égale au nombre e.

Il suffit de changer la notation précédente, et de poser $x = \frac{1}{m}$, pour reconnaître que y a bien pour limite le nombre e.

247. Remarque IV. *La limite de* $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$, *quand* m *croît indéfiniment, est égale à* e^x.

On peut observer qu'en posant $\frac{x}{m} = \frac{1}{m'}$, m' croît indéfiniment en même temps que x. On a d'ailleurs

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \left[\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x = \left[\left(1 + \frac{1}{m'}\right)^{m'}\right]^x.$$

La quantité $\left(1 + \frac{1}{m'}\right)^{m'}$ a pour limite e ; ainsi

$$\lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

De cette remarque, on peut déduire une formule donnant le développement de e^x. Cette formule est

$$(5) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^p}{p!} + r_{1p}$$

r_{1p} désignant le terme complémentaire, terme qui tend vers zéro, quand p croît indéfiniment.

En effet en répétant sur $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ les calculs, et les raison-

nements, que nous avons faits pour établir la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, au moyen de la formule (2), on trouve

$$\text{Lim de}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}+r_{1p},$$

en posant

$$(6) \quad r_{1p} = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}\frac{p+2}{p+1}\theta'_p.$$

Mais nous venons de remarquer que l'on avait aussi

$$\text{Lim de}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x;$$

on a donc finalement

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}+r_{1p}.$$

Il reste seulement à reconnaître que r_{1p} tend vers zéro, quand p croît indéfiniment.

D'après la formule (6) il suffit de montrer qu'en posant

$$y = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!},$$

y tend lui-même vers zéro. Supposons d'abord que x soit un nombre entier, alors x est un des facteurs de $(p+1)!$ On a, d'après cette remarque,

$$y = \frac{x^{p+1}}{1.2\ldots x.(x+1)\ldots(p+1)}$$

ou

$$y = \frac{x^{x-1}}{(x-1)!}\left[\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{x}{x+2}\right)\cdots\left(\frac{x}{p+1}\right)\right],$$

par suite,

$$y < \frac{x^{x-1}}{(x-1)!}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{p+1-x}.$$

Le second membre de cette inégalité peut être considéré comme un produit de deux facteurs : le premier $\frac{x^{x-1}}{(x-1)!}$ a une valeur finie : l'autre représente la puissance d'un nombre plus petit que l'unité, cette puissance croissant indéfiniment avec p. D'après cela, on peut conclure que y tend vers zéro, quand p croît indéfiniment.

Si x n'est pas entier, il est compris entre deux nombres entiers consécutifs et le raisonnement prouve que, dans ce cas, la propriété a encore lieu.

248. Théorème I. *Le nombre* e *est compris entre* 2 *et* 3. Il est d'abord visible que l'on a, en prenant les trois premiers termes du développement

$$e > 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad e > 2,5.$$

Comparons maintenant les deux quantités

$$u = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots p}.$$

et

$$v = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}} + \ldots = \frac{\frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}:$$

nous avons, évidemment,

$$u < v.$$

Posons $v - u = h_p$, h_p est un nombre qui varie avec p, mais qui est certainement toujours supérieur à la différence $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, qui existe entre les deux premiers termes de u et de v.

D'autre part, on a

$$e = 2{,}5 + u + \varepsilon_p$$

ou

$$e = 3 - h_p + \varepsilon_p,$$

ε_p tend vers zéro, h_p est toujours plus grand que $\frac{1}{12}$, en supposant p suffisamment grand ; on a donc

$$e < 3.$$

249. Théorème II. *Le nombre* e *est incommensurable.*

Supposons, pour un instant, que l'on ait $e = \frac{\alpha}{6}$; α, 6 désignant deux nombres entiers. On aurait donc

$$\frac{\alpha}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots 6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots 6(6+1)} + \dots + \varepsilon_p$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $6!$ et faisons passer, dans le premier membre, toutes les parties qui, par le fait de cette multiplication, deviennent des nombres entiers.

En désignant par N, l'ensemble de toutes ces parties entières nous avons

$$\mathrm{N} = \frac{1}{6+1} + \frac{1}{(6+1)(6+2)} + \dots + 6!\,\varepsilon_p.$$

Posons

$$\mathrm{U} = \frac{1}{6+1} + \frac{1}{(6+1)^2} + \dots$$

ou

$$\mathrm{U} = \frac{1}{6}.$$

En comparant ces deux égalités, abstraction faite du terme

$6\,!\,\varepsilon_p$ qui tend vers zéro, quand p croît indéfiniment, on voit que, dans l'hypothèse que nous avons faite, N serait plus petit que $\frac{1}{6}$; conclusion qu'on ne peut admettre puisque N est une quantité positive. Il n'est donc pas possible de supposer que e puisse être commensurable.

250. Théorème. *Le nombre* e *ne peut pas être racine d'une équation du second degré à coefficients commensurables.*

Soit

$$ax^2 + bx + c = 0$$

une équation du second degré ; a, b, c représentant des nombres entiers dont le premier a, peut être supposé positif. Si le nombre e était racine de cette équation, on aurait donc

$$ae^2 + be + c = 0$$

ou

$$ae + b + ce^{-1} = 0.$$

Les formules (2) et (5) permettent d'écrire cette relation de la manière suivante

$$a\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \dots \frac{1}{1\,.\,2 \dots p} + \varepsilon_p\right) + b + c\left(\frac{1}{1\,.\,2} - \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} \dots \right.$$
$$\left. \pm \frac{1}{1\,.\,2 \dots p} + \rho_p\right) = 0$$

ρ_p désignant ce que devient le terme complémentaire η_p quand on suppose $x = -1$.

Multiplions les deux membres de cette égalité par $1\,.\,2 \dots k$, k étant un nombre arbitraire, mais inférieur à p. Un certain nombre de termes prennent la forme entière, nous supposerons que N désigne la somme de ces termes changés de signe. Nous avons donc

$$(7)\quad a\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + k\,!\,\varepsilon_p\right) + c\left(\pm \frac{1}{k+1}\right.$$
$$\left. \pm \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + k\,!\,\rho_p\right) = \text{N}.$$

Dans cette relation comme on suppose $k < p$, les termes $k!\,\varepsilon_p$, et $k!\,\rho_p$, sont aussi petits que l'on veut, pour des valeurs suffisamment grandes de p. Prenons par exemple $k!\,\varepsilon_p$; on a

$$k!\,\varepsilon_p = \frac{1}{(k+1)\ldots\ldots(p+1)}\frac{p+2}{p+1}\theta_p,$$

et, sous cette forme, on voit que $k!\,\varepsilon_p$ tend vers zéro quand p croît indéfiniment.

Le raisonnement que nous avons fait, dans le paragraphe précédent, prouve que le coefficient de a, dans l'égalité (7), est inférieur à $\frac{1}{k}$. D'autre part on peut choisir k pair, ou k impair, de façon que le premier terme du coefficient de c soit positif, ou négatif, en même temps que c. Supposons $c > 0$, pour fixer les idées ; la suite U,

$$U = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots$$

est toujours positive puisqu'elle se compose de groupes

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui sont tous positifs. De plus, cette suite est plus petite que $\frac{k+1}{1}$. En effet, elle peut s'écrire

$$U = \frac{1}{k+1} - \left[\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right] - \text{etc}\ldots;$$

Sous cette forme, on peut remarquer que toutes les parenthèses qui suivent $\frac{1}{k+1}$ sont positives ; on a donc $U < \frac{1}{k+1}$; on arrive ainsi à cette conclusion que N, nombre entier qui

n'est pas nul, parce qu'il est égal, *dans le sens arithmétique du mot*, à une somme de deux quantités positives, satisfait à l'inégalité

$$(8) \quad N < \frac{a}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

Le nombre k peut d'ailleurs être pris aussi grand que l'on veut, puisqu'il est seulement assujetti à être inférieur à p, nombre entier, qui est absolument arbitraire. Or, pour des valeurs de k suffisamment grandes, l'inégalité (8) est évidemment impossible; et cette remarque démontre la proposition en question.

251. Indéterminées 1^{∞}. L'expression $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, quand on y fait $m = \infty$, devient 1^{∞}. Cette forme n'a, par elle-même, aucun sens et constitue, suivant un langage adopté, *une expression indéterminée*. Nous reviendrons prochainement sur les expressions indéterminées; nous voulons seulement montrer comment l'on doit traiter celles qui appartiennent à la forme 1^{∞}.

Désignons par u, v, w trois fonctions de x, et soit y une fonction composée de x, définie par l'égalité

$$y = (u + u)^w.$$

Supposons maintenant que pour $x = x'$ on ait

$$u' = 1 \quad v' = 0 \quad w' = \infty;$$

y prend alors la forme 1^{∞}. Ces expressions indéterminées se ramènent à d'autres expressions plus simples, de la manière suivante.

Posons

$$u + v = 1 + \alpha;$$

α peut être considéré comme une fonction de x qui devient nulle pour $x = x'$. On a d'ailleurs

$$y = \left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha w}$$

ou

$$y = \left[(1+z)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{w(u+v-1)}.$$

Si l'on considère la fonction $w\,(u+v-1)$ et si l'on peut reconnaître qu'elle tend vers une valeur ζ, quand x tend vers x', on aura

$$\text{Lim } y = e^{\zeta}.$$

Exemple. Soit proposé de trouver la valeur de y,

$$y = \left(\frac{\cos x + x + \sin x}{1 + \sin x}\right)^{\cot x},$$

pour $x = 0$. On remarquera d'abord qu'en écrivant y sous la forme

$$y = \frac{(\cos x + x + \sin x)^{\cot x}}{(1 + \sin x)^{\cot x}}$$

on aura la valeur cherchée en déterminant successivement celle des expressions

$$u = (\cos x + x + \sin x)^{\cot x}$$

et

$$v = (1 + \sin x)^{\cot x}.$$

Traitons d'abord la première et, conformément à la méthode indiquée, posons

$$\cos x + x + \sin x = z + 1$$

on a

$$u = \left[(1+z)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{\cos x(\cos x - 1 + x + \sin x)}{\sin x}}.$$

Il faut maintenant déterminer la valeur vers laquelle tend l'expression t,

$$t = \frac{\cos x - 1 + x + \sin x}{\sin x};$$

pour $x = 0$. Or on a

$$t = -\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{x}{\sin x} + 1 ;$$

quand x tend vers zéro, la limite de t est égale à 2. Ainsi

$$\lim u = e^2.$$

Cherchons maintenant la limite de v. On peut écrire v, sous la forme

$$v = \left[(1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\sin x \cot g x} .$$

ou

$$v = \left[(1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\cos x} ;$$

pour $x = 0$, on a donc

$$v = e.$$

En résumé y, qui est égal à $\frac{u}{v}$, a pour limite e.

Remarque. Lorsque $u = 1$, comme cela a lieu dans un grand nombre de cas, la méthode générale que nous venons d'indiquer s'applique commodément.

Soit

$$y = (1 + v)^w;$$

on écrit y sous la forme

$$y = \left[(1 + v)^{\frac{1}{v}}\right]^{vw}$$

et, l'on a, par conséquent

$$y = e^{\lim. (v w)}.$$

On reconnaitra, dans l'indication générale que nous don-

nons ici, la méthode que nous avons précisément suivie en cherchant, comme nous l'avons fait tout à l'heure, la limite de $(1 + \sin x)^{\cot g. x}$, pour $x = 0$.

EXERCICES

1. Trouver la valeur de y.

$$y = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{m^2+1}}\right)^{\sqrt[3]{3m^3+1}};$$

pour $m = \infty$.

Le calcul donne

$$\text{Lim}\, y = 2\sqrt[6]{9}$$

2. *Quelle est, pour $m = \infty$, la vraie valeur de la fraction*

$$\left(\frac{m^2 + 2m - 1}{m^2 - 3m + 4}\right)^m ?$$

On divisera d'abord, haut et bas, par m^2 et l'on écrira la fraction sous la forme

$$\frac{\left(1 + \frac{2}{m} - \frac{1}{m^2}\right)^m}{\left(1 - \frac{3}{m} + \frac{4}{m^2}\right)^m};$$

à ce propos on démontrera que la limite de $\left(1 + \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{m^2} + \ldots\right)^m$, pour $m = \infty$ est égale à e^α. On généralisera enfin l'exercice proposé en cherchant, pour $m = \infty$, la limite de l'expression

$$\left(\frac{m^p + Am^{p-1} + \ldots}{m^p + A'm^{p-1} + \ldots}\right)^m.$$

3. *Démontrer que la limite de $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$, pour $m = \infty$, est égale à $\frac{1}{e}$.*

4. *Quelle est la limite de l'expression $\alpha^{\frac{1}{\alpha - 1}}$, pour $\alpha = 1$.*

5. *Trouver ponr $x=0$, la valeur de la quantité y, définie par l'égalité*

$$y^2=\sqrt[x]{1-x^2}.$$

On remarquera que l'on a

$$y=(1+x)^{\frac{1}{2x}}(1-x)^{\frac{1}{2x}}.$$

VINGTIÈME LEÇON

LES LOGARITHMES.

252. Définition. *Étant donné un nombre positif a, supérieur à l'unité, le nombre x qu'il faut donner comme exposant à a, pour que la valeur bien déterminée a^x soit égale à y, est le logarithme de y.*

Le nombre a se nomme *la base du système*. Avant d'exposer les propriétés des logarithmes, ce mot ayant été employé dans l'algèbre élémentaire avec un sens différent, du moins en apparence, nous devons montrer qu'il y a concordance entre les deux définitions, et que la même expression est bien appliquée à des choses identiques.

253. Concordance des deux définitions. Dans la définition élémentaire on considère la progression géométrique croissante

$$(U) \quad 1, (1+\alpha), (1+\alpha)^2, \dots (1+\alpha)^p, \dots ;$$

et d'autre part, la progression arithmétique

$$(V) \quad 0, r, 2r, \dots pr, \dots$$

En supposant que dans les suites U et V les termes se correspondent deux à deux, les nombres de V sont dits les logarithmes des nombres correspondants de U. Pour compléter cette définition, il convient d'ajouter qu'on appelle base du système le nombre de la suite U qui a pour logarithme l'unité. Désignons cette base par b, et soit

$$b = (1+\alpha)^q.$$

Le logarithme de b est, par définition, le nombre qr : on a donc

$$qr = 1.$$

D'après cela on voit que la base b est donnée par la formule

$$(1) \quad b = (1 + x)^{\frac{1}{r}}.$$

Ceci posé, soit y un nombre quelconque de la suite U,

$$(2) \quad y = (1 + x)^p;$$

en désignant son logarithme par x, on a

$$(3) \quad x = pr.$$

Des égalités (2) et (3) on tire

$$y = (1 + x)^{\frac{x}{r}}$$

ou

$$y = \left[(1 + x)^{\frac{1}{r}}\right]^x$$

ou enfin

$$y = b^x.$$

Cette relation entre x et y établit bien l'identité des deux définitions. Nous abordons maintenant l'étude des propriétés des logarithmes.

254. Théorème. *Tout nombre positif a un logarithme, dans un système de base donnée.*

Soit a, la base donnée [1] ; considérons l'équation

$$y = a^x;$$

1. Il est entendu que a désigne un nombre positif, sans qu'il soit nécessaire de rappeler constamment cette condition imposée à la base du système.

quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, nous avons montré dans l'étude que nous avons faite de la fonction exponentielle, que y variait d'une façon continue et croissait constamment. Soit y_1 le nombre proposé. La fonction a^x étant continue et variant de $+\infty$ à $-\infty$, on sait (§ 230) que a^x passe, au moins une fois, par la valeur y_1, pour une valeur x_1 de x. D'ailleurs la fonction étant croissante ne passe qu'une seule fois par cette valeur y_1 ; et ceci établit que tout nombre positif a un logarithme, et qu'il n'en a qu'un seul.

On désigne par la notation abrégée *Log*, ou, plus simplement encore, par la seule lettre L, le mot logarithme. Ainsi pour exprimer qu'un nombre x, est le logarithme d'un nombre β, on écrit

$$x = \text{Log}\,\beta$$

ou

$$x = L.\beta.$$

Lorsqu'on veut rappeler que la base du système de logarithmes que l'on considère est un nombre a ; on peut introduire, dans la notation, l'indice a, comme l'indiquent les égalités suivantes

$$x = \text{Log}_a\,\beta$$

ou

$$x = L_a\,\beta.$$

Le symbole L, est réservé aux logarithmes népériens; ces logarithmes, sur lesquels nous reviendrons tout à l'heure, ont pour base le nombre e. L'équation $y = a^x$ admet évidemment la solution $x = 1$ $y = a$; ainsi on a $\text{Log}_a a = 1$. On peut aussi remarquer que l'on a $\text{Log}_a\,1 = 0$, quelle que soit la base a.

255. Théorème I. *Le logarithme d'un produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes des facteurs.*

Nous voulons montrer que l'on a

$$\text{Log}(y_1 y_2 \dots y_p) = \text{Log}\, y_1 + \text{Log}\, y_2 + \dots + \text{Log}\, y_p.$$

Désignons, en effet, par x_1, x_2, ... x_p ; les logarithmes respectifs des nombres y_1, y_2, ... y_p; on a, par la définition même,

$$y_1 = a^{x_1}$$
$$y_2 = a^{x_2}$$
$$\dots\dots$$
$$y_p = a^{x_p};$$

a, représentant la base du système considéré. De ces égalités on déduit, par combinaison, la relation

$$y_1 y_2 \dots y_p = a^{x_1 + x_2 + \dots + x_p}.$$

Mais cette égalité prouve que $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ est, précisément, le logarithme du nombre $y_1 y_2 \dots y_p$. On peut donc dire que

$$\text{Log}(y_1 y_2 \dots y_p) = x_1 + x_2 + \dots + x_p,$$

ou que

$$(1)\quad \text{Log}(y_1 y_2 \dots y_p) = \text{Log}\, y_1 + \text{Log}\, y_2 + \dots + \text{Log}\, y_p.$$

256. Théorème II. *Le logarithme d'une puissance entière et positive* m, *est égal à* m *fois le logarithme du nombre qui est élevé à cette puissance.*

Si dans l'égalité (1) qui, au fond, est une *identité*, vérifiée par toutes les valeurs positives attribuées aux lettres y_1, y_2, ... y_p on suppose

$$y_1 = y_2 = \dots y_p = y;$$

on obtient le résultat suivant

$$\text{Log}(y^m) = m\, \text{Log}\, y.$$

Cette égalité a lieu quel que soit y et pour une valeur entière, positive, et quelconque de m ; elle prouve l'exactitude du théorème énoncé.

257. Théorème III. *Le logarithme d'un quotient est égal à la différence qui existe entre le logarithme du dividende et celui du diviseur.*

Cette proposition est encore la conséquence immédiate du théorème I, théorème qui doit d'ailleurs être considéré comme constituant la propriété fondamentale et caractéristique de la fonction logarithmique.

Si l'on pose en effet

$$y = \frac{u}{v},$$

on en déduit

$$u = vy$$

et, par suite,

$$\text{Log}\, u = \text{Log}\, v + \text{Log}\, y$$

ou finalement

$$\text{Log}\, \frac{u}{v} = \text{Log}\, u - \text{Log}\, v.$$

Cette dernière égalité démontre bien la propriété énoncée.

258. Théorème IV. *Le logarithme d'une racine d'indice* m *est égal au logarithme de la quantité positive placée sous le radical, divisé par l'indice* m.

Soit $\sqrt[m]{A}$, le radical considéré ; nous supposerons que A est une quantité positive ; $\sqrt[m]{A}$ dans cette hypothèse a une valeur bien déterminée et que nous avons précédemment définie. Soit y cette valeur ; nous pourrons donc poser

$$y = \sqrt[m]{A},$$

égalité de laquelle on déduit

$$y^m = A.$$

On a donc, par application du théorème II,

$$\text{Log}\, A = m\, \text{Log}\, y,$$

ou

$$\text{Log}\, y = \frac{\text{Log}A}{m},$$

ou, finalement,

$$\text{Log}\left(\sqrt[m]{A}\right) = \frac{\text{Log}A}{m}.$$

259. Changement de base. Nous supposons, sans nous préoccuper de savoir comment ce but a été atteint, qu'on ait construit une table de logarithmes dans un système de base a, et nous nous proposons de transformer cette table en une autre ; les logarithmes de celle-ci ayant pour base un nombre b, différent de a.

Prenons un nombre quelconque y ; soit x son logarithme dans le premier système, et X son logarithme dans le second.

On a donc

$$y = a^x$$

et aussi

$$y = b^X.$$

On déduit, de là

$$a^x = b^X.$$

Deux nombres égaux ont, dans un système déterminé, des logarithmes égaux. Prenons, dans l'égalité précédente, les logarithmes des deux nombres dans le système a. Comme l'on a, $\text{Log}_a a = 1$, on obtient la relation

$$x = X \log_a b.$$

Soit posé

$$M = \frac{1}{\text{Log}_a b};$$

M s'appelle *le module de transformation;* on voit qu'il est égal à l'inverse du logarithme de la nouvelle base, logarithme pris dans la table proposée. On a d'après cela,

$$X = M \cdot x.$$

Ainsi les nouveaux logarithmes sont proportionnels aux anciens ; et pour calculer la nouvelle table il suffit de multiplier ceux de la table donnée, par un nombre toujours le même.

Cette transformation pourrait s'effectuer par des calculs relativement simples, en appliquant la remarque suivante. Soit M le module de transformation; en calculant, une fois pour toutes, les produits

$$2M, \quad 3M, \ \dots \ 9M;$$

on obtient ainsi 9 résultats

$$\begin{aligned} A_1 &= M \\ A_2 &= 2M \\ &\cdots\cdots \\ A_9 &= 9M, \end{aligned}$$

et, avec ces nombres, A_1 A_2 ... A_9 on peut effectuer la transformation de la table, par de simples additions. Nous n'insisterons pas autrement sur cette observation élémentaire.

260. Remarque. On rencontre fréquemment des expressions de la forme

$$u = \frac{\text{LogA}}{\text{LogB}};$$

la base du système de logarithmes n'étant pas connue, ou, si l'on préfère, étant indéterminée. La valeur de u n'en est pas moins bien déterminée. Cela tient à la remarque que nous avons faite, dans le paragraphe précédent, et en vertu de laquelle *les logarithmes de deux nombres, dans deux systèmes différents, sont proportionnels.*

261. Logarithmes Népériens. Les logarithmes ont été imaginés par Néper [1] et la base choisie par lui a été le nombre e. Voici comment on peut expliquer ce choix qui, au premier abord, a une apparence singulière. Dans les deux progressions (U) et (V), dont nous avons parlé plus haut, entrent deux indéterminées, α et r. Néper appelait *module du système* le rapport $\frac{r}{\alpha}$ de ces deux quantités arbitraires. Dans cet ordre d'idées, le système de module simple est celui qui est égal à l'unité et qui correspond à l'hypothèse $r = \alpha$. La formule (1) donne alors pour la base le nombre $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, et quand on suppose que α est très petit et tend vers zéro, hypothèse naturelle, et même nécessaire, si l'on veut que tous les nombres et leurs logarithmes figurent dans la table, on voit que la base doit avoir pour valeur la limite de $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire e.

PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION LOGARITHMIQUE.

262. Théorème I. *La fonction logarithmique est une fonction continue, quand x varie de zéro à $+\infty$.*

Nous appelons *fonction logarithmique* celle qui est liée à la variable indépendante x par l'équation

$$(1) \quad y = \operatorname{Log} x.$$

Si l'on désigne par a la base du système considéré, la définition du logarithme, telle que nous l'avons donnée tout à l'heure, prouve que l'égalité précédente entraîne celle-ci :

$$(2) \quad x = a^y.$$

1. Au commencement du XVIIe siècle.

D'après cette équation, x est un nombre positif, quelle que soit la valeur de y. D'ailleurs à toute valeur positive donnée à x, correspond un logarithme y, et un seul ; ceci prouve déjà que y est une fonction bien déterminée dans l'intervalle $(0, +\infty)$, que nous considérons.

Pour montrer la continuité de la fonction, donnons à x la valeur $x+h$; l'accroissement k de la fonction est donné par l'égalité

$$k = \operatorname{Log}(x+h) - \operatorname{Log} x$$

que l'on peut écrire

$$(3) \quad k = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

De cette égalité, et de la définition des logarithmes, on tire

$$1 + \frac{h}{x} = a^k.$$

Lorsque h est nul, le premier membre est égal à l'unité; le second membre ne peut prendre cette valeur, que si l'on suppose $k = 0$.

D'ailleurs a^x est une fonction continue, lorsque h a une valeur très petite, k a donc, lui aussi, une valeur très voisine de zéro. Cette remarque établit la continuité de la fonction logarithmique; continuité que nous déduisons, comme on le voit, de celle, précédemment démontrée, de la fonction exponentielle.

263. Théorème II. *La fonction logarithmique est croissante.*

En effet, d'après l'égalité (2), et en supposant $a > 1$, on voit que si le logarithme est positif, le nombre correspondant est supérieur à l'unité ; et inversement. L'égalité (3), dans laquelle on suppose, bien entendu, $h > 0$; prouve que k est le logarithme d'un nombre plus grand que l'unité ; on a donc $k > 0$ la fonction logarithmique est croissante.

Il faut ajouter qu'*elle croît indéfiniment avec x*. En effet, si dans l'équation (2), on suppose que x croisse au delà de toute limite, il faut admettre que y n'a pas, dans cette hypothèse, de limite finie, puisque, à une valeur finie de y, correspond nécessairement, pour x, une valeur finie.

264. Théorème III. *Le rapport $\frac{\text{Log}\,x}{x}$ tend vers zéro, quand x croît indéfiniment.*

Posons en effet

$$z = \frac{\text{Log}\,x}{x}$$

et soit

$$y = \text{Log}\,x.$$

On a, par suite,

$$x = a^y.$$

La valeur de z peut alors s'écrire

$$z = \frac{a^y}{y}.$$

En supposant que x, et par conséquent y, croissent indéfiniment, on a vu (§ 241) que le rapport $\frac{y}{a^y}$ dans lequel on suppose, bien entendu, $a > 1$ tendait vers zéro, quand y croissait au delà de toute limite.

265. Théorème IV. *La fonction* ($-\text{Log}\,x$) *croît au delà de toute limite, quand x décroît indéfiniment.*

Soit

$$y = -\text{Log}\,x$$

on a donc

$$x = a^{-y}$$

ou

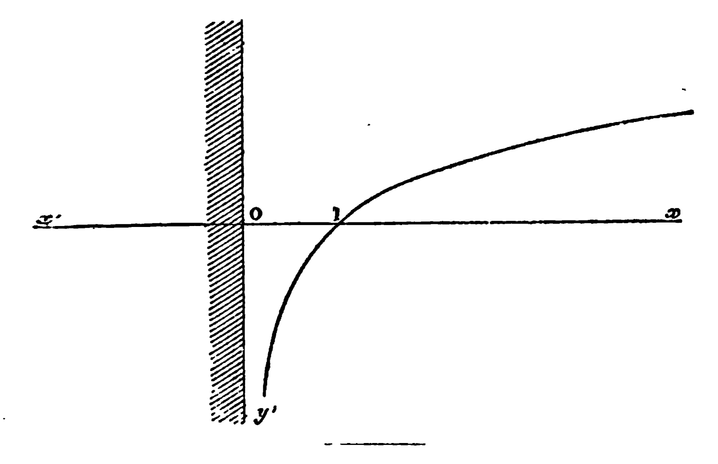
$$a^y = \frac{1}{x}.$$

Lorsqu'on donne à x des valeurs positives, variables, et tendant vers zéro; les valeurs correspondantes de y augmentent sans cesse, et croissent indéfiniment. Ceci résulte de l'étude que nous avons faite de la fonction exponentielle.

266. Représentation graphique de la fonction logarithmique. Si l'on considère l'équation

$$y = \text{Log}\, x;$$

x étant une variable indépendante, entre les limites o, et $+\infty$; les valeurs correspondantes de y, en appliquant les théorèmes qui précèdent, peuvent être représentées par les ordonnées de la courbe ci-dessous.



EXERCICES

1. *Démontrer que les deux courbes*

$$y = a^x \quad y = b^x$$

sont projectives; c'est-à-dire qu'en faisant tourner le plan de la première, d'un angle convenablement choisi, autour de oy, elle se projette sur le plan primitif suivant une courbe qui coïncide avec l'autre.

2. *Démontrer que l'on a*

$$\text{Log}_a b\, \text{Log}_b a = 1.$$

3. *Résoudre l'équation*

$$3^{2^x} = 81.$$

4. *Résoudre l'équation*

$$3 \cdot 2^{2x+2} + 17 \cdot 2^x - 5 = 0$$

on trouvera une seule racine réelle $x' = -2$.

5. *Résoudre l'équation*

$$a^{2x+p} + ma^{x+q} + n = 0.$$

6. *Trouver la limite de*

$$y = (1 + \alpha)^{\log \alpha};$$

pour $\alpha = 0$.

7. *Quelle est la valeur de* $\frac{\log \alpha}{\alpha - 1}$, *pour* $\alpha = 1$?

On posera

$$\alpha = 1 + \frac{1}{m}.$$

VINGT ET UNIÈME LEÇON

LES DÉRIVÉES.

267. Définition de la fonction dérivée. Désignons, comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises, par x la variable indépendante, celle à laquelle on peut donner, au moins dans un intervalle déterminé, des valeurs arbitraires; et soit y la variable dépendante. Cette dépendance de y est déterminée par une relation entre les deux variables x, y; relation telle, qu'étant donnée la valeur de x, il faut, pour obtenir la valeur correspondante de y effectuer, avec cette valeur, une certaine opération, désignée symboliquement par $f(x)$. La formule qui indique ce calcul est,

$$y = f(x).$$

Si l'on donne à x une nouvelle valeur $x+h$, on obtient pour y, une valeur correspondante $y+k$. Nous dirons que h est l'accroissement donné à la variable indépendante, et k, l'accroissement correspondant de la variable dépendante. Ce mot *accroissement* doit d'ailleurs être pris dans son sens mathématique et les accroissements dont nous parlerons pourront être tantôt positifs, et tantôt négatifs. Le problème des tangentes, problème dont nous dirons un mot tout à l'heure, a conduit à chercher la limite du rapport $\frac{k}{h}$, quand h tend vers zéro. Lorsque cette limite existe, et a une valeur bien déterminée, on l'appelle la *dérivée de la fonction*. Cette dérivée est une fonction de la variable indépendante x : Nous convenons de désigner cette nouvelle fonction par y', ou par $f'(x)$; ces deux notations étant également usitées.

268. Exemples de fonctions dérivées. Montrons d'abord, sur des exemples simples, comment on peut déterminer la dérivée d'une fonction donnée.

1° Soit

$$y = \frac{a\,x+b}{a\,x+b'}.$$

Donnons à la variable indépendante la valeur $x+h$; on a

$$y+k = \frac{a\,(x+h)+b}{a'(x+h)+b'},$$

par suite

$$k = \frac{a\,(x+h)+b}{a'(x+h)+b'} - \frac{a\,x+b}{a'x+b'},$$

ou, encore,

$$\frac{k}{h} = \frac{(ab'-ba')}{[a'(x+h)+b'](a'x+b')}.$$

Si l'on imagine maintenant que h tende vers zéro, on voit, par l'égalité précédente, que le rapport $\frac{k}{h}$ a une limite, et que cette limite est égale à

$$\frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}.$$

On écrira donc

$$y' = \frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}.$$

Dans le cas où y est une quantité constante, pour mettre la variable x *en apparence* dans l'expression de y, on peut représenter y, par

$$\frac{a\,x+b}{a'x+b'},$$

mais avec la condition $ab'-ba'=0$.

La formule précédente montre que l'on a $y'=0$. Ainsi *la dérivée d'une constante est nulle.*

2° Soit encore

$$y = Ax^p.$$

On a

$$y + k = A(x+h)^p$$

puis,

$$\frac{k}{h} = pAx^{p-1} + hU;$$

U désignant un polynôme entier. Cette égalité prouve que le rapport $\frac{k}{h}$, pour $h = 0$, a une limite qui est égale à pAx^{p-1}. On a donc

$$y' = pAx^{p-1}.$$

3° Considérons enfin la fonction entière

$$y = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_{m-1}x + A_m.$$

On a, par un calcul analogue au précédent,

$$\frac{k}{h} = [mA_0x^{m-1} + hU_1] + [(m-1)A_1x^{m-2} + hU_2] + \dots + [A_{m-1}].$$

Lorsque h tend vers zéro, on conclut de cette égalité,

$$y' = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \dots + A_{m-1}.$$

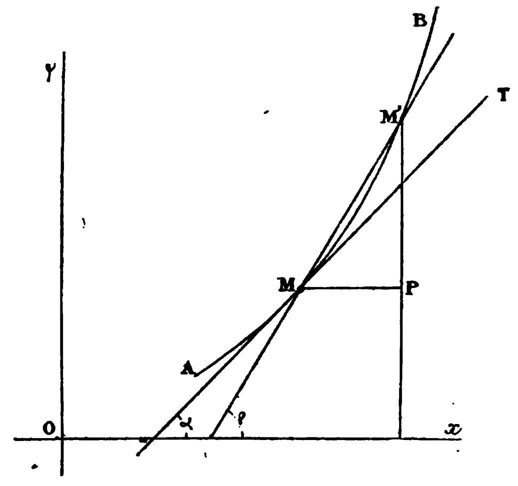
Ainsi *la dérivée y' d'une fonction entière y, du degré* m, *est une fonction entière du degré $(m-1)$; cette dérivée ne renferme pas le terme constant A_m, de la fonction proposée ; enfin un terme quelconque $+ A_hx^{m-h}$ de y donne, dans y', un terme correspondant $+ (m-h)A_hx^{m-h-1}$, déduit du précédent d'après une loi évidente.*

269. Représentation géométrique de la dérivée. Nous nous proposons de montrer maintenant comment cette

idée de la dérivée s'est naturellement introduite dans l'analyse, quand on a cherché à tracer la tangente en un point d'une courbe donnée par l'équation

$$y = f(x).$$

Soit AB la courbe qui correspond à cette équation, M un point particulier de AB ; soit enfin M' un point voisin de M sur AB.



Sur cette figure, MP représente l'accroissement h donné à x, M'P l'accroissement correspondant k de la fonction. Le triangle rectangle M'PM donne d'ailleurs

$$\frac{k}{h} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Lorsque le point M' se rapproche du point M et vient se confondre avec lui, la sécante M'M a, en général, une position limite, bien déterminée, qui est celle de la tangente MT à AB, au point donné M. Si l'on désigne par α l'angle bien défini [1] que fait la semi-droite MT, avec ox, on a

$$y' = \operatorname{tg} \alpha.$$

1. Voyez pour la définition de cet angle le Cours de géométrie analytique.

C'est ainsi que la connaissance de la fonction y' permet de construire la tangente au point M à la courbe proposée, et l'on voit comment le problème des tangentes a conduit à la notion de la fonction dérivée.

PRINCIPES GÉNÉRAUX POUR LE CALCUL DES DÉRIVÉES.

270. Nous désignerons ordinairement par Δx l'accroissement donné à la variable indépendante. Si u désigne une certaine fonction de x, nous représenterons par Δu l'accroissement correspondant éprouvé par cette fonction. Il importe de bien comprendre cette notation et d'observer attentivement que Δx *est un signe symbolique*, destiné à remplacer ces mots : *accroissement donné à x*. De même Δu n'est qu'une façon abrégée, et commode, d'exprimer l'*accroissement éprouvé par la fonction u*.

271. Théorème. *La dérivée d'une somme de plusieurs fonctions est égale à la somme des dérivées de ces fonctions.*

Soit u, v, ... w différentes fonctions de x et soit

$$(1)\quad y = u + v + \dots + w.$$

Si l'on donne à x un accroissement Δx ; on a

$$(2)\quad y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v + \dots + w + \Delta w.$$

Des égalités (1) et (2) on déduit

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \dots + \left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)$$

ou enfin,

$$y' = u' + v' + \dots + w'.$$

272. Théorème. *La dérivée logarithmique d'un produit de plusieurs facteurs est égale à la somme des dérivées logarithmiques de ces facteurs.*

Lorsqu'une fonction de x est désignée par y, on nomme *dérivée logarithmique* [1] de y, le rapport $\frac{y'}{y}$.

Soit

$$y = u.v \dots w,$$

il faut montrer que l'on a

$$\text{(A)} \quad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \dots + \frac{w'}{w}$$

Prenons d'abord le cas particulier de deux facteurs. Soit

$$z = uv,$$

on a

$$z + \Delta z = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

et, par combinaison,

$$(3) \quad \frac{\Delta z}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Dans le second membre on remarquera que le dernier terme $\Delta u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ tend vers zéro, en même temps que Δx, parce que ce terme est le produit de deux facteurs : l'un Δu qui a pour limite zéro ; l'autre $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ dont la limite est v' quantité qu'on ne suppose pas infinie. A ce propos il importe de dire ici que toutes les fonctions que nous considérons sont supposées satisfaire aux conditions suivantes : 1° Elles sont continues, au moins pour la valeur de x considérée. 2° Elles ont une dérivée qui est une quantité, bien déterminée, et non infinie. Cette hypothèse sera admise dans tout ce qui va suivre, sans être rappelée, pour éviter des répétitions inutiles.

Si l'on revient à l'égalité (3) on a, en passant à la limite,

$$z' = uv' + vu'$$

1. Nous verrons plus loin, après avoir calculé la dérivée de la fonction logarithmique, la raison de cette dénomination.

ou

$$\frac{z'}{z} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

Ceci établit la proposition pour deux facteurs. En la supposant vraie pour $(n - 1)$ facteurs on l'étend, sans difficulté, au cas de n facteurs.

273. Théorème. *La dérivée d'un quotient y, de deux fonctions u et v, est donnée par la formule*

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Cette formule s'établit, et sans difficulté, par *la méthode directe*, celle que nous avons suivie précisément dans les exemples précédents.

On peut aussi considérer le théorème qui nous occupe comme un simple corollaire du précédent

En effet, soit

$$y = \frac{u}{v};$$

on a donc

$$u = vy$$

et, d'après la formule (A),

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} + \frac{y'}{y}.$$

De cette égalité on tire

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

274. Théorème. *La dérivée de la puissance entière et positive m, d'une fonction u, est donnée par la formule*

$$y' = mu^{m-1}u'$$

Cette propriété est encore la conséquence de la formule (A). En supposant que toutes les fonctions $u, v, \ldots\ w$; soient égales et en nombre m, on a $y = u^m$, et, par suite,

$$\frac{y'}{y} = m\frac{u'}{u}$$

ou

$$\frac{y'}{u^m} = m\frac{u'}{u}$$

ou enfin

$$y' = mu^{m-1}u'.$$

275. Dérivée de a^x. Nous nous proposons maintenant de trouver les dérivées des fonctions transcendantes que l'on rencontre dans l'analyse élémentaire.

Nous nous occuperons d'abord de la fonction exponentielle. Soit

$$y = a^x;$$

on a

$$k = a^{x+h} - a^x,$$

ou

$$(4) \quad \frac{k}{h} = a^x\frac{a^h - 1}{h}.$$

Changeons de notation, et posons

$$a^h - 1 = \alpha;$$

cette égalité donne

$$h = \frac{\text{Log}(1 + \alpha)}{\text{Log}\, a}.$$

On voit que si h tend vers zéro, a^h tend vers l'unité; α décroît donc indéfiniment.

La formule (4) devient alors

$$\frac{k}{h} = a^x\frac{\text{Log}\, a}{\text{Log}(1 + \alpha)}\alpha$$

ou encore

$$\frac{k}{h} = a^x\frac{\text{Log}\, a}{\text{Log}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Lorsque α tend vers zéro, on sait que $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ a pour limite le nombre e : on a donc finalement

$$y' = a^x \frac{\text{Log}\, a}{\text{Log}\, e}.$$

On doit remarquer le cas particulier où $a = e$; la formule précédente donne alors

$$y' = e^x \frac{\text{Log}\, e}{\text{Log}\, e}$$

ou

$$y' = e^x.$$

Ainsi *la fonction e^x est égale à sa dérivée.*

276. Dérivée de Log x. Soit maintenant

$$y = \text{Log}\, x;$$

on a

$$\frac{k}{h} = \frac{1}{h} \text{Log} \frac{x+h}{x}$$

ou

$$\frac{k}{h} = \frac{x}{h} \text{Log} \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

ou encore

$$\frac{k}{h} = \frac{1}{x} \text{Log} \left\{ \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right\}.$$

Si l'on pose $\frac{h}{x} = \alpha$, on voit que α tend vers zéro, en même temps que h; d'ailleurs $\lim\, (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, pour $\alpha = 0$: on a donc finalement

$$y' = \frac{\text{Log}\, e}{x}.$$

On remarquera que *dans le cas du logarithme Népérien, la fonction dérivée est l'inverse de x.*

277. Dérivée du sinus. Soit

$$y = \sin x\,;$$

on a

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

ou

$$\frac{k}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Cette relation peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{k}{h} = \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Si nous passons à la limite, après avoir remarqué que le rapport $\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$, a pour limite l'unité, pour $h = 0$, on obtient la dérivée cherchée y', par la formule

$$y' = \cos x.$$

278. Dérivée du cosinus. Un calcul semblable prouve que si l'on pose

$$y = \cos x,$$

on a

$$y' = -\sin x.$$

279. Dérivée de la tangente. Considérons enfin la fonction

$$y = tg x$$

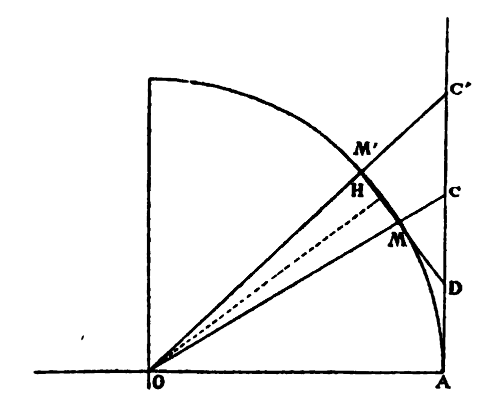
La méthode directe, ou la règle donnée (§ 273), pour prendre la dérivée d'un quotient, prouve que l'on a

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Mais nous établirons ce résultat par une méthode géométrique, pour donner, sur un exemple simple, une idée du mode de démonstration ordinairement usité dans la géométrie des infiniments petits.

Soit AM l'arc x, AC la tangente correspondante ; soit aussi MM′ l'accroissement donné à x : on a donc arc MM′ $= \Delta x$. L'accroissement de la fonction étant CC′ nous poserons $z = \frac{CC'}{\text{arc}\, MM'}$ et nous nous proposons de déterminer z quand le point M′ vient se confondre avec le point M. Les triangles OCC′ et OMM′ qui ont un angle commun donnent la relation $\frac{OC \cdot OC'}{OM \cdot OM'} = \frac{CC' \cdot OA}{MM' \cdot OH}$, ou encore

$$\frac{OC \cdot OC'}{OM \cdot OM'} = \left(\frac{CC'}{\text{arc}\, MM'}\right)\left(\frac{\text{arc}\, MM'}{MM'}\right)\frac{OA}{OH}\ (1)$$



(1) OH représente la perpendiculaire abaissée du centre sur la corde MM′.

Si l'on passe à la limite, les rapports $\frac{\text{arc MM'}}{\text{MM'}}, \frac{\text{OA}}{\text{OH}}$ ont pour limite l'unité. On obtient donc, pour la limite du rapport $\frac{\text{CC'}}{\text{arc MM'}}$, c'est-à-dire, pour la dérivée cherchée, la valeur $\overline{\text{OC}}^2$.

On a donc, finalement,

$$y' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

280. Dérivée des fonctions $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{cotg} x$. Ces fonctions se rencontrent rarement, parce qu'elles sont respectivement égales aux inverses du cosinus, du sinus et de la tangente, et qu'elles peuvent toujours, d'après cette remarque, être éliminées d'un calcul. Leurs dérivées sont données par les formules suivantes.

$$u = \sec x \qquad u' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$v = \operatorname{cosec} x \qquad v' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$w = \operatorname{cotg} x \qquad w' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

On obtient ces résultats par la méthode directe, ou par l'application de la règle que nous avons donnée pour prendre la dérivée d'une fraction. On peut aussi employer la méthode géométrique, méthode dont nous avons donné tout à l'heure un exemple et qui s'applique, très simplement, à toutes les fonctions trigonométriques.

281. Fonctions inverses. Désignons symboliquement par f et F, deux opérations bien définies, que l'on peut faire avec un nombre donné. Alors $f[\mathrm{F}(x)]$ représente aussi une opération bien déterminée et qui peut être analysée ainsi: 1° avec le nombre donné x effectuer l'opération, désignée par le symbole F ; 2° avec le nombre ainsi obtenu $\mathrm{F}(x)$, effectuer l'opération qui correspond au symbole f. Ceci posé, nous dirons

que f et F sont les symboles de deux fonctions inverses, lorsque l'on a

$$(1) \quad x = f[F(x)].$$

Cette définition ne distingue pas quelle est celle des deux opérations f, F, par laquelle on doit débuter pour reconnaître l'identité précédente. Il est facile, en effet, de reconnaître que l'identité (1) entraine aussi la suivante

$$(2) \quad x = F[f(x)].$$

Posons, en effet,

$$(3) \quad F(x) = y.$$

L'identité (1) donne

$$x = f(y)$$

et l'égalité (1) devient

$$y = F[f(y)].$$

Cette égalité qui a lieu, non pour des valeurs particulières de y, mais quel que soit y, est une identité. Il est donc indifférent de permuter l'ordre des opérations f et F.

On peut encore imaginer les fonctions inverses de la manière suivante. Soit

$$(A) \quad \varphi(x, y) = 0$$

une équation à deux inconnues. Supposons que l'on puisse résoudre cette équation, successivement, par rapport à x et par rapport à y; de telle sorte que chacune des équations

$$(B) \quad x = f(y)$$
$$(C) \quad y = F(x)$$

soit équivalente à la proposée: on dit alors que f et F sont les symboles de deux fonctions inverses. En effet, dans (B), donnons à y une valeur arbitraire y'; il en résulte pour x une valeur x'. L'équation (B) étant équivalente à (A), les valeurs x', y', que nous venons de trouver, vérifient donc (A). D'autre

part l'équation (C) étant équivalente à (A) ; x', y' satisfont aussi à cette équation et l'on a

$$x' = f(y')$$
$$y' = F(x')$$

ou

$$y' = F[f(y')].$$

Mais y' est arbitraire ; cette égalité est donc une identité et les deux définitions rentrent l'une dans l'autre.

282. Théorème des fonctions inverses. *Si l'on désigne par f et F, les symboles de deux fonctions inverses, de telle sorte que les deux équations*

$$\text{(B)} \quad x = f(y)$$
$$\text{(C)} \quad y = F(x)$$

soient équivalentes, on a

$$f'(y)\,F'(x) = 1.$$

Soit donné, dans (C), à x un accroissement Δx, on aura pour y un accroissement Δy ; les nombres $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ constituent une solution de (C), par conséquent une solution de (B). Si, dans (B), on remplace y par $y + \Delta y$ (Δy représentant, bien entendu, la valeur dont il vient d'être question), on obtient pour x une valeur correspondante. Cette valeur est unique, si f désigne, comme on le suppose, une opération bien déterminée ; et cette valeur unique ne peut être que $x + \Delta x$, puisque $y + \Delta y$, $x + \Delta x$; constituent une solution de (B).

Le théorème en question devient alors évident. D'après l'équation (B) la dérivée de x par rapport à y est égale à la limite du quotient $\frac{\Delta x}{\Delta y}$; d'après l'équation (C) la dérivée de y, par rapport à x, est égale à la limite du quotient obtenu en prenant le rapport entre l'accroissement de y qui correspond à l'accroissement de x, quand celui-ci tend vers zéro. Ce

deuxième quotient est $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: Δy et Δx ayant des valeurs égales à celles qu'on vient de considérer.

On a d'ailleurs

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 1.$$

On a donc, à la limite,

$$f'(y) \cdot \mathrm{F}'(x) = 1.$$

282. Dérivées des fonctions inverses trigonométriques. De l'équation

$$(1) \quad x = \sin y$$

on tire

$$(2) \quad y = \operatorname{arc}\sin x,$$

relation qui exprime que *y est l'arc dont le sinus est égal à x.* Les deux fonctions qui correspondent aux signes symboliques *sin*, et *arc sin* sont des fonctions inverses. Il faut pourtant ajouter que si l'on veut que la fonction y qui correspond au symbole *arc sin* soit bien déterminée, on doit convenir que *y représente le plus petit arc positif qui corresponde au sinus donné.*

Si l'on veut trouver la dérivée de y par rapport à x, il suffit, d'après le théorème précédent, de prendre la dérivée de x par rapport à y, et de calculer l'inverse de ce rapport. On a donc, d'après cela

$$y' = \frac{1}{\cos y};$$

d'ailleurs l'équation (1) donne

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2};$$

par suite

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}.$$

L'ambiguïté du signe disparaît si l'on suppose le sinus donné *en grandeur et en signe*. Supposons, par exemple, $x > 0$; le plus petit arc qui correspond à ce sinus est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$;
on a donc

$$\cos y = +\sqrt{1 - x^2}$$

et, par conséquent,

$$y' = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}.$$

Au contraire, si l'on suppose $x < 0$, le plus petit arc qui corresponde à ce sinus a son extrémité dans le troisième quadrant ; cos y est négatif, la dérivée y' est donnée par la formule

$$y' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

On trouve, par les mêmes considérations, les dérivées des autres fonctions trigonométriques inverses.

284. Dérivée de $\sqrt{x}$. Parmi les applications, que l'on peut faire, du théorème des fonctions inverses, nous signalerons encore la suivante. Soit

$$y = \sqrt{x} ;$$

Cette relation peut s'écrire

$$x = y^2.$$

Celle-ci donne $x' = 2y$; on a donc

$$y' = \frac{1}{2y}$$

ou, enfin

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Mais avant de poursuivre l'étude des fonctions dérivées nous résumerons, dans le tableau suivant, les résulats obtenus dans cette leçon.

285. Tableau des dérivées des fonctions élémentaires.

FONCTIONS PROPOSÉES.	FONCTIONS DÉRIVÉES.
$y = \Sigma u$	$y' = \Sigma u'$
$y = uv$	$y' = uv' + vu'$
$y = uv \dots w$	$\frac{y'}{y} = \Sigma \frac{u'}{u}$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
$y = u^m$	$y' = mu^{m-1}u'$
$y = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m$	$y' = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1 x^{m-2} + \dots + A_{m-1}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = a^x$	$y' = a^x \frac{\text{Log}\, a}{\text{Log}\, e}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \text{Log}\, x$	$y' = \frac{\text{Log}\, e}{x}$
$y = \text{L}x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \text{tg}\, x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \sec x$	$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$
$y = \text{cosec}\, x$	$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
$y = \text{cotg}\, x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$y = \text{arc} \sin x$	$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$
$y = \text{arc} \cos x$	$y' = \frac{1}{\mp\sqrt{1-x^2}}$
$y = \text{arc tg}\, x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \text{arc cotg}\, x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
$y = \text{arc sec}\, x$	$y' = \frac{1}{\pm x\sqrt{x^2-1}}$
$y = \text{arc cosec}\, x$	$y' = \frac{1}{\mp x\sqrt{x^2-1}}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

EXERCICES.

1. *Vérifier que la dérivée du produit*

$$y = \sin x \cos x \sec x \text{ cosec}\, x \text{ tg}\, x \text{ cotg}\, x$$

est nulle.

2. *Calculer la dérivée de la fonction*

$$y = \text{tg}\, x + \text{cotg}\, x + \sec x + \text{cosec}\, x$$

et discuter le signe de cette dérivée.

3. *On propose la même question pour la fonction*

$$y = \sin x + \cos x + \text{tg}\, x + \text{cotg}\, x + \sec x + \text{cosec}\, x.$$

4. *Expliquer pourquoi l'on doit trouver deux valeurs égales et de signes contraires pour la dérivée de la fonction* $y = \text{arc} \sin x$, *si l'on définit* y *par cette seule équation.*

5. *Expliquer pourquoi, à une valeur donnée de* x, *correspondent pour les fonctions* arc sin x, arc cos x, *des valeurs égales et de signes contraires.*

6. *On propose la même question pour les fonctions* arc tg x, *et* arc cotg x.

7. *Reconnaître que la dérivée de*

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$$

est identiquement nulle.

8. *Démontrer qu'en posant*

$$U = (ax^2 + bx + c)^2$$

on a

$$UU'' - \frac{3}{4}U'^2 = U(b^2 - 4ac)$$

(U'' *désignant la dérivée de* U'.)

9. *Si l'on pose*

$$U = x^3 + px^2 + qx + r,$$

on a

$$\frac{3UU''}{2} - U'^2 = (3q - p^2)x^2 + (9r - pq)x + 3pr - q^2$$

10. *Soit*

$$u = \alpha x + \beta$$
$$v = \alpha' x + \beta'$$

et

$$y = u^3 + v^3.$$

Démontrer que l'on a

$$\frac{yy''}{6} - \frac{y'^2}{9} = uv(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2.$$

VINGT-DEUXIÈME LEÇON

LES DÉRIVÉES (Suite).

THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

286. Fonctions de fonctions. Lorsqu'une variable y dépend d'une variable u, qui est, elle-même, fonction de la variable indépendante x, on dit que y est une fonction de fonction d'x.

287. Théorème. *Pour calculer la dérivée d'une fonction de fonction, on prend la dérivée de cette fonction, par rapport à u, et on multiplie ce résultat par la dérivée de u, par rapport à x.*

Les quantités Δx, Δu, Δy ayant leur signification ordinaire, l'identité

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

prouve qu'on a, à la limite,

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

288. Dérivées partielles. Nous devons dire ici quelle est la signification de l'indice qui accompagne quelquefois la lettre y'.

Lorsqu'une fonction y renferme plusieurs lettres, α, β, γ.... si l'on considère l'une d'elles α, comme étant une variable indépendante, y devient une fonction de α. La dérivée de cette fonction est représentée par y'_α. On évite ainsi toute confusion et l'on marque, par cette notation, que la lettre α est prise pour variable indépendante, *les autres lettres étant considérées comme des constantes.*

Il peut arriver que les autres lettres β, γ, ... soient aussi, à leur tour, considérées comme des variables indépendantes ; y'_β, y'_γ .. représentent alors les dérivées de y prises, successivement, par rapport aux lettres β, γ, ... Ces fonctions y'_x, y'_β, ... sont nommées *dérivées partielles* de la fonction y. Ainsi l'indice qui accompagne les lettres y', u', ... signifie que la dérivée des fonctions y, u, ... a été prise par rapport à la lettre qui est placée en indice, toutes les autres lettres étant considérées comme des constantes.

289. Applications du théorème des fonctions de fonctions. Le théorème des fonctions de fonctions est d'un usage continuel dans le calcul des dérivées. Nous allons montrer, sur divers exemples, comment on applique ce théorème.

1° Soit à prendre la dérivée de la fonction

$$y = \sqrt{u};$$

u désignant une fonction quelconque de x. On a (§ 284)

$$y'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

par suite,

$$y'_x = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

2° Soit

$$y = \mathrm{L}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

Posons

$$x + \sqrt{1 + x^2} = u$$

on a

$$u' = 1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

et

$$y' = \frac{u'}{u}$$

ou, finalement,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

3° Soit encore

$$y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

Ayant posé

$$u = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

on trouve, après calcul,

$$y' = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Ce dernier résultat donne lieu à une remarque qui se présente assez fréquemment dans le calcul des dérivées. Cette remarque est la suivante.

Ayant calculé la dérivée y' d'une certaine fonction de x, $y = f(x)$; il peut arriver que l'on trouve, toute simplification étant effectuée, que la dérivée y' est identique à celle d'une autre fonction connue $y = F(x)$. Lorsque cette circonstance se présente, on peut affirmer que les deux fonctions f et F sont identiques, *à une constante près.*

C'est ainsi que dans l'exercice précédent, si l'on pose

$$Y = \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

on a, par application du théorème des fonctions de fonctions,

$$Y' = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Les deux fonctions y et Y sont en effet identiques : on le reconnaît immédiatement en recourant aux formules connues

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}.$$

Mais il faut, à ce propos, démontrer le principe général que nous venons d'énoncer ; cette démonstration fait l'objet du paragraphe suivant.

290. Théorème. *Lorsque la dérivée d'une fonction est constamment nulle, cette fonction est une quantité invariable.*

La définition de la dérivée donne l'identité

$$\text{(A)} \quad f(x+h) - f(x) = h[f'(x) + \varepsilon]$$

ε désignant une fonction de x et de h qui s'annule avec h. On a, en effet,

$$f'_x = lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \text{pour } h = 0.$$

Cette remarque étant faite, considérons deux valeurs quelconques de x, x_0 et x_1 ; supposons $x_1 > x_0$ et soit

$$\text{(B)} \quad x_1 - x_0 = nh$$

n étant un nombre positif, entier, arbitraire. La fonction $f'(x)$ étant constamment nulle, la formule (A) donne successivement

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\varepsilon_1$$
$$f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) = h\varepsilon_2$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f(x_0 + nh) - f[x_0 + (n-1)h] = h\varepsilon_n.$$

On déduit de ces égalités, par combinaison, et en remplaçant $x_0 + nh$, par x_1,

$$\text{(C)} \quad f(x_1) - f(x_0) = h(\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n).$$

Désignant par ε la plus grande des quantités $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$: on aura donc

$$n\varepsilon \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$$

ou, en tenant compte de (B),

$$\varepsilon(x_1 - x_0) \geqslant h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)$$

ou enfin, d'après l'identité (C)

$$\text{(D)} \quad \varepsilon(x_1 - x_0) \geqslant f(x_1) - f(x_0).$$

Supposons que n croisse indéfiniment ; h et, par suite chacune des quantités ε_1, ε_2, ... ε_n tend vers zéro ; par conséquent ε qui est l'une de ces quantités tend, lui aussi, vers zéro.

La relation (D) prouve que les deux nombres fixes $f(x_1)$, $f(x_0)$; ont une différence aussi petite que l'on veut ; mais alors cette difference est nulle ; ainsi $f(x)$ est une quantité invariable.

291. Du théorème précédent on peut déduire différents corollaires et notamment celui que nous avons énoncé plus haut : *Si deux fonctions ont la même dérivée, leur différence est identique à une constante.*

En effet si l'on désigne par y et Y les deux fonctions et si l'on suppose que l'on ait

$$y' - Y' = 0$$

comme $(y - Y)$ est une fonction de x dont la dérivée $(y' - Y')$ est nulle, quel que soit x, cette dérivée est, d'après le théorème précédent, une quantité constante. En désignant cette constante par k, on peut donc dire que l'on a

$$y - Y = k.$$

On peut généraliser cette remarque en observant que si, entre des constantes α, β et les dérivées y', Y' existe la condition

$$\alpha y' - \beta Y' = 0;$$

on a, entre y et Y, la relation

$$\alpha y - \beta Y = k.$$

292. Théorème. *Quand la dérivée d'une fonction est positive pour $x = x'$; la fonction est croissante pour $x = x'$; elle est au contraire décroissante, quand la dérivée est négative.*

L'identité

$$(1) \quad f(x+h) - f(x) = h\,[f'(x) + \varepsilon]$$

reconnue plus haut, prouve immédiatement cette propriété, l'une des plus importantes de l'algèbre. Dans la relation (1) faisons $x = x'$; la quantité $f'(x') + \varepsilon$ se compose de deux parties, l'une $f'(x')$, fixe et que nous supposerons positive, pour fixer les idées; l'autre ε qui varie avec h, et qui est aussi petite que l'on veut. Dans ces conditions, pour des valeurs de h, positives et suffisamment petites, la quantité $f'(x') + \varepsilon$ est positive. Le second membre de l'égalité

$$(2) \quad f(x'+h) - f(x') = h\,[f'(x') + \varepsilon]$$

est donc positif et ceci prouve que $f(x'+h)$ est supérieur à $f(x')$. On verrait de même que $f(x'-h)$ est inférieur à $f(x')$. En résumé la fonction est croissante pour $x = x'$.

293. Théorème. *Lorsqu'une fonction est croissante, pour $x = x'$; sa dérivée est positive ou nulle, pour $x = x'$; la dérivée est, au contraire, négative ou nulle, si la fonction est décroissante.*

Supposons, par exemple, la fonction croissante. Soit $f(x'+h) > f(x')$; h étant positif. Le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure prouve que l'égalité (2) ne peut avoir lieu en même temps que l'inégalité $f'(x') < 0$. Par suite, la dérivée doit être, ou nulle, ou positive.

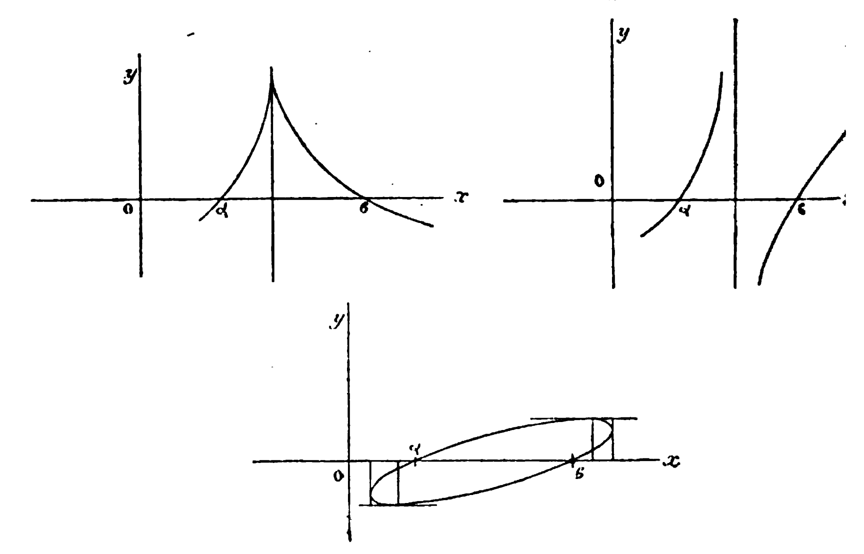
294. Théorème. *Entre deux racines réelles, consécutives, de l'équation $f(x) = 0$, il existe au moins une racine de l'équation $f'(x) = 0$.*

Soient α et β les deux racines considérées, α étant plus petit que β. Lorsque x varie de α à β, $f(x)$ va d'abord en croissant,

puis en décroissant; ou inversement. Prenons la première hypothèse, pour fixer nos idées. La dérivée $f'(x)$ est donc d'abord positive, ou nulle; mais elle ne peut pas être constamment nulle (§ 290); elle est donc positive après le passage de la variable x par la valeur α. On voit de même qu'elle est négative avant que x ne prenne la valeur β. La fonction $f'(x)$ passant d'une valeur positive à une valeur négative est égale à zéro, pour une valeur de x comprise entre α et β (§ 250).

Cette démonstration, comme celles qui précèdent ou qui suivront, suppose formellement que les fonctions proposées et leurs dérivées sont continues, au moins pour les valeurs de x considérées. C'est une hypothèse qui est d'ailleurs, toujours sous entendue, dans cette théorie des dérivées.

En appliquant le théorème précédent il importe donc, pour éviter de graves erreurs, de vérifier que la condition nécessaire que nous venons de rappeler, et qui est relative à la continuité, est bien remplie par la fonction proposée et par sa dérivée. Les figures ci-jointes montrent des exemples où la propriété en question est en défaut, parce que la condition de continuité n'est pas remplie, soit par la fonction, soit par la dérivée.



295. Théorème. *On a identiquement, θ désignant une fonction de x_0 et de h, dont la valeur est comprise entre zéro et l'unité,*

$$(\mathrm{H}) \quad f(x_0+h)-f(x_0) \equiv hf'(x_0+\theta h).$$

Posons

$$(\mathrm{K}) \quad f(x_0+h)-f(x_0) \equiv h \,.\, \mathrm{U};$$

U est une fonction de x_0 et de h que nous nous proposons de déterminer.

Soit y une fonction de x, correspondant à l'équation

$$y = f(x_0+x)-f(x_0)-\mathrm{U}x.$$

On a donc

$$y' = f'(x_0+x)-\mathrm{U}.$$

Or la fonction y s'annule évidemment pour $x=0$; et aussi, d'après l'égalité (K), pour $x=h$; par suite la dérivéé y' s'annule (§ 294) pour une valeur de x comprise entre o et h, valeur que l'on peut représenter par θh, en supposant que θ est compris entre zéro et l'unité. On a donc

$$f'(x_0+\theta h)-\mathrm{U}=0.$$

Cette égalité détermine U, et l'identité (k) devient

$$f(x_0+h)-f(x_0) \equiv hf'(x_0+h).$$

296. Dérivées successives. La dérivée d'une fonction $f(x)$, constitue elle-même une fonction qui, en général, admet une dérivée. Cette dernière fonction se nomme *dérivée seconde* et se désigne par la notation y'' ou $f''(x)$. La dérivée de y'' est une nouvelle fonction qu'on nomme *dérivée troisième* et qu'on désigne par y''' ou $f'''(x)$. En général la *dérivée d'ordre p*, celle qui a été obtenue en prenant p fois de suite, la dérivée d'une fonction donnée, se représente par $y^{(p)}$, ou par $f^{(p)}(x)$.

297. Théorème. *En désignant par* θ *une fonction de* x_0 *et de* h, *dont la valeur est comprise entre zéro et l'unité, on a*

$$(\text{H}') \quad f(x_0+h)-f(x_0)=h f'(x_0)+\frac{h^2}{1.2} f''(x_0+\theta h).$$

Nous poserons encore, à l'imitation de ce que nous avons fait tout à l'heure,

$$(\text{K}') \quad f(x_0+h) - (x_0) = h f'(x_0)+\frac{h^2}{2}\text{V},$$

V désignant une fonction de x_0 et de h, que nous nous proposons de déterminer.

A cet effet considérons une fonction de x, déterminée par l'équation

$$y=f(x_0+x)-f(x_0)-x f'(x_0)-\frac{x^2}{2}\text{V}.$$

On en tire

$$y'=f'(x_0+x)-f'(x_0)-x\text{V}$$

et

$$y''=f''(x_0+x)-\text{V}.$$

La fonction y s'annule visiblement pour $x=0$; elle s'annule aussi pour $x=h$, d'après l'égalité (K'): ainsi y' s'annule pour une valeur de x convenablement choisie, entre 0 et h. D'autre part, on peut observer que y' s'annule avec x. En résumé on peut donc dire que y' s'annule pour deux valeurs; l'une égale à zéro, l'autre comprise entre 0 et h. La fonction y'' dérivée de y', s'annule donc, pour une valeur de x comprise entre 0 et h et que l'on peut représenter par θh, en supposant:

$$0<\theta<h.$$

On a donc enfin

$$f''(x_0+\theta h)-\text{V}=0;$$

et la formule (H') se trouve ainsi démontrée.

298. Théorème. *On a*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{\varphi'(x_0+\theta h)}$$

les fonctions f et φ étant quelconques, mais continues, ainsi que leurs dérivées, dans l'intervalle x_0, x_0+h.

Posons

$$f(x_0+h)-f(x_0)=W[\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)],$$

et proposons-nous de déterminer W. Considérons la fonction de x qui est définie par l'équation

$$y=f(x_0+x)-f(x_0)-W[\varphi(x_0+x)-\varphi(x_0)].$$

Nous en déduisons

$$y'=f'(x_0+x)-W\varphi'(x_0+x).$$

D'ailleurs y s'annule pour $x=0$, et pour $x=h$; nous avons donc

$$f'(x_0+\theta h)-W\varphi'(x_0+\theta h)=0,$$

par suite

$$f'(x_0+h)-f(x_0)=\frac{f'(x_0+\theta h)}{\varphi'(x_0+\theta h)}[\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)];$$

c'est la formule que nous voulions établir.

299. Fonctions composées. Soit y une fonction des lettres $u, v, w, \ldots$; si l'on suppose que $u, v, w, \ldots$ sont elles-mêmes des fonctions de la variable indépendante x, on dit que y est une *fonction composée.*

300. Théorème. *La dérivée d'une fonction composée*

$$y=f(u, v, w, \ldots)$$

s'obtient par la formule

$$y'=u'f'_u(u, v, w \ldots)+v'f'_v(u, v, w \ldots)+\ldots$$

Considérons le cas d'une fonction composée de deux fonctions u et v; soit

$$y = f(u, v).$$

On a

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$$

ou

$$(1) \quad \Delta y = [f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)] + [f(u, v + \Delta v) - f(u, v)].$$

Nous ferons remarquer ici que l'identité

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h),$$

établie plus haut (§ 295), subsiste quand on suppose que la fonction $f(x)$ renferme une autre lettre λ, pourvu que λ ait la même valeur dans $f(x_0)$ et dans $f(x_0 + h)$. On écrira, dans ce cas, l'identité précédente sous la forme suivante

$$f(x_0 + h, \lambda) - f(x_0, \lambda) = hf'_{x_0}(x_0 + \theta h, \lambda)$$

on tire de cette identité, en posant $x_0 = u$, $h = \Delta u$, $\lambda = v + \Delta v$

$$(2) \quad f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) = \Delta u . f'_u(u + \theta \Delta u, v + \Delta v).$$

D'autre part, l'identité

$$f(\lambda, x_0 + h) - f(\lambda, x_0) = hf'_{x_0}(\lambda, x_0 + \theta' h)$$

donne

$$(3) \quad f(u, v + \Delta v) - f(u, v) = \Delta v . f'_v(u, v + \theta' \Delta v)$$

en posant

$$u = \lambda, \quad x_0 = v, \quad h = \Delta v$$

Les identités (2) et (3) permettent de transformer la relation (1), et de l'écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} f'_u(u + \theta \Delta u, v + \Delta v) + \frac{\Delta v}{\Delta x} f'_v(u, v + \theta' \Delta v).$$

En passant à la limite, on a

$$y' = u'f'_u(u, v) + v'f'_v(u, v).$$

Cette formule est générale. Si l'on avait à considérer une fonction composée de trois fonctions u, v, w; on mettrait l'accroissement Δy sous la forme

$$\begin{aligned}\Delta y = &[f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v + \Delta v, w + \Delta w)]\\ &+ [f(u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v, w + \Delta w)]\\ &+ [f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w)]\end{aligned}$$

et l'on prendrait, pour base de la démonstration, l'identité

$$f(x_0 + h, \lambda, \rho) - f(x_0, \lambda, \rho) = hf'_{x_0}(x_0 + \theta h, \lambda, \rho)$$

on trouverait ainsi

$$y' = u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w,$$

formule dans laquelle nous écrivons f'_u, au lieu de $f'_u(u, v, w)$, pour abréger l'écriture.

301. Fonctions implicites. Lorsque la relation qui existe entre la variable indépendante x et la variable dépendante y n'est pas une équation résolue par rapport à y et se trouve représentée symboliquement par

$$\varphi(x, y) = 0;$$

on dit que y est *une fonction implicite de x.*

302. Théorème. *La dérivée y' d'une fonction implicite définie par l'équation*

$$\varphi(x, y) = 0$$

s'obtient par la formule

$$\varphi'_x(x, y) + y'\varphi'_y(x, y) = 0.$$

Posons $x = u$, $y = v$, et considérons la fonction z

$$z = \varphi(u, v);$$

u étant égal à x, et v désignant une fonction de x; on peut dire que z est une fonction composée, dont la dérivée z' est donnée par la formule

$$z' = u'\varphi'_u + v'\varphi'_v.$$

Mais on a constamment $z = 0$; la dérivée de z est donc aussi constamment nulle ; ainsi on a

$$u'\varphi'_u + v'\varphi'_v = 0$$

ou,

$$\varphi'_x + y'\varphi'_y = 0,$$

en observant que $u' = 1$.

303. Applications. Les théorèmes précédents sont fréquemment employés dans le calcul des dérivées. Nous allons montrer quelques applications des deux règles importantes que nous venons d'établir.

1° *Trouver la dérivée de* $y = x^x$.

Prenons le cas le plus général d'une fonction définie par l'équation

$$y = u^v$$

u et v désignant des fonctions quelconques de x. On peut considérer y comme une fonction composée et l'on a

$$y' = u'vu^{v-1} + v'u^v\text{L}u.$$

Cette formule appliquée à l'exemple $y = x^x$, donne

$$y' = x^x\text{L}(ex).$$

2° *Trouver la dérivée de*

$$(1)\ y = x^{\frac{p}{q}},$$

p et q étant entiers, et quelconques.

Supposons d'abord p et q de même signe. La relation pro-
osée peut s'écrire

$$(2) \quad y^q - x^p = 0$$

t l'on peut considérer y comme une fonction implicite de x.
n a donc

$$-px^{p-1} + y'qy^{q-1} = 0$$

u

$$y' = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}.$$

Mais on a, d'après (1),

$$y^{q-1} = x^{\frac{p(q-1)}{q}}$$

ar suite

$$y' = \frac{p}{q}x^{p-1-\frac{p(q-1)}{q}}$$

ou

$$(3) \quad y' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Il nous reste à examiner le cas où p et q ont des signes contraires.

En mettant les signes en évidence on a

$$y = \quad ^{-\frac{p}{q}}$$

ou

$$y = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}.$$

En prenant la dérivée de ce quotient, par la règle connue, il vient

$$y' = \frac{-\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}}{x^{2\frac{p}{q}}}.$$

ou encore

$$(4) \quad y' = -\frac{p}{q}x^{-\frac{p}{q}-1}.$$

En comparant les formules (3) et (4) avec celle qui donne la dérivée de la fonction $y = x^m$, quand m est entier et positif, dérivée qui, comme nous l'avons vu, est égale à mx^{m-1}, on peut dire : *quel que soit l'exposant, entier ou fractionnaire, positif ou négatif, la dérivée de la fonction x^m, est toujours égale à mx^{m-1}.*

304. Théorème. *Soit $f(x, y)$ une fonction entière par rapport aux lettres x et y, on a*

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

L'écriture symbolique f_{xy} veut dire qu'on a pris d'abord la dérivée partielle de la fonction f, par rapport à x ; puis, ce résultat obtenu, qu'on a calculé sa dérivée partielle par rapport à y. D'après cela les deux opérations indiquées par les symboles f''_{xy} et f''_{yx} ne sont pas, en apparence, identiques : nous voulons précisément montrer qu'elles conduisent bien, par des voies différentes, aux mêmes résultats.

Soit $U = Hx^p y^q$, un terme quelconque de f; on a

$$U'_x = pHx^{p-1}y^q$$

et, par suite

$$U''_{xy} = pqHx^{p-1}y^{q-1}.$$

On a de même

$$U'_y = qHx^p y^{q-1}$$

et, par conséquent

$$U''_{yx} = pqHx^{p-1}y^{q-1}.$$

En comparant ces résultats on a

$$U''_{xy} = U''_{yx}.$$

Cette remarque étant vraie pour un terme quelconque de f, la propriété énoncée se trouve établie.

Nous avons supposé que l'expression U, considérée dans cette démonstration, renfermait à la fois les lettres x et y ; il est, en effet, évident que ces termes seuls devaient être soumis à la remarque précédente, les autres termes donnant un résultat nul quand on a pris deux dérivées successives, l'une par rapport à x, l'autre par rapport à y.

On exprime quelquefois la propriété précédente en disant : *l'ordre dans lequel on prend deux dérivées successives est indifférent.*

305. Théorème d'Euler. Le théorème d'Euler que nous allons démontrer est relatif aux dérivées d'une fonction entière et homogène. Nous rapelons qu'une forme algébrique entière U, est homogène, et du degré m, par rapport aux lettres $x, y, z\ldots$, lorsque la somme des exposants qui affectent ces lettres, dans un terme quelconque de U, est égale à m.

Le théorème d'Euler peut s'énoncer ainsi : *le produit d'une fonction entière et homogène des lettres x, y, z, etc..., par le degré de l'homogénéité, est identique à la somme des dérivées partielles de la fonction, multipliées, respectivement, par les variables correspondantes.*

Nous voulons démontrer l'identité

$$(1) \quad mU = xU'_x + yU'_y + zU'_z + \cdots$$

Pour fixer les idées prenons une forme entière à trois variables. Soit H un terme quelconque de cette fonction,

$$(2) \quad H = Ax^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma},$$

avec la condition

$$(3) \quad \alpha + \beta + \gamma = m.$$

De l'égalité (1) on déduit, successivement,

$$H'_x = \alpha A x^{\alpha-1} y^{\beta} z^{\gamma}$$

$$H'_y = \beta A x^{\alpha} y^{\beta-1} z^{\gamma}$$

$$H'_z = \gamma A x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma-1}$$

d'où

$$xH'_x + yH'_y + zH'_z = (\alpha + \beta + \gamma) A x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$$

ou

$$xH'_x + yH'_y + zH'_z = mH.$$

En appliquant cette formule aux différents termes de U, on reconnait l'exactitude de l'identité (1).

EXERCICES

1. *Démontrer que si l'on a*

$$y^2 = \frac{U_1 . U_2 \dots U_i}{V_1 . V_2 \dots V_j}$$

$U_1, U_2 \dots$; $V_1, V_2, \dots$ *étant des fonctions de* x; *le double de la dérivée logarithmique de* y *est égal à la différence entre les dérivées logarithmiques des facteurs* U *et* V; *démontrer, en d'autres termes, la formule*

$$2\frac{y'}{y} = \Sigma \frac{U'_1}{U_1} - \Sigma \frac{V'_1}{V_1}.$$

2. *Une fonction y est définie par les deux équations*

$$y = f(t)$$
$$x = \varphi(t)$$

t étant la variable indépendante; montrer que l'on a

$$y'_x = \frac{f'_t}{\varphi'_t}.$$

Généraliser cette question en considérant y comme définie par les deux équations

$$f(x, y, t) = 0 \quad \varphi(x, y, t) = 0$$

Pour cette seconde partie, on appliquera le théorème des fonctions composées et l'on aura

$$f'_x x'_t + f'_y y'_t + f'_t = 0$$
$$\varphi'_x x'_t + \varphi'_y y'_t + \varphi'_t = 0.$$

Ces deux relations et l'équation $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ permettent de calculer y'_x.

3. *Calculer les dérivées des deux fonctions*

$$y = \text{arc tg} \frac{2x(2x - 1)}{(x - 1)(3x - 1)}$$
$$Y = 2 \text{ arc tg } (2 - 5x).$$

Expliquer pourquoi ces deux dérivées sont égales.

4. *En désignant par u, une fonction de x, prendre la dérivée de la fonction*

$$y = \text{arc sin} \left[2u\sqrt{1 - u^2}\right]$$

On trouve

$$y' = \frac{2u'}{\pm\sqrt{1 - u^2}}$$

On peut expliquer ce résultat en le comparant avec la dérivée de la fonction *arc sin u*.

5. *Démontrer que la dérivée de*

$$y = \text{arc sin } 4u(1 - 2u^2)\sqrt{1 - u^2}$$

est

$$y' = \frac{4u'}{\pm\sqrt{1 - u^2}}.$$

Expliquer ce résultat.

6. *Démontrer que si l'on pose*

$$y = \text{arc sin } 8u(1 - 2u^2)(1 - 8u^2 + 8u^4)\sqrt{1 - u^2},$$

on a

$$y' = \frac{8}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

7. *En désignant par les lettres u et v, deux fonctions de x, vérifier le tableau suivant*

$$y = \text{arc tg}\frac{2uv}{u^2 - v^2} \qquad y' = 2\frac{uv' - vu'}{u^2 + v^2}$$

$$y = \text{arc sin}\frac{2\sqrt{uv}}{u + v} \qquad y' = \frac{uv' - vu'}{(u + v)\sqrt{uv}}$$

$$y = \text{arc tg}\frac{u^2 - v^2}{2uv} \qquad y' = 2\frac{vu' - uv'}{u^2 + v^2}$$

$$y = \text{arc tg}\frac{2\sqrt{uv}}{u - v} \qquad y' = \frac{uv' - vu'}{(u + v)\sqrt{uv}}$$

$$y = \text{arc sin}\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \qquad y' = \frac{(uu' - vv')(v^2 - u^2)}{uv(u^2 + v^2)}$$

$$y = \text{arc tg}\frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{v} \qquad y' = \frac{uu' - vv'}{u\sqrt{u^2 - v^2}}$$

$$y = \text{L}\sqrt{\frac{u}{v}} \qquad 2y' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

8. *Trouver les dérivées successives de*

$$y = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}}$$

On remarque que $y' = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$. On a d'autre part

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{2}}{x+i} + \frac{\frac{1}{2}}{x-i}$$

On a donc

$$y' = x^{-1} - \frac{1}{2}(x+i)^{-1} - \frac{1}{2}(x-i)^{-1}.$$

De cette formule on déduit $y^{(p)}$ sans difficulté.

9. *Vérifier le tableau suivant :*

$$y = \text{arc sin}\,\frac{2x}{1+x^2} \qquad y' = \frac{2}{1+x^2}$$

$$y = (\text{cotg}\,x)^{\frac{1}{\text{L tg}\,x}} \qquad y' = 0$$

$$y = \text{arc tg}\sqrt{x^2-2x} + \text{arc sin}\,\frac{1}{x-1} \qquad y' = 0$$

$$y = \text{arc sec}\,\frac{1}{x} + \text{arc cotg}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad y' = 0$$

$$y = \text{arc sec}\sqrt{x^2+1} \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \text{arc sin}\,(3x-4x^3) \qquad y' = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \text{arc tg}\,\frac{x^2-1}{x\sqrt{2-x^2}} \qquad y' = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} + \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} \qquad y' = 8x$$

$$y = \text{L}\left(x+p+\sqrt{q+2px+x^2}\right) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{q+2px+x^2}}$$

$$y = \frac{1}{2}(x+p)\sqrt{q+2px+x^2} + \frac{1}{2}(q-p^2)\,\text{L}\left(x+p+\sqrt{q+2px+x^2}\right) \qquad y' = \sqrt{q+2px+x^2}$$

$$y = \text{L}\,\frac{x-1}{x+1} - 2\,\text{arc tg}\,x \qquad y' = \frac{4}{x^4-1}$$

$$y = \text{arc tg}\,\frac{2x^2 - 2x}{2x - 1} \qquad y' = \frac{2}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$y = \mathrm{L}\,\frac{(x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_p)^{\alpha_p}}{(x - b_1)^{\beta_1} \ldots (x - b_q)^{\beta_q}} \qquad y' = \Sigma\,\frac{\alpha_1}{x - a_1} - \Sigma\,\frac{\beta_1}{x - b_1}$$

VINGT-TROISIÈME LEÇON

LA SÉRIE DE TAYLOR.

306. La formule de Taylor que nous allons établir donne le développement de la fonction $f(x+h)$, suivant les puissances croissantes de h, au moyen des dérivées successives de $f(x)$. Nous nous occuperons d'abord, et plus particulièrement, de la fonction entière ; mais nous donnerons aussi l'identité de Taylor, dans le cas général.

307. Formule de Taylor. Soit $f(x)$ la fonction proposée ; on a

$$f(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)+f(a)$$

ou, en posant

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-(f(a)}{x-a}$$

$$(A_0)\quad f(x)=(x-a)\varphi(x)+f(a).$$

De cette identité on déduit, en prenant les dérivées successives,

$$(A_1)\quad f'(x)=(x-a)\varphi'(x)+\varphi(x)$$

$$(A_2)\quad f''(x)=(x-a)\varphi''(x)+2\varphi'(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(A_p)\quad f^{(p)}(x)=(x-a)\varphi^{(p)}(x)+p\varphi^{(p-1)}(x).$$

Multiplions les identités (A_0), (A_1), (A_2), ... (A_p) ; respectivement par

$$1,\quad \frac{a-x}{1},\quad \frac{(a-x)^2}{1\cdot 2},\ \cdots\ \frac{(a-x)^p}{1\cdot 2\ldots p};$$

puis ajoutons les résultats ainsi obtenus ; nous avons, après réductions,

$$f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1\cdot 2}f''(x)+\ldots+\frac{(a-x)^p}{1\cdot 2\ldots p}f^{(p)}(x)=f(a)$$
$$+\frac{(a-x)^p(x-a)}{1\cdot 2\ldots p}\varphi^{(p)}(x).$$

Cette identité constitue une des formes algébriques de la formule de Taylor. On pose ordinairement $a-x=h$; l'identité précédente devient alors

$$(1)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x)+\ldots+\frac{h^p}{p!}f^{(p)}(x)+\frac{h^{(p+1)}}{p\,!}\varphi^{(p)}(x).$$

Dans cette formule on a posé

$$(2)\quad \varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}.$$

308. Formule de Taylor pour la fonction entière. (*Première démonstration.*) Dans le cas particulier où $f(x)$, désigne une fonction entière du degré m, on peut remarquer que $\varphi(x)$ représente aussi une fonction entière du degré $(m-1)$. On a donc $\varphi^m(x)=0$, et la formule (1), quand on y suppose $p=m$, donne

$$(3)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x)+\ldots+\frac{h^m}{m!}f^m(x).$$

Cette identité constitue la formule de Taylor, dans le cas de la fonction entière.

309. Formule du binôme de Newton. On peut déduire du calcul précédent la formule du binôme. Posons, en effet, $f(x)=x^m$; on a $f'(x)=mx^{m-1}$ et, en général,

$$f^{(k)}(x)=m(m-1)\ldots(m-k+1)x^{m-k}.$$

D'après cela, l'identité (3) donne

$$(x+h)^m = x^m + \frac{h}{1} m x^{m-1} + \frac{h^2}{1.2} m(m-1)x^{m-1} + \dots + h^m,$$

c'est la formule du binôme.

310. Formule de Taylor pour la fonction entière. (*Deuxième démonstration.*) A l'inverse de ce que nous venons de faire, on peut déduire la formule de Taylor de celle du binôme.

Soit

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_k x^{m-k} + \dots + A_m.$$

Nous avons donc

$$f(x+h) = A_0(x+h)^m + A_1(x+h)^{m-1} + \dots + A_k(x+h)^{m-k} + \dots + A_m.$$

Développons, d'après la formule du binôme, les expressions

$$(x+h)^m, \quad (x+h)^{m-1}, \dots$$

et groupons les termes de façon à les ordonner suivant les puissances croissantes de h, nous avons

$$\begin{array}{ll|l|l}
= A_0 x^m & + m A_0 x^{m-1} & \frac{h}{1} + \dots + m(m-1)\dots(m-k+1)A_0 x^{m-k} & \frac{h^k}{k!} + \dots + A_0 h^m \\
+ A_1 x^{m-1} & + (m-1)A_1 x^{m-2} & \quad + (m-1).(m-k)A_1 x^{m-k-1} & \\
\dots & \dots & \quad \dots & \\
+ A_{m-1} x & + A_{m-1} & \quad + k(k-1)\dots 1 . A_{m-k} & \\
+ A_m & & &
\end{array}$$

La première colonne est identique au polynôme proposé $f(x)$; le coefficient de h, à $f'(x)$: en général, celui de $\frac{h^k}{k!}$, à $f^k(x)$.

Ecrivons donc

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^k(x) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x).$$

On remarquera que le dernier terme de ce développement, le terme $A_0 h^m$, a été écrit sous la forme $\frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x)$, pour donner à la formule une apparence plus symétrique.

311. Formule de Taylor pour une fonction entière de deux ou plusieurs variables.

Considérons une fonction entière des lettres x et y ;

$$U = f(x, y).$$

Nous nous proposons de développer l'expression $f(x+h, y+k)$, suivant les puissances croissantes de h et de k, et au moyen des dérivées partielles successives de la fonction donnée.

Nous ferons d'abord remarquer que dans la démonstration de la formule de Taylor, telle que nous venons de l'établir, rien n'empêche de supposer que la fonction considérée renferme, en même temps que la lettre x, une autre lettre y. L'identité de Taylor s'écrit alors sous la forme suivante:

$$f(x+h, y) = f(x, y) + \frac{h}{1} f'_x(x, y) + \frac{h^2}{1.2} f''_{x^2}(x, y) \dots$$
$$+ \frac{h^m}{m!} f^{(m)}_{x^m}(x, y).$$

Cette identité subsiste évidemment quand on y remplace la lettre y, par $y+k$, et cela *quel que soit* k. On a donc

$$f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + \frac{h}{1} f'_x(x, y+k) + \frac{h^2}{2!} f''_{x^2}(x, y+k)$$
$$+ \dots + \frac{h^m}{m!} f^m_{x^m}(x, y+k).$$

D'autre part, et d'après la formule de Taylor, on a

$$f(x.y+k) = f(x,y) + \frac{k}{1} f'_y(x.y) + \frac{k^2}{1.2} f''_{y^2}(x,y) + \dots + \frac{k^m}{m!} f^m_{y^m}(x,y)$$

$$f'_x(x.y+k) = f'_x(x,y) + \frac{k}{1} f''_{xy}(x,y) + \dots + \frac{k^{m-1}}{(m-1)!} f^m_{xy^{m-1}}(x,y)$$

$$f''_{x^2}(x,y+k) = f''_{x^2}(x,y) + \frac{k}{1} f'''_{x^2y}(x,y) + \ldots + \frac{k^{m-2}}{(m-2)!} f^m_{x^2y^{m-2}}(x,y)$$

. . . .

$$f^m_{x^m}(x,y+k) = f^m_{x^m}(x,y).$$

Multiplions ces identités respectivement par

$$1, \quad \frac{h}{1}, \quad \frac{h^2}{2!}, \quad \ldots \quad \frac{h^m}{m!}.$$

Ces résultats étant ajoutés donnent la formule suivante

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) = f(x,y) &+ \frac{h}{1} f'_x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''_{x^2} + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}_{x^m} \\ &+ \frac{k}{1} f'_y + \frac{hk}{1} f''_{xy} \qquad + \frac{h^{m-1}\cdot k}{(m-1)!\,1!} f^{(m)}_{x^{m-1}y} \\ &\qquad + \frac{k^2}{1\cdot 2} f''_{y^2} \qquad + \frac{h^{m-2}k^2}{(m-2)!\,2!} f^{(m)}_{x^{m-2}y^2} \\ &\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad + \frac{k^m}{m!} f^{(m)}_{y^m} \end{aligned}$$

C'est cette identité qui constitue la formule de Taylor, dans le cas de deux variables. On remarquera que la démonstration précédente s'applique, sans modification essentielle, à un plus grand nombre de variables. On trouve ainsi pour trois variables x, y, z la formule suivante

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k,z+l) = f(x,y,z) &+ h f'_x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''_{x^2} + \ldots\ldots \\ &+ k f'_y + \frac{k^2}{1\cdot 2} f''_{y^2} \\ &+ l f'_z + \frac{l^2}{1\cdot 2} f''_{z^2} \\ &+ hk f''_{xy} \\ &+ kl f''_{yz} \\ &+ lh f''_{zx} \end{aligned}$$

Dans le second membre le nombre des colonnes est égal à $(m+1)$, quand on suppose que f désigne une fonction entière du degré m ; et la colonne de rang $(i+1)$ est

$$\frac{h^i}{i!} f^{(i)}_{x^i}$$

$$+ \frac{h^{i-1}k}{(i-1)!\,1!} f^{(i)}_{x^{i-1}y} + \frac{h^{i-1}.\,l}{(i-1)!\,1!} f^{(i)}_{x^{i-1}z}$$

$$+ \frac{h^{i-2}k^2}{(i-2)!\,2!} f^{(i)}_{x^{i-2}y^2} + \frac{h^{i-2}.\,kl}{(i-2)!\,1!\,1!} f^{(i)}_{x^{i-2}yz} + \frac{h^{i-2}l^2}{(i-2)!\,2!} f^{(i)}_{x^{i-2}z^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{k^i}{i!} f^{(i)}_{y^i} + \frac{k^{i-1}l}{(i-1)!\,1!} f^{(i)}_{y^{i-1}z} + \ldots + \frac{l^i}{i!} f^{(i)}_{z^i}.$$

312 [1]. On peut déduire, comme nous allons le montrer, de la formule de Taylor, la dérivée de la fonction implicite. Les considérations qui vont suivre, pour être exposées avec la rigueur désirable, doivent emprunter quelques propriétés à la théorie des équations, propriétés qui seront établies plus loin.

Mais nous entrerons d'abord dans quelques détails nécessaires, sur la fonction implicite.

Soit y une fonction implicite définie par l'équation

$$(1) \quad \varphi(x, y) = 0 ;$$

nous supposons que $\varphi(x, y)$ désigne une fonction entière des lettres x et y, à coefficients réels, et que le plus grand exposant qui affecte la lettre y est égal à q.

La difficulté qui s'attache aux fonctions implicites tient à ce fait que ces fonctions ne sont pas bien déterminées. En effet, à une valeur donnée de x, correspondent q valeurs de y:

1. La lecture de ce paragraphe et des suivants, jusqu'au paragraphe 316 inclusivement, peut, sans inconvénient, être reportée après la leçon 27.

c'est ce que montre le théorème de d'Alembert (§ 355). Ces valeurs $y_1, y_2, \ldots y_q$, varient, avec x, et chacune d'elles peut constituer une fonction continue et bien déterminée. Nous allons développer ce point dans le paragraphe suivant.

318. Théorème. *Lorsque l'équation* $\varphi(x, y) = 0$ *admet la solution* $x = x_0$ $y = y_0$; *si la dérivée partielle de* φ *par rapport à* y *n'admet pas cette solution, la fonction* y_0 *est bien déterminée dans l'intervalle* $x_0 + \varepsilon$, $x_0 - \varepsilon$, ε *désignant une quantité suffisamment petite.*

On a en effet, d'après la formule de Taylor,

$$\begin{aligned}\varphi(x_0 + h, y_0 + k) = \varphi(x_0, y_0) + h \varphi'_{x_0} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''_{x_0^2} + \ldots \\ + k\varphi'_{y_0} + \frac{hk}{1} \varphi''_{x_0 y_0} \\ + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \varphi''_{y_0^2}\end{aligned}$$

ou, puisque l'on a $\varphi(x_0 y_0) = 0$,

$$(2) \quad \begin{aligned}\varphi(x_0 + h, y_0 + k) = h \varphi'_{x_0} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''_{x_0^2} + \ldots \\ + k\varphi'_{y_0} + hk\varphi''_{x_0 y_0} \\ + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \varphi''_{y_0^2} .\end{aligned}$$

Si, dans cette identité, on fait $h = 0$, et si $x_0 + h$ et $y_0 + k$ représentent une solution de l'équation proposée $\varphi(x, y) = 0$, on doit déterminer k par la relation

$$(3) \quad k \left\{ \varphi'_{y_0} + \frac{k}{1 \cdot 2} \varphi''_{y_0^2} + \ldots \right\} = 0 .$$

Cette équation est du degré q par rapport à k. En effet

$\varphi(x, y)$ est du degré q, en y et, pour obtenir la relation (3), on a remplacé, dans cette équation, la lettre y par $y+k$; le résultat est donc bien du degré q en k. Or, parmi les racines de (3) se trouve la solution évidente $k=0$, ce qui prouve déjà que parmi les q valeurs de k, qui correspondent à l'accroissement h donné à la variable indépendante, il y en a une qui tend vers zéro, en même temps que h.

Je dis maintenant que cette valeur de k, voisine de zéro, est réelle.

En effet, si à la valeur h correspondait une racine imaginaire de la forme $\alpha_h - i\beta_h$, l'équation à coefficients réels,

$$\varphi(x_0+h, y_0+k)=0$$

admettrait aussi, comme nous le verrons bientôt (§ 360), la racine $\alpha_h + i\beta_h$. En supposant que h tende vers zéro, l'équation

$$\varphi(x_0, y_0+k)=0$$

aurait deux racines nulles, qui seraient les limites des deux expressions imaginaires conjuguées $\alpha_h + i\beta_h$ et $\alpha_h - i\beta_h$. L'équation (3) ne permet pas d'admettre cette conséquence puisque l'on suppose $\varphi'_{y_0} \neq 0$. Ainsi à la valeur x_0+h, donnée à la variable indépendante, correspond une équation du degré q en k; cette équation admet q racines, parmi lesquelles il en existe une et *une seule*, jouissant de la double propriété 1° d'être réelle, 2° d'avoir zéro pour limite, quand on suppose $h=0$. En désignant cette racine par k_h^1, $y_0 + k_h^1$ est une fonction bien déterminée de h, *puisque k_h^1 n'a qu'une valeur.*

314. Dérivée de la fonction implicite. Considérons maintenant deux solutions, x_0, y_0 ; x_0+h, y_0+k de l'équation

$$\varphi(x, y)=0.$$

La formule de Taylor donne la relation

$$(1) \quad 0 = h\varphi'_{x_0} + k\varphi'_{y_0} + \frac{h^2}{1.2}\varphi''_{x_0^2} + \dots + \frac{hk}{1}\varphi''_{x_0y_0} + \frac{k^2}{1.2}\varphi''_{y_0^2}.$$

Nous supposons que φ'_{y_0} est différent de zéro ; k désigne d'ailleurs la quantité que nous avons définie tout à l'heure et qui est une fonction bien déterminée de h. Par suite $\frac{h}{k}$ est une fonction bien déterminée ; et quand h tend vers zéro, k tend lui-même vers zéro. Nous allons montrer que ce rapport a une limite et nous déterminerons cette limite.

Nous distinguerons deux cas suivant que cette limite est finie ou infinie.

Dans le cas où la limite est finie, on la détermine facilement en remarquant que l'égalité (1) peut s'écrire

$$0 = \varphi'_{x_0} + \left(\frac{k}{h}\right)\varphi'_{y_0} + \frac{h}{1.2}\varphi''_{x_0^2} + \frac{k}{1}\varphi''_{x_0y_0} + k.\frac{\left(\frac{k}{h}\right)}{1.2}\varphi''_{y_0^2} + \dots$$

Si h tend vers zéro, et si $\frac{k}{h}$ ne croît pas indéfiniment, cette égalité prouve que tous les termes disparaissent, à l'exception des deux premiers ; et en posant $y' = \lim \frac{k}{h}$, on a

$$0 = \varphi'_{x_0} + y'\,\varphi'_{y_0}$$

Mais cette démonstration est en défaut quand on suppose que le rapport $\frac{k}{h}$ croît indéfiniment, quand h tend vers zéro. Nous allons montrer que cette hypothèse ne peut pas être admise quand on suppose, comme nous l'avons fait, $\varphi'_{y_0} \neq 0$. L'égalité (1) peut s'écrire, en effet,

$$0 = \frac{h}{k}\varphi'_{x_0} + \varphi'_{y_0} + h \cdot \frac{\left(\frac{h}{k}\right)}{1 \cdot 2}\varphi''_{x_0^2} + \cdots$$
$$+ \frac{h}{1}\varphi''_{x_0 y_0}$$
$$+ \frac{k}{1 \cdot 2}\varphi''_{y_0^2} -$$

Lorsque h tend vers zéro, $\frac{h}{k}$ tend, lui aussi, vers zéro, d'après l'hypothèse que nous avons faite. On a donc, à la limite,

$$0 = \varphi'_{y_0}$$

et nous supposons, au contraire, $\varphi'_{y_0} \neq 0$.

315. Remarque I. *La formule*

$$\varphi'_{x_0} + y'\varphi'_{y_0} = 0$$

donne encore la valeur de y' quand on suppose $\varphi'_{y_0} = 0$, et $\varphi'_{x_0} \neq 0$.

En effet l'égalité (1) permet de déterminer la limite du rapport $\frac{h}{k}$ puisqu'on suppose $\varphi_{x_0} \neq 0$.

Cette limite est donnée par la relation

$$\varphi'_{x_0} \lim \left(\frac{h}{k}\right) = 0$$

ou, puisque φ'_{x_0} n'est pas nul,

$$\lim \left(\frac{h}{k}\right) = 0$$

On peut donc dire que le rapport $\frac{k}{h}$ croît indéfiniment, quand h tend vers zéro. Mais la formule $y' = -\frac{\varphi'_{x_0}}{\varphi'_{y_0}}$, dans l'hypothèse $\varphi'_{y_0} = 0$,

$\varphi'_{x_0} \neq 0$, donne pour y' un nombre infiniment grand; cette formule peut donc encore, dans le cas particulier qui nous occupe, indiquer la valeur de y'.

316. Remarque II. *Lorsque l'on a simultanément*

$$\varphi'_{x_0} = 0 \quad \varphi'_{y_0} = 0,$$

la limite y' du rapport $\frac{k}{h}$ n'est plus donnée par la formule

$$\varphi'_{x_0} + y'\varphi'_{y_0} = 0,$$

mais par la relation

$$\varphi''_{x_0^2} + 2y'\varphi''_{x_0 y_0} + y'^2\varphi''_{y_0^2} = 0,$$

ou par une relation d'un degré supérieur à 2, par rapport à y'.

L'égalité (1) peut s'écrire, dans l'hypothèse que nous venons de faire

$$(1) \quad 0 = \frac{h^2}{1.2}\varphi''_{x_0^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''_{x_0^3} + \dots$$
$$+ \frac{hk}{1}\varphi''_{x_0 y_0} + \dots$$
$$+ \frac{k^2}{1.2}\varphi''_{y_0^2}$$

Lorsque h tend vers zéro, l'équation du degré q en k a deux racines qui tendent vers zéro, et deux seulement, si l'on suppose $\varphi''_{y_0^2} \neq 0$. Admettons que ces valeurs soient réelles, avant leur passage par zéro, et considérons l'une d'elles, en particulier : le rapport $\frac{h}{k}$ est encore une fonction de h, bien déterminée et si, pour $h = 0$, ce rapport ne croît pas indéfiniment, l'égalité (1) prouve que ce rapport a une limite, limite qui est une des racines de l'équation

$$(1) \quad y'^2\varphi''_{y_0^2} + 2y'\varphi''_{x_0 y_0} + \varphi''_{x_0^2}$$

Le raisonnement précédent s'appliquant également bien

à l'une et à l'autre des deux valeurs de k qui ont pour limite zéro : on voit ainsi que l'équation (2) donne l'une et l'autre des deux limites de $\frac{k}{h}$.

Ce résultat est en défaut quand on a simultanément

$$\varphi''_{y_0^2}=0 \quad \varphi''_{y_0x_0}=0 \quad \varphi''_{x_0^2}=0\,;$$

Dans ce cas, on voit que trois valeurs de k tendent vers zéro, en même temps que h et que les trois valeurs du rapport $\frac{k}{h}$, quand on suppose $h=0$, sont données, par l'équation du troisième degré

$$y'^3.\varphi'''_{y_0^3}+3y'^2.\varphi'''_{y_0^2x_0}+3y'.\varphi'''_{y_0x_0^2}+\varphi'''_{x_0^3}=0.$$

La généralisation de ces résultats est évidente.

317. Série de Taylor pour une fonction quelconque. On peut toujours poser

$$(1)\quad f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots+\frac{h^p}{p!}f^{(p)}(x_0)$$
$$+\frac{h^{p+q+1}}{p!(p+q+1)}\mathrm{R},$$

$f(x)$ et ses dérivées successives étant des fonctions continues.

Nous supposons que $p+q$ est une quantité positive ou nulle ; q désigne d'ailleurs une quantité arbitraire, et R, une inconnue que nous nous proposons de déterminer.

En posant

$$x_1=x_0+h,$$

l'identité précédente peut s'écrire

$$(2)\quad f(x_1)-f(x_0)=(x_1-x_0)f'(x_0)+\ldots+\frac{(x_1-x_0)^p}{p!}f^{(p)}(x_0)$$
$$+\frac{(x_1-x_0)^{p+q+1}}{p!(p+q+1)}\mathrm{R}.$$

Considérons maintenant une fonction de x, fonction que nous désignerons par $\varphi(x)$, et que définit l'identité

$$\varphi(x) = f(x_1) - f(x) - \frac{x_1 - x}{1} f'(x) - \frac{(x_1 - x)^2}{2!} f''(x) \dots$$
$$\dots - \frac{(x_1 - x)^p}{p!} f^{(p)}(x) - \frac{(x_1 - x)^{p+q+1}}{p!(p+q+1)} R.$$

En prenant la dérivée de cette fonction, et en tenant compte des simplifications qui se produisent, on a

$$\varphi'(x) = -\frac{(x_1 - x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x) + \frac{(x_1 - x)^{p+q}}{p!} R.$$

ou

$$(3) \quad \varphi'(x) = \frac{(x_1 - x)^p}{p!} \left[R(x_1 - x)^q - f^{(p+1)}(x) \right]$$

Ceci posé, on peut remarquer que l'on a : 1° $\varphi(x_1) = 0$, pour une raison évidente ; 2° $\varphi(x_0) = 0$, d'après l'égalité (2).

L'équation $\varphi'(x) = 0$ s'annule donc (§ 294), pour une valeur de x comprise entre x_0 et x_1, ou entre x_0 et $x_0 + h$, et que l'on peut représenter par $x_0 + \theta h$, en supposant

$$0 < \theta < 1.$$

L'identité (3) donne donc

$$R(x_1 - x_0 - \theta h)^q - f^{(p+1)}(x_0 + \theta h) = 0$$

ou

$$R = \frac{f^{(p+1)}(x_0 + \theta h)}{h^q (1 - \theta)^q}.$$

On a donc finalement

$$(A) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_0) + \dots$$
$$+ \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + M_p;$$

en posant

$$\text{(B)} \quad M_p = \frac{h^{p+1}}{p!(p+q+1)} \cdot \frac{f^{(p+1)}(x_0+\theta h)}{(1-\theta)^q}.$$

La formule (A) est la formule de Taylor ; M_p se nomme *le terme complémentaire*, ou le *reste* du développement [1].

318. Différentes formes du reste. On peut donner au terme complémentaire différentes formes que nous allons indiquer :

1° En supposant $q = 0$, on a

$$\text{(C)} \; M_{p,1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x_0+\theta h);$$

cette forme a été donnée par Lagrange.

2° Lorsqu'on a $p+q=0$, on obtient une autre forme

$$\text{(D)} \quad M_{p,2} = \frac{h^{p+1}}{p!}(1-\theta)^p f^{(p+1)}(x_0+\theta h);$$

c'est la forme indiquée par Cauchy.

3° En prenant dans le développement (A) un terme de plus ; en d'autres termes, en ajoutant et en retranchant

$$\frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x_0)$$

on

$$M_{p+1} = M_p - \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x_0).$$

Si, dans cette égalité on remplace successivement M_p par les valeurs données par les formules (C) et (D) on obtient deux

1. Cette démonstration est due à M. Rouché.

nouvelles formes du reste. Mais les formes de Lagrange et de Cauchy sont celles qu'on applique ordinairement.

319. Formule de Mac-Laurin. Si dans l'identité (A) qui a lieu pour toutes les valeurs de x_0 et de h, on suppose $x_0 = 0$, $h = x$, et $q = 0$, on obtient l'identité

$$(\text{A}') \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \mu_p;$$

en posant

$$(\text{B}') \quad \mu_p = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\theta x),$$

ces identités (A') et (B') constituent la formule de Mac-Laurin.

VINGT-QUATRIÈME LEÇON

VARIATIONS DES FONCTIONS.

320. Définition du maximum et du minimum. L'une des applications les plus intéressantes des fonctions dérivées est l'étude des variations d'une fonction donnée et, ce qui est un point particulier de cette étude, la recherche des valeurs maxima et minima de la fonction, valeurs que nous allons d'abord définir.

Soit ε une quantité positive, variable, et aussi petite que l'on voudra ; on dit que la fonction y, définie par l'équation,

$$y = f(x)$$

a passé par un maximum, pour $x = \alpha$, lorsque l'on a

$$f(\alpha - \varepsilon) < f(\alpha), \quad \text{et} \quad f(\alpha + \varepsilon) < f(\alpha).$$

On dit, au contraire, que y a passé par un minimum lorsque l'on a, dans ces mêmes conditions,

$$f(\alpha - \varepsilon) > f(\alpha), \quad \text{et} \quad f(\alpha + \varepsilon) > f(\alpha).$$

On suppose que y est une fonction continue, et bien déterminée, dans l'intervalle $\alpha - \varepsilon$, $\alpha + \varepsilon$.

On remarquera que cette définition exige que la valeur α, attribuée à x, soit finie.

321. Théorème. *Soit $f(x)$ une fonction entière ; si, pour $x = \alpha$, on suppose que l'on ait*

$$f'(\alpha) = 0 \quad f''(\alpha) = 0 \quad \ldots \quad f^{(p-1)}(\alpha) = 0$$

et

$$f^{(p)}(\alpha) \neq 0 ;$$

1° *Si* p *est un nombre pair la fonction, pour* $x = \alpha$, *passe par un maximum si l'on a* $f^{(p)}(\alpha) < 0$; *au contraire, elle passe par un minimum si l'on suppose* $f^{(p)}(\alpha) > 0$.

2° *Si* p *est un nombre impair, la fonction est croissante si* $f^{(p)}(\alpha) > 0$, *et décroissante si* $f^{(p)}(\alpha) < 0$.

Nous avons établi précédemment l'identité :

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 . 2} f''(x) + \dots + \frac{h^p}{1 . 2 \dots p} f^{(p)}(x) + \frac{h^{p+1}}{1 . 2 \dots p} \varphi^{(p)}(x) ;$$

$f(x)$ désignant une fonction entière.

On sait que dans cette formule $\varphi^{(p)}(x)$, désigne la dérivée d'ordre p de $\varphi(x)$, fonction qui est définie par l'identité

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

avec la condition $a - x = h$.

Il importe de remarquer que $\varphi(x)$, pour des raisons connues, est une fonction entière de x et de a.

Ceci posé remplaçons dans (1), x par α ; en tenant compte de l'hypothèse que nous avons faite, nous obtenons le résultat plus simple

$$(2) \quad f(\alpha + h) - f(\alpha) = \frac{h^p}{p!} [f^{(p)}(\alpha) + h\varphi^{(p)} a].$$

On peut maintenant observer que si l'on remplace dans $\varphi^p(x)$, x par α, et a par $(\alpha + h)$, $\varphi^p(x)$ devient une fonction entière de α et de h. D'après cela on peut donc dire que la parenthèse a pour limite $f^{(p)}(\alpha)$, quand h tend vers zéro.

Le théorème qui nous occupe est la conséquence immédiate de l'identité (3).

1° p *est un nombre pair:* pour des valeurs de h, suffisamment petites, positives ou négatives, la différence $f(\alpha+h)-f(\alpha)$, a le signe du nombre $f^{(p)}(\alpha)$; la fonction passe donc par un maximum ou par un minimum suivant que $f^{(p)}(\alpha)$ est négatif ou positif.

2° p *est un nombre impair :* dans ce cas le second membre de l'identité (2) change de signe, en même temps que h ; la fonction $f(x)$ est donc croissante ou décroissante suivant que l'on suppose $f^{(p)}(\alpha) > 0$, ou $f^{(p)}(\alpha) < 0$.

322. Examen du cas normal. En général, le nombre α qui annule la dérivée première de la fonction donnée ne rend pas nulle la dérivée seconde : c'est ce qu'on peut nommer le cas normal.

Il importe donc de remarquer le corollaire suivant auquel donne lieu le théorème général que nous venons de démontrer:

1° *Les valeurs de x qui font passer une fonction y par un maximum ou par un minimum sont celles qui annulent la dérivée première y', sans annuler la dérivée seconde y''* ;

2° *Il y a, pour cette valeur de x, qui annule la fonction y' un maximum ou un minimum pour y, suivant que la dérivée seconde y'', est négative ou positive.*

323. Il résulte de cette remarque que si l'on trouve une racine α de l'équation dérivée [1] il ne faut pas affirmer, au moins immédiatement, que pour $x=\alpha$ la fonction considérée passe par une *valeur limite* [2]. Il faut, avant de conclure sur ce point, vérifier que le nombre α n'est pas une racine de l'équation dérivée seconde.

1. On dit, dans un langage conventionnel et commode, *équation dérivée*: au lieu de *équation obtenue en égalant à zéro la dérivée de la fonction donnée*.

2. Valeur limite, veut dire valeur maxima ou minima, quand on ne veut pas distinguer l'une de l'autre.

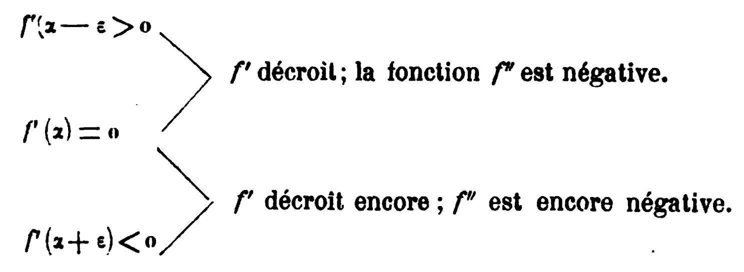
On peut, dans certains cas, éviter cette vérification, quelquefois pénible, en utilisant la propriété suivante :

Théorème. ***Lorsque la fonction dérivée s'annule, en passant du positif au négatif, la fonction passe par un maximum ; au contraire la fonction passe par un minimun, quand la dérivée s'annule, en passant du négatif au positif.***

Nous distinguons deux cas dans cette démonstration. 1° Soit

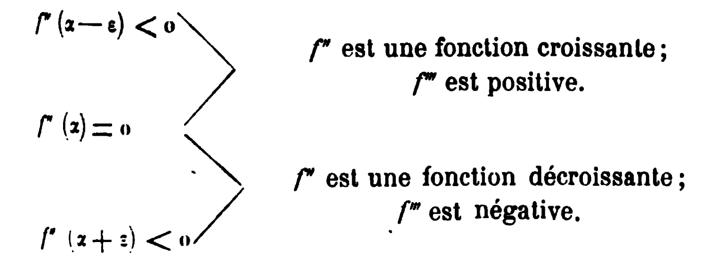
$$f''(\alpha) \neq 0.$$

ε désignant une quantité positive et, d'ailleurs, aussi petite que l'on voudra. On peut alors former le tableau suivant :



Ainsi au moment du passage, la fonction f'', qui est supposée continue, est négative et ceci prouve que f a passé par un maximum. On voit de même que f passe par un minimum quand la dérivée f' est négative, avant le passage, et positive après.

2° Supposons maintenant que l'on ait $f''(\alpha) = 0$. Nous venons de montrer que f'' avait le même signe avant et après le passage : Supposons, pour fixer les idées, que f'' est une valeur négative : on peut donc former le tableau suivant :



Mais alors f''' s'annule pour $x = \alpha$. Ainsi, dans les conditions précédentes on ne peut pas avoir $f''(\alpha) = 0$, sans supposer aussi $f'''(\alpha) = 0$. On peut poursuivre cette discussion. Si l'on a $f^{iv}(\alpha) \neq 0$, en reproduisant le raisonnement de tout à l'heure, on arrive à la même conclusion. Si l'on suppose, au contraire, $f^{iv}(\alpha) = 0$ on démontre que l'on a aussi $f^{v}(\alpha) = 0$; et ainsi de suite.

324. Remarque. Une fonction y, de x, peut passer par une valeur limite pour des valeurs de x qui rendent la dérivée infinie. Il suffit en effet, pour fixer le raisonnement qui établit le passage de $f(x)$ par une valeur limite, pour $x = \alpha$, que la fonction $f'(x)$ change de signe, quand x varie de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$; $f(x)$ étant, nous le rappelons, une fonction continue et bien déterminée dans cet intervalle. Or le changement de signe de f' peut avoir lieu par suite du passage de *cette* fonction par la valeur infinie.

Par exemple, soit,

$$y = a + \sqrt[3]{x^2} ;$$

y est une fonction continue et bien déterminée, quel que soit x. La dérivée,

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

est infinie pour $x = 0$ et passe du négatif au positif. On peut conclure de cette observation que y passe par une valeur minima, pour $x = 0$.

325. Rapprochement entre la méthode précédente et la méthode élémentaire.

La méthode élémentaire, la plus générale, pour trouver le maximum et le minimum d'une fonction, consiste, comme l'on sait, à discuter une équation du second degré, telle que

$$(1) \qquad x^2(a - a'y) + 2x(b - b'y) + c - c'y = 0$$

équation dans laquelle x désigne la variable indépendante et y la variable dépendante : a, a', b, b', c, c' sont des constantes données. On considère, dans cette méthode, la quantité U,

$$U = (b - b'y)^2 - (a - a'y)(c - c'y).$$

Si l'équation $U = 0$ admet deux racines réelles et inégales y_1, y_2 ; on dit que y passe par des valeurs limites y_1, y_2 pour des valeurs de la variable indépendante respectivement égales à

$$(2) \qquad x_1 = -\frac{b - b'y_1}{a - a'y_1}, \quad x_2 = -\frac{b - b'y_2}{a - a'y_2}.$$

L'idée qui sert de base à la méthode élémentaire n'est pas identique, au moins en apparence, avec celle que nous avons développée dans cette leçon. Il est pourtant facile de reconnaître que dans le cas que nous considérons, celui d'une fonction y définie par l'équation (1), les deux méthodes donnent des solutions identiques.

En effet, considérons une fonction implicite

$$f(x, y) = 0$$

on a

$$f'_x(x, y) + y' f'_y(x, y) = 0$$

c'est-à-dire, d'après l'équation (1),

$$2x(a - a'y) + 2(b - b'y) - y'(a'x^2 + 2b'x + c') = 0.$$

Pour obtenir une valeur limite de y, il faut avoir $y' = 0$; par conséquent

$$(3) \qquad x(a - a'y) + b - b'y = 0.$$

Ainsi dans la méthode que nous exposons les valeurs limites de y, et les valeurs de x qui leur correspondent, s'obtiennent en résolvant (1) et (3), par un rapport à x et à y. En combinant (1) et (3), on obtient l'équation en y,

$$(b - b'y)^2 - (a - a'y)(c - c'y) = 0;$$

c'est-à-dire la relation $U = 0$ donnée par la méthode élémentaire. D'ailleurs l'équation (3) fait connaître les valeurs correspondantes de x par des formules qui sont précisément les mêmes que les formules (2) employées dans cette méthode. Les deux procédés conduisent donc à des résultats identiques. Nous allons, d'ailleurs, dans le paragraphe suivant, étudier les variations de cette fonction y.

326. Variations de la fraction $\dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

Soit

$$(1) \quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'};$$

donnons à la variable indépendante la valeur $x + h$, l'accroissement k de la fonction peut se calculer par la formule

$$(2) \quad \frac{k}{h} = \frac{\delta x^2 - 2\delta' x + \delta'' + h(\delta x - \delta')}{(a'x^2 + b'x + c')[a'(x+h)^2 + b'(x+h) + c']},$$

en posant

$$\delta = ab' - ba', \quad \delta' = ca' - ac', \quad \delta'' = bc' - cb'.$$

Pour $h = 0$ le dénominateur du second membre se réduit à $(a'x^2 + b'x + c')^2$, quantité positive ou nulle; le numérateur, dans l'hypothèse où h est nul, est égal à $(\delta x^2 - 2\delta' x + \delta'')$: d'après cette double remarque le signe du rapport $\dfrac{k}{h}$ dépend donc, pour des valeurs de h suffisamment petites, de celui du trinôme U,

$$U = \delta x^2 - 2\delta' x + \delta''.$$

On est ainsi conduit, en voulant discuter le signe de U, à poser

$$\Delta = \delta'^2 - \delta\delta''$$

et à distinguer trois cas suivant que l'on suppose

$$\Delta = 0, \quad \Delta < 0 \quad \text{ou } \Delta > 0.$$

1er Cas ($\Delta = 0$). La condition $\Delta = 0$, donne

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb').$$

Cette relation prouve (§ 150), que les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

ont une racine commune x'. La fraction proposée a ses deux termes divisibles par $(x - x')$; après avoir effectué cette simplification on aura

$$y = \frac{Ax + B}{A'x + B'},$$

et nous avons montré (§ 268), qu'une pareille fonction était, ou constante, ou toujours croissante, ou enfin toujours décroissante : dans aucun cas elle n'admet de valeur limite.

2e Cas ($\Delta < 0$). Si nous supposons Δ négatif, la relation $\Delta = \delta'^2 - \delta\delta''$ prouve que l'on a nécessairement $\delta \neq 0$; l'équation $U = 0$ est du second degré et a ses racines imaginaires. Le signe de U est donc, quel que soit x, le même que celui de δ: la fonction est toujours croissante, ou toujours décroissante.

3e Cas ($\Delta > 0$). Nous examinerons, successivement, dans ce troisième cas, l'hypothèse où δ est différent de zéro et celle où l'on a, au contraire, $\delta = 0$.

Première hypothèse ($\delta \neq 0$). L'équation $U = 0$ est du second degré et elle admet deux racines réelles et distinctes x' et x''.

Nous ferons d'abord remarquer que ces quantités ne sont pas racines de l'équation

$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

lorsque le trinôme $a'x^2 + b'x + c'$ n'est pas un carré parfait.

En effet, pour que les deux équations

$$\delta x^2 - 2\delta' x + \delta'' = 0$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

aient une racine commune il est nécessaire que l'on ait $V = 0$, en posant

$$V = (\delta c' - a'\delta'')^2 + (\delta b' + 2a'\delta')(b'\delta'' + 2c'\delta').$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante. V peut s'écrire, par une transformation évidente.

$$V = (b'^2 - 4a'c')(\delta\delta'' - \delta'^2) + (a'\delta'' + b'\delta' + c'\delta)^2.$$

Mais on a

$$a'\delta'' + b'\delta' + c'\delta = 0;$$

la relation précédente devient, d'après cette remarque,

$$V = \Delta(b'^2 - 4a'c').$$

On voit ainsi que V n'est pas nul, si l'on a $b'^2 - 4a'c' \neq 0$.

Ceci posé, le rapport $\frac{k}{h}$ changeant de signe quand x est égal à x', ou à x''; la fonction y passe par une valeur limite: 1° pour $x = x'$; 2° pour $x = x''$, et les valeurs correspondantes de y sont finies et bien déterminées.

Dans le cas où le dénominateur de la fraction proposée est un carré parfait, les deux nombres x' et x'', donnent encore à y des valeurs limites; mais il faut signaler cette particularité que l'un d'entre eux fait acquérir à y une valeur infinie.

Deuxième hypothèse ($\delta = 0$). Dans ce cas on a $\Delta = \delta'^2$; par suite δ' est différent de zéro. Le numérateur de $\frac{k}{h}$ devient

$$-2\delta' x + \delta'' - h\delta';$$

le changement de signe de $\frac{k}{h}$ n'a plus lieu que pour une seule valeur de x, valeur finie, donnée par la formule

$$x = \frac{\delta''}{2\delta'}.$$

La valeur correspondante de y est finie si le dénominateur n'est pas un carré parfait; elle est infinie dans le cas contraire.

Vérifions ce dernier point.

Dans l'hypothèse $\delta = 0$, l'identité

$$a'\delta'' + b'\delta' + c'\delta \equiv 0$$

devient

$$a'\delta'' + b\,\delta' \equiv 0,$$

on a donc

$$x = -\frac{b'}{2a'}.$$

En remplaçant x par $-\dfrac{b'}{2a'}$ dans l'équation

$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

on trouve bien

$$b'^2 - 4a'c' = 0.$$

Résumé. Le tableau suivant résume cette discussion.

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

$$\delta = ab' - ba'$$
$$\Delta = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')$$
$$k = b'^2 - 4a'c'$$

$\Delta = 0$		La fraction peut être simplifiée, y est une fonction toujours croissante ou toujours décroissante, si elle n'est pas constante.
$\Delta < 0$		y n'admet pas de valeurs limites.
$\Delta > 0$	$\delta \gtrless 0$	y admet deux valeurs limites; ces valeurs sont finies si l'on a $k \gtrless 0$; une d'elles est au contraire infinie si l'on suppose $k = 0$.
	$\delta = 0$	$k \gtrless 0$ y admet une valeur limite ; cette valeur est unique et finie.
		$k = 0$ y admet encore une valeur limite ; mais cette valeur unique est infinie.

327. Valeurs limites des fonctions composées. Imaginons une fonction y définie par l'équation

$$y = f(x, z),$$

x étant une variable indépendante et z une variable liée à x par l'équation

$$\varphi(x, z) = 0$$

on a

$$y' = f'_x + z' f'_z$$

et

$$(1) \quad \varphi'_x + z' \varphi'_z = 0.$$

Les valeurs limites de y sont celles qui correspondent à des valeurs des inconnues qui satisfont à l'équation $y' = 0$. On a donc

$$(2) \quad f'_x + z' f'_z = 0.$$

Les équations (1) et (2) donnent la relation

$$(3) \quad \begin{vmatrix} f'_x & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_z \end{vmatrix} = 0.$$

On peut généraliser ce résultat.

Soit y une fonction de trois variables x, z, u,

$$y = f(x, z, u),$$

les variables z, u étant liées à x par les équations

$$(4) \quad \varphi(x, z, u) = 0$$

$$(5) \quad \psi(x, z, u) = 0.$$

En tenant compte de la condition $y = 0$ on a

$$f'_x + z' f'_z + u' f'_u = 0$$
$$\varphi'_x + z' \varphi'_z + u' \varphi'_u = 0$$
$$\psi'_x + z' \psi'_z + u' \psi'_u = 0,$$

et par suite

$$(6) \quad \begin{vmatrix} f'_x & f'_z & f'_u \\ \varphi'_x & \varphi'_z & \varphi'_u \\ \psi'_x & \psi'_z & \psi'_u \end{vmatrix} = 0.$$

S'il existe des valeurs de x, de z, et de u qui fassent acquérir à la fonction y une valeur limite, ces valeurs constituent une solution des équations (4), (5) et (6). Mais la réciproque n'est pas exacte; et toute solution de ces équations ne fait pas atteindre, nécessairement, à la fonction y, une valeur limite.

328. Valeurs limites des fonctions de plusieurs variables indépendantes. Soit y une fonction de plusieurs variables indépendantes x, z, u; fonction définie par l'équation

$$y = f(x, z, u).$$

Supposons qu'il existe pour y une valeur limite, et qu'elle corresponde aux valeurs suivantes

$$x = x_0, \ z = z_0, \text{ et } u = u_0.$$

Considérons la fonction de la variable x:

$$Y = f(x, z_0, u_0).$$

Lorsque x varie, Y a une valeur limite pour $x = x_0$; par suite la dérivée de Y par rapport à x s'annule, pour $x = x_0$. On a donc

$$f'_x(x_0, z_0, u_0) = 0.$$

Ce raisonnement peut être répété pour les dérivées partielles de y par rapport à z et par rapport à u. Ainsi x_0, z_0, u_0 constituent une solution des trois équations

$$f'_x(x, z, u) = 0$$
$$f'_z(x, z, u) = 0$$
$$f'_u(x, z, u) = 0.$$

La réciproque de cette propriété n'est pas exacte et l'on ne peut pas dire, qu'à toute solution du système précédent, corresponde nécessairement, pour y, une valeur limite.

329. Variations des fonctions transcendantes. Les théorèmes généraux que nous avons donnés (§ 321, 322, 323)

s'appliquent aux fonctions transcendantes. Il faut seulement supposer que ces fonctions et leurs dérivées sont continues, dans l'intervalle où l'on fait varier la variable indépendante. La démonstration qui établit cette généralisation des propriétés que nous venons de rappeler est identique à celle que nous avons donnée pour la fonction entière, mais elle prend pour base la formule de Taylor, dans le cas général (§ 317).

Soit par exemple, la fonction transcendante y,

$$(1) \quad y = x^{\frac{x+1}{x}}$$

on a

$$y' = x^{\frac{1-x}{x}} (x + 1 - Lx).$$

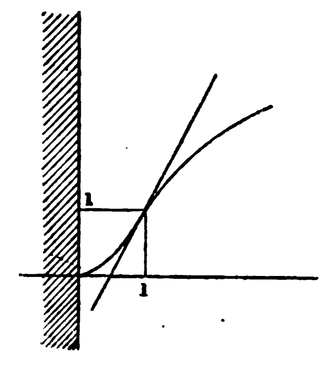
Cette valeur de y' est toujours positive. En effet en posant

$$u = x + 1 - Lx$$

on a

$$u' = \frac{x - 1}{x};$$

x ne peut varier que de 0 à $+\infty$, d'après l'équation (1) : d'ailleurs x variant, de 0 à 1, on a $u' < 0$; ainsi u décroît. Pour $x = 1$, on a $u = 2$, c'est la valeur minima de u. On déduit de là que u, et par suite y', est toujours positive; la fonction y est toujours croissante et la courbe qui représente cette fonction a la forme indiquée par la figure ci-dessous.



Nous n'insisterons pas autrement sur la variation des fonctions, cette question étant plutôt du ressort de la géométrie analytique. Cette étude nous occupera d'ailleurs, tout particulièrement, quand nous exposerons la construction des courbes, et nous la traiterons alors avec les développements qu'elle comporte.

EXERCICES

1. *Trouver le maximum de la fonction* U,

$$U = x^m(1 - x^p)^q.$$

2. *Trouver le maximum de* U,

$$U = x^m y^n,$$

quand on suppose

$$\alpha x + \beta y = k.$$

3. *Trouver le minimum de* U,

$$U = 4x^2 + 4xy + 2y^2 - 2y + 2.$$

Le minimum de U est égal à 1 ; il a lieu pour $x = -\frac{1}{2}$ et $y = 1$.

4. *Trouver, par la méthode élémentaire, le minimum de l'expression*

$$U = (a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 + \ldots + (a_nx + b_ny + c_n)^2$$

5. *Étudier les variations des fonctions* U,

$$U = P^{\frac{Q}{R}},$$

quand on donne: 1° *à* P, *les valeurs* x, x − 1, x + 1 ; 2° *à* Q, *et à* R, *les valeurs* 1, x, x − 1, x + 1.

6. *Étudier les variations de la fonction*

$$U = x^{\frac{1}{x^2}}$$

et montrer, en particulier, qu'elle passe par un maximum pour $x = \sqrt{e}$.

7. *On considère un cercle* Δ, *inscrit dans un carré* ABCD.

Soit AB *l'un des côtés de ce carré et* M *un point mobile sur* Δ ; *on propose d'étudier la variation du produit* MA. MB.

On peut traiter cette question en introduisant dans le calcul, l'angle ω que fait le rayon oM avec celui qui est perpendiculaire au côté AB. On trouve facilement

$$\overline{MA}^2 = R^2(3 - 2\sin\omega - 2\cos\omega).$$

et

$$\overline{MB}^2 = R^2(3 + 2\sin\omega - 2\cos\omega).$$

Ces formules permettent de traiter l'exercice proposé et plusieurs autres analogues, sur les quantités variables MA et MB.

8. *Maximum de* $\frac{x-1}{x^4}$; *plus généralement de* $\frac{x^p-1}{x^{p+q}}$

On appliquera l'identité

$$\frac{x^p-1}{x^{p+q}} = \left(\frac{1}{x}\right)^q\left[1 - \left(\frac{1}{x}\right)^p\right]$$

et l'on posera $\left(\frac{1}{x}\right)^p = X$.

9. *Trouver le minimum de*

$$U = x^p + \frac{1}{x^q}.$$

On cherchera le maximum de V,

$$V = \frac{x^q}{x^{p+q}+1}.$$

Ayant posé $x^{p-q}+1 = X$, on a

$$V^{p+q} = \left(\frac{1}{X}\right)^p\left(1 - \frac{1}{X}\right)^q,$$

égalité qui permet de résoudre la question, par une méthode élémentaire.

VINGT-CINQUIÈME LEÇON

EXPRESSIONS INDÉTERMINÉES

330. Définition de la vraie valeur d'une expression indéterminée. Imaginons une quantité y bien déterminée et définie par l'égalité

$$y = f(u, v, \ldots);$$

$u, v, \ldots$ étant des fonctions de x. Pour $x = x_0$, ces fonctions $u, v, \ldots$ prennent des valeurs correspondantes u_0, $v_0, \ldots$; et celle de y se calcule en effectuant l'opération qui est symboliquement désignée par $f(u_0, v_0, \ldots)$. Mais il peut arriver, dans certains cas singuliers, que par suite des valeurs particulières u_0, $v_0, \ldots$ l'opération dont nous parlons, opération qui, dans le cas général, est bien définie, soit au contraire, dans ce cas exceptionnel, dénuée de sens. Nous dirons alors que y a, pour $x = x_0$, *une valeur indéterminée.*

Pourtant y a, ordinairement, même pour $x = x_0$, une valeur bien déterminée et que nous allons définir. Donnons à x la valeur $x_0 + h$, h étant une quantité arbitraire que nous ferons ensuite tendre vers zéro. A chaque valeur de h correspond pour y une valeur y_h, bien déterminée. Si h tend vers zéro, deux cas peuvent se présenter : ou y_h croît au delà de toute limite, nous dirons alors que la vraie valeur de y pour $x = x_0$ est infiniment grande ; ou, au contraire, y_h reste toujours plus petit qu'un nombre fixe, déterminé ; dans cette hypothèse, y_h a, en général, une limite ; c'est cette limite qui constitue la *vraie valeur* de y, pour $x = x_0$.

Par exemple : la fonction

$$y = \frac{a^x}{x},$$

dans laquelle nous supposons $a > 1$, prend pour $x = \infty$ la forme $\frac{\infty}{\infty}$, qui est dénuée d'un sens précis ; c'est donc une expression indéterminée. Pourtant y a une valeur bien déterminée, pour $x = \infty$, puisque nous avons montré (§ 245) que y croissait indéfiniment en même temps que x.

Prenons encore la fonction

$$y = \frac{Lx}{x - 1} ;$$

y a une valeur bien déterminée pour toutes les valeurs positives de x, mais pour $x = 1$, y prend la forme $\frac{0}{0}$ à laquelle ne correspond aucune opération précise ; c'est encore une expression indéterminée. Pour trouver la vraie valeur de y, posons

$$x - 1 = \frac{1}{X},$$

on a

$$y = X.L\left(1 + \frac{1}{X}\right)$$

ou

$$y = L\left(1 + \frac{1}{X}\right)^X.$$

Si x tend vers l'unité, X croît au delà de toute limite, et $\left(1 + \frac{1}{X}\right)^X$ a pour limite e. On a donc finalement

$$\lim y = 1, \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

Nous allons indiquer comment, dans un grand nombre de cas, on peut résoudre une indétermination donnée.

331. Indétermination dans le cas des fonctions entières. Soit $y = \frac{U}{V}$, U et V désignant des fonctions entières de x. La valeur de y est indéterminée dans le cas où l'on a pour $x = x_0$, $U_0 = 0$ et $V_0 = 0$; et dans ce cas seulement. Puisque U et V s'annulent pour $x = x_0$, on a

$$U = (x - x_0)^p R$$
$$V = (x - x_0)^q S,$$

R et S étant des fonctions entières. On doit distinguer trois cas suivant que l'on suppose

$$p > q, \quad p < q, \quad \text{ou} \quad p = q.$$

Dans le premier cas la vraie valeur cherchée y_0 est égale à zéro ; elle est infinie dans le second cas ; enfin si p est égal à q, on a

$$y_0 = \frac{R_0}{S_0}.$$

332. Règle de l'Hôpital. Les expressions indéterminées de la forme $\frac{0}{0}$ peuvent se résoudre, le plus souvent, au moyen de la règle suivante : *lorsqu'on a* $f(x_0) = 0$, *et* $\varphi(x_0) = 0$, *la vraie valeur, pour* $x = x_0$, *de la fonction* y, *fonction déterminée par l'égalité*

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

est égale à celle de la fraction

$$\frac{f'(r_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Cet énoncé constitue la règle de l'Hôpital, et cette règle

est la conséquence immédiate de l'identité, précédemment démontrée (§ 298),

$$(1)\quad \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}=\frac{f'(x+\theta h)}{\varphi'(x+\theta h)}.$$

Supposons d'abord que x_0 ait une valeur finie et remplaçons dans cette identité x par x_0.

Puisqu'on suppose $f(x_0)=0$ et $\varphi(x_0)=0$; on a

$$\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{\varphi'(x_0+\theta h)}.$$

Remarquons d'ailleurs que cette égalité a lieu *quelque soit* h; supposons donc que h varie et tende vers zéro, les deux fractions

$$\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)},\quad \frac{f'(x_0+\theta h)}{\varphi'(x_0+\theta h)}$$

ont constamment la même valeur; pour $h=0$, la limite de $\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}$ est donc égale à celle de $\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$

Considérons maintenant *le cas où x_0 a une valeur infinie.* On doit remarquer qu'il est nécessaire d'examiner ce cas particulier parce que la formule (1), qui sert de base à la démonstration précédente, ne peut être employée quand on suppose $x_0=\infty$.

Nous allons montrer que la règle de l'Hôpital subsiste néanmoins, dans le cas où la valeur donnée à la variable est infinie.

Posons

$$x=\frac{1}{X};$$

on a

$$(2)\quad y=\frac{f\left(\frac{1}{X}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{X}\right)}.$$

On peut alors considérer y comme un quotient de deux fonctions de X et, pour $X = 0$, y prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On peut donc appliquer à l'expression $\frac{f\left(\frac{1}{X}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{X}\right)}$ la règle de l'Hôpital et prendre le rapport des dérivées des deux fonctions $f\left(\frac{1}{X}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{X}\right)$ par rapport à X. Pour prendre ces dérivées il faut observer que l'on peut considérer que $f\left(\frac{1}{X}\right)$ comme une fonction de fonction. Il suffit de poser $\frac{1}{X} = u$; la dérivée de $f\left(\frac{1}{X}\right)$, par rapport à X, est alors $u'f'_u(u)$; ou, $-\frac{1}{X^2}f'_{\frac{1}{X}}\left(\frac{1}{X}\right)$. Pour le même motif, la dérivée du dénominateur est $-\frac{1}{X^2}\varphi'_{\frac{1}{X}}\left(\frac{1}{X}\right)$. Le rapport de ces deux dérivées est donc égal à

$$\frac{f'_{\frac{1}{X}}\left(\frac{1}{X}\right)}{\varphi'_{\frac{1}{X}}\left(\frac{1}{X}\right)},$$

pour $X = 0$. Si l'on remarque enfin que $x = \frac{1}{X}$, on voit que la vraie valeur de l'expression indéterminée proposée est égale à celle du rapport $\frac{f'_x(x)}{\varphi'_x(x)}$, pour $x = \infty$.

La règle de l'Hôpital est donc exacte pour toutes les valeurs de x, sans excepter la valeur infinie.

333. Expressions indéterminées de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. La règle de l'Hôpital s'applique encore aux expressions indéterminées de la forme $\frac{\infty}{\infty}$; pour établir ce point nous distingue-

rons trois cas suivant que la limite cherchée est différente de zéro, nulle, ou infinie.

1er Cas. Soit $y = \frac{U}{V}$, la fonction qui pour $x = x_0$ prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

On peut écrire y de la manière suivante

$$(1) \quad y = \frac{\left(\frac{1}{V}\right)}{\left(\frac{1}{U}\right)},$$

$\frac{1}{V}$, et $\frac{1}{U}$ peuvent être considérées comme des fonctions de x qui s'annulent pour $x = x_0$. On peut donc appliquer la règle de l'Hôpital à cette expression indéterminée ; en désignant par z la vraie valeur cherchée, on a

$$z = \lim \frac{-\frac{V'}{V^2}}{-\frac{U'}{U^2}}, \quad (\text{pour } x = x_0)$$

ou

$$z = \lim \frac{U^2}{V^2} \lim \frac{V'}{U'}, \quad (\text{pour } x = x_0)$$

Si nous remarquons que $z = \lim \frac{U}{V}$, l'égalité précédente peut être simplifiée et donne finalement

$$\lim \frac{U}{V} = \lim \frac{U'}{V'};$$

en admettant que z ne soit ni nul, ni infini.

2e Cas. Supposons maintenant que la limite de $\frac{U}{V}$ soit égale à zéro. Posons

$$(2) \quad Y = \frac{U}{V} + A,$$

A désignant une quantité arbitraire, mais différente de zéro.

On a donc

$$(3) \quad Y = \frac{U + AV}{V}.$$

Y est encore une fonction de x qui, pour $x = x_0$, prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

En effet, si pour $x = x_0$, U + AV n'avait pas une valeur infinie, $\frac{U + AV}{V}$ aurait pour limite zéro et la formule (2) indique, au contraire, que la limite de Y est égale à A. On peut donc appliquer la règle de l'Hôpital à l'expression indéterminée que donne la formule (3), pour $x = 0$. On a ainsi

$$\lim Y = \lim \frac{U' + AV'}{V'}$$

ou

$$\lim Y = \lim \frac{U'}{V'} + A.$$

La limite de Y étant égale à A, on voit que la limite du rapport $\frac{U'}{V'}$, est égale à zéro. On a donc encore,

$$\lim \frac{U}{V} = \lim \frac{U'}{V'}.$$

3ᵉ Cas. Supposons enfin que la limite cherchée soit infinie. Alors le rapport $\frac{U}{V}$ prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$, pour $x = x_0$, et a pour limite zéro. D'après ce qui précède la vraie valeur de $\frac{V}{U}$ est égale à la limite de $\frac{V'}{U'}$; cette limite est donc égale à zéro. Ceci prouve que la limite de $\frac{U'}{V'}$, pour $x = x_0$, est une quan-

tité qui croît indéfiniment, comme la limite du rapport $\frac{U}{V}$.

334. Indéterminées de la forme (o. ∞). Soit y une fonction de x, définie par l'équation

$$y = U.V,$$

U et V désignant deux fonctions de x qui pour $x = x_0$ prennent des valeurs U_0 et V_0, telles que l'on ait simultanément

$$U_0 = 0 \quad V_0 = \infty.$$

Ces sortes d'indéterminations se ramènent à la forme $\frac{0}{0}$, en remarquant que l'on a

$$y = \frac{U}{\left(\frac{1}{V}\right)}.$$

Elles se ramènent aussi à la forme $\frac{\infty}{\infty}$, en écrivant y de la manière suivante :

$$y = \frac{V}{\left(\frac{1}{U}\right)}.$$

Remarque. Dans la pratique, il n'est pas indifférent de ramener les indéterminées de la forme (o. ∞), à celles de la forme $\frac{0}{0}$, ou à celles de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Il importe, dans chaque exemple, de choisir celle de ces deux transformations qui donne lieu aux calculs les plus simples.

Soit, par exemple, $y = x\mathrm{L}x$; on demande la valeur de y, pour $x = 0$. On écrira y, sous la forme

$$y = \frac{\mathrm{L}x}{\frac{1}{x}};$$

la règle de L'Hôpital donne alors

$$\lim y = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

ou

$$\lim y = -x.$$

Pour $x = 0$, on a, $\lim y = 0$.

On remarquera que, en adoptant l'autre transformation, en écrivant $y = \frac{x}{\left(\frac{1}{Lx}\right)}$, la règle de l'Hôpital donne lieu à des calculs qui se compliquent, de plus en plus, sans aboutir au résultat cherché. Nous reviendrons, d'ailleurs, tout à l'heure sur ce point, pour montrer comment la règle de l'Hôpital est, dans certains cas, impuissante à résoudre l'indétermination.

335. Indéterminées de la forme $(\infty - \infty)$. Soit $y = U - V$, U et V désignant des fonctions de x qui, pour $x = x_0$, prennent des valeurs infiniment grandes, et de même signe.

Dans ce cas, on met y sous la forme

$$y = U\left(1 - \frac{V}{U}\right)$$

et l'on cherche la limite de $\frac{V}{U}$; si cette limite n'est pas égale à l'unité, y est infini pour $x = x_0$. Si, au contraire, on a $\lim \frac{V}{U} = 1$, y se présente sous la forme $0 . \infty$. On peut alors traiter cette indéterminée, comme nous l'avons expliqué au paragraphe précédent.

Remarque. Lorsque les fonctions U et V ont des dénominateurs, lorsque

$$U = \frac{P}{Q}, \quad V = \frac{R}{S};$$

on peut remarquer que l'on a

$$y = U - V = \frac{PS - QR}{QS}.$$

En général, cette transformation est utile parce qu'on est ainsi ramené, immédiatement, à l'une des formes $\frac{0}{0}$, ou $\frac{\infty}{\infty}$, formes auxquelles s'applique la règle de L'Hôpital.

Lorsque U et V n'ont pas de dénominateur, on change x en $\frac{1}{X}$, et l'on peut alors effectuer, sur la nouvelle forme, la transformation de y, en un quotient.

Un exemple fera mieux comprendre l'utilité de cette remarque.

Considérons trois fonctions entières de x,

$$\begin{aligned} U &= x^p + \alpha x^{p-1} + \ldots + \lambda \\ V &= 2^q x^q + \beta x^{q-1} + \ldots + \mu \\ W &= x^r + \gamma x^{r-1} + \ldots + \nu \end{aligned}$$

et proposons-nous de trouver, pour $x = \infty$, la vraie valeur de l'expression suivante

$$y = \sqrt[p]{U} + \sqrt[q]{W} - \sqrt[r]{V},$$

les radicaux étant pris, d'ailleurs, avec des signes explicites.

En posant $x = \frac{1}{X}$, on a

$$y = \frac{(1 + \alpha X + \ldots + \lambda x^p)^{\frac{1}{p}} + (1 + \gamma X + \ldots + \nu X^r)^{\frac{1}{r}} - (2^q + \beta X + \ldots + \mu X^q)^{\frac{1}{q}}}{X}$$

Pour $X = 0$ cette expression se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

En appliquant la règle de l'Hôpital, on trouve facilement, $\frac{\alpha}{p} + \frac{\gamma}{r} - \frac{\beta}{q} 2^{1-q}$, pour la vraie valeur de y.

336. Indéterminées de la forme $(\infty)^0$, **ou de la forme** (0^0). Lorsque dans la fonction

$$y = U^V$$

on suppose que, pour $x = x_0$, U est infini, et V nul, on a l'expression indéterminée (∞^0). On ramène ce genre d'indétermination à la forme $(0 . \infty)$ en remarquant que l'on a

$$L.y = VLU.$$

Cette remarque s'applique encore au cas où l'on suppose que U et V s'annulent simultanément, pour $x = x_0$.

337. Remarque relative à (1^∞). Nous n'avons pas examiné, parmi les expressions indéterminées que nous avons signalées, celles qui correspondent à la forme (1^∞) ; ces indéterminées ont été, en effet, traitées précédemment (§ 251).

338. Sur le symbole (0^∞). Si dans la formule

$$y = U^V,$$

on suppose que, pour $x = x_0$, U soit nul, et V infini, y prend la forme (0^∞), qui est par elle-même dénuée de sens. Pourtant cette forme symbolique que prend une fonction, dans certains cas particuliers, n'est pas une expression indéterminée, dans le sens qu'il faut attribuer à ce mot. Ce symbole (0^∞) n'est pas non plus une valeur bien déterminée : il peut, suivant les exemples proposés, représenter, tantôt *zéro*, et tantôt *l'infini*. On a, en effet,

$$Ly = V.L(U);$$

U tendant vers zéro, par des valeurs positives, le facteur L (U), est infiniment grand, et négatif. Si V croît indéfiniment, par des valeurs positives, le logarithme de y est donc infiniment grand et négatif; par suite la limite de y est égale à zéro. Si au contraire V croît indéfiniment, mais par des valeurs néga-

tives, le logarithme de y étant infiniment grand et positif, la limite de y est elle-même infinie.

339. Impuissance de la règle de l'Hôpital. Il y a des cas assez nombreux, où la règle de l'Hôpital ne permet pas de résoudre l'indétermination proposée. On a pu remarquer, en effet, que cette règle ne donnait pas la vraie valeur de l'expression proposée ; qu'elle indiquait seulement que cette quantité inconnue était égale au quotient des dérivées. Si ce quótient est lui-même une quantité indéterminée, la règle de l'Hôpital substitue seulement, à la difficulté proposée, une difficulté de même genre. Dans la plupart des cas, en appliquant un certain nombre de fois la règle de l'Hôpital, on trouve la vraie valeur cherchée; dans d'autres cas, au contraire, la difficulté qu'on veut vaincre se perpétue indéfiniment, et c'est là le cas d'impuissance que nous voulions signaler.

Prenons d'abord l'exemple suivant

$$y = \frac{x\cos x - \sin x + \frac{x^3}{3}}{x^5 + x^4 \sin x};$$

et cherchons la valeur de y, pour $x = 0$. En appliquant quatre fois la règle de l'Hôpital on trouve que la valeur de y est égale à $\frac{1}{60}$. Ainsi, la règle s'applique dans cet exemple ; elle exige, il est vrai, un certain effort de calcul, mais enfin elle résout l'indétermination.

Soit maintenant la fonction

$$y = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\mu};$$

et soit proposé de trouver la valeur de y, qui correspond à $x = 0$. On doit ici traiter une indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$. L'ap-

plication de la règle de l'Hôpital donne, pour la valeur cherchée, celle de la fonction z

$$z = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{px^{p+2}}, \text{ (pour } x = 0\text{)}.$$

Si l'on compare z et y, on voit nettement que la règle de l'Hôpital a substitué simplement, à la difficulté proposée, une difficulté identique ; et l'on pourrait poursuivre indéfiniment l'application de cette règle, sans jamais aboutir.

340. Résolution directe des indéterminées. Nous ferons remarquer enfin que les indéterminées peuvent, dans la plupart des cas, se résoudre par des considérations particulières, et sans avoir recours à la règle de l'Hôpital. Nous avons, d'ailleurs, donné déjà des exemples d'expressions indéterminées résolues par des méthodes directes (§ 241, 264, 330).

Pour montrer une application nouvelle de cette méthode directe, prenons, précisément, l'exemple devant lequel nous avons vu, tout à l'heure, échouer la règle de L'Hôpital ; et cherchons, pour $x = 0$, la vraie valeur de

$$y = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^p}.$$

Posons $x = \frac{1}{X^{\frac{1}{2}}}$; nous avons, après ce changement de variable, à déterminer la vraie valeur de

$$y = \frac{X^{2p}}{e^X},$$

pour $x = \infty$.

On voit alors, sans difficulté (Lec. 18; exc. 1) que la limite de y est égale à zéro.

EXERCICES

1. *Trouver, par la méthode directe la vraie valeur de*

$$\frac{\sin px}{\sin qx}$$

pour $x = 0$.

2. *On a les relations*

$$a' = \frac{r+a}{2};\ r' = \sqrt{ra'};$$

trouver la limite du rapport $\frac{r'-a'}{r-a}$, *quand* a, *tend vers* r.

On pose

$$u = \frac{r'-a'}{r-a};$$

on trouve alors

$$u = \frac{\sqrt{r+a}}{\sqrt{2r}+\sqrt{2a}}\left(\frac{\sqrt{\frac{a+r}{2}}-\sqrt{r}}{\sqrt{a}-\sqrt{r}}\right).$$

Le facteur

$$\frac{\sqrt{\frac{a+r}{2}}-\sqrt{r}}{\sqrt{a}-\sqrt{r}}$$

est seul indéterminé, dans l'expression précédente. La vraie valeur de cette indéterminée est $\frac{1}{2}$; et on la trouve en multipliant les deux membres de l'égalité (1) par

$$\frac{\sqrt{\frac{a+r}{2}}+\sqrt{r}}{\sqrt{a}+\sqrt{r}}.$$

3. *Trouver la limite de l'expression* $y = a - \sqrt{a^2-b^2}$, *lorsque* a *et* b, *croissent au delà de toute limite; sachant que, dans ces conditions,* $\frac{b^2}{a}$ *tend vers une limite* p.

4. *Trouver directement la limite de y,*

$$y = \sqrt[p]{ax^p + bx^{p-1} + \dots} - \sqrt[p]{ax^p + b'x^{p-1} + \dots}$$

quand x croît au delà de toute limite.

On utilisera l'identité

$$u^p - v^p = (u - v)\left(u^{p-1} + u^{p-2}v + \dots + v^{p-1}\right)$$

après avoir posé

$$u = \left(ax^p + bx^{p-1} + \dots\right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$v = \left(ax^p + b'x^{p-1} + \dots\right)^{\frac{1}{p}}.$$

5. *Quelle est la limite de y,*

$$y = \frac{\operatorname{cosec} px - \operatorname{cotg} px}{\operatorname{tg} qx},$$

pour $x = 0$.

En transformant cette expression, on trouve

$$y = \frac{\operatorname{tg} \frac{px}{2}}{\operatorname{tg} qx}.$$

La vraie valeur est $\frac{p}{2q}$.

6. *Vérifier le tableau suivant*

FONCTION y.	VARIABLE x.	RÉSULTAT.
$y = x^{\sin x}$	$x = 0$	$y_0 = 1$
$y = \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$	$x = 0$	$y_0 = 2$
$y = x\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)$	$x = \infty$	$y_\infty = 0$
$y = \frac{1}{x} + \mathrm{L}x$	$x = 0$	$y_0 = \infty$

FONCTION y.	VARIABLE x.	RÉSULTAT.
$y = \frac{1}{x^2 \sin x} - \frac{1}{x^3}$	$x = 0$	$y_0 = \frac{1}{6}$
$y = \frac{\mathrm{L} \cos x}{\mathrm{L} \sin x - \mathrm{L} x}$	$x = 0$	$y_0 = 3$
$y = \frac{\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\, x - \mathrm{L} x - \mathrm{L} \cos x}{\mathrm{L} \sin x - \mathrm{L} \cos x}$	$x = 0$	$y_0 = 7$
$y = \frac{\mathrm{L} \sin x - \mathrm{L} x + \frac{x^2}{6}}{\mathrm{L} x + \frac{x^2}{3} - \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\, x}$	$x = 0$	$y_0 = \frac{1}{42}$
$y = \frac{\mathrm{L} \frac{1 + x}{1 - x} - 2x}{x - \sin x}$	$x = 0$	$y_0 = 4$

On peut résoudre un certain nombre de ces indéterminées en utilisant les formules

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^p}{p!} + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \frac{p+2}{p+1} \theta_p$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{4q+1}}{(4q+1)!} - \frac{x^{4q+3}}{(4q+3)!} \theta_q$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{4q}}{4q\,!} - \frac{x^{4q+2}}{(4q+2)!} \theta'_q$$

formules dans lesquelles θ_p, θ_q, θ'_q ont des valeurs comprises entre 0 et 1. La première a été établie plus haut (§ 247) ; les deux autres sont démontrées en trigonométrie et sont la conséquence du théorème exposé au paragraphe 292.

VINGT-SIXIÈME LEÇON

LES FORMES QUADRATIQUES.

341. Définition. Une expression entière et homogène, du second degré, entre les lettres $x_1, x_2, \ldots x_n$; constitue une *forme algébrique quadratique.*

En désignant ce polynôme par U_n, l'expression la plus générale de U_n est donnée par la formule

$$U_n = A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + \ldots + A_nx_n^2 + 2B_{1,2}x_1x_2 + 2B_{1,3}Bx_1x_3 + \ldots + 2B_{n-1,n}x_{n-1}x_n.$$

Cette notation sous-entend que l'on a $B_{\alpha,\beta} = B_{\beta,\alpha}$.

342. Théorème. *Toute forme quadratique, U_n, des lettres x_1, x_2, … x_n est décomposable, identiquement, en une somme algébrique de carrés de fonctions linéaires et homogènes ; le nombre de ces carrés étant égal, ou inférieur à n.*

La méthode que nous allons indiquer pour effectuer la décomposition de U_n, en une somme de carrés, exige que l'on distingue deux cas, suivant que tous les coefficients A, sont, ou ne sont pas nuls.

Supposons d'abord que A_1 soit différent de zéro. On a

$$(1)\quad A_1U_n = A_1^2x_1^2 + 2A_1x_1P + Q.$$

Dans cette formule P représente une forme linéaire et homogène; Q une forme quadratique des lettres $x_2, x_3, \ldots x_n$, ou

de quelques-unes d'entre elles. L'identité (1) peut aussi s'écrire

$$(\alpha)\quad A_1U_n = (A_1x_1 + P)^2 + (Q - P^2);$$

$Q - P^2$ désignant encore une forme quadratique des lettres $x_2 \ldots x_n$, ou de quelques-unes d'entre elles.

L'identité (α) constitue une première remarque sur laquelle nous reviendrons tout à l'heure.

Imaginons maintenant que tous les coefficients A soient nuls, dans la forme U_n ; alors l'un au moins des coefficients B sera différent de zéro. Supposons que ce coefficient, non nul, soit celui du terme en x_1x_2, et désignons-le par B. On a, en ordonnant convenablement la forme proposée,

$$(2)\quad 2BU_n = 4B^2x_1x_2 + 2BRx_1 + 2BQx_2 + S.$$

Dans cette identité R et Q désignent des fonctions linéaires et homogènes ; S, une forme quadratique des lettres $x_3 \ldots x_n$, ou de quelques-unes de ces lettres. L'égalité (2) peut s'écrire

$$(3)\quad 2BU_n = (2Bx_1 + Q)(2Bx_2 + R) + S - RQ,$$

$(S - RQ)$ désignant une fonction quadratique des lettres $x_3 \ldots x_n$, ou de quelques-unes d'entre elles.

D'ailleurs l'identité

$$mn = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2,$$

appliquée au produit

$$(2Bx_1 + Q)(2Bx_2 + R),$$

prouve que U_n, dans le cas qui nous occupe, peut être mis identiquement sous la forme

$$(\beta)\quad U_n = \alpha I^2 + \beta J^2 + V;$$

I et J sont des fonctions linéaires et homogènes ; V désigne

une forme quadratique ne renfermant ni l'une ni l'autre des lettres x_1 et x_2.

Cette identité constitue la seconde remarque que nous voulions faire pour établir le théorème en question, théorème qui est d'ailleurs la conséquence immédiate des identités (α) et (β).

En effet, en appliquant à la forme proposée U_n, l'identité (α), ou l'identité (β), suivant que cette forme possède ou non le carré d'une des variables ; on obtient un ou deux carrés, et, à leur suite, une forme quadratique V, renfermant, au minimum, une ou deux variables de moins.

En opérant de même sur V, ces calculs successifs donnent pour U_n une forme algébrique identique à la proposée et renfermant un nombre de carrés qui est, en général, égal au nombre des variables ; mais qui, dans tous les cas, ne lui est pas supérieur.

Nous donnerons à cette manière de décomposer une forme quadratique en carrés le nom de *méthode par réduction*. En désignant par $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_h$ des nombres qui peuvent être $+1$, ou -1, on aura, en suivant cette méthode, l'identité

$$(A) \quad U_n = \varepsilon_1 P_1^2 + \varepsilon_2 P_2^2 + \dots + \varepsilon_h P_h^2 ;$$

avec la condition

$$h \leqq n.$$

343. Forme irréductible. Il résulte de l'identité (A) qu'une forme quadratique est toujours décomposable en une somme de carrés. Le nombre de ces carrés est au moins égal à 1, mais il peut être aussi grand que l'on veut. Désignons, en effet, par W, la somme des carrés de p fonctions linéaires, homogènes et arbitraires des lettres $x_1\, x_2 \dots x_n$; on a

$$U_n = W + (U_n - W).$$

Dans cette identité $U_n - W$ est une fonction quadratique de $x_1\, x_2 \dots x_n$; et en la décomposant en une somme de carrés

on voit que U_n est mis, identiquement, sous la forme de carrés dont le nombre est supérieur à p ; par conséquent aussi grand que l'on veut, puisque p est arbitraire.

Ainsi une forme quadratique est susceptible d'être décomposée en une somme de carrés dont le nombre peut être aussi grand que l'on veut, sans pouvoir être inférieur à 1. Parmi ces décompositions, en nombre infini, on peut distinguer *celles qui renferment le plus petit nombre de carrés* et, si nous considérons l'une de ces formes, nous dirons qu'elle est *irréductible.*

344. Théorème. *Lorsqu'une forme quadratique* U_n *est décomposée en une somme de carrés de fonctions linéaires, homogènes et indépendantes; la décomposition obtenue est irréductible.*

Supposons que l'on ait trouvé l'identité

$$(1)\quad U_n = \varepsilon_1 P_1^2 + \varepsilon_2 P_2^2 + \ldots + \varepsilon_h P_h^2,$$

$P_1, P_2, \ldots P_h$ étant des fonctions linéaires, homogènes et indépendantes,

$$P_1 = a_1^1 x_1 + \ldots + a_n^1 x_n$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$P_h = a_1^h x_1 + \ldots + a_n^h x_n.$$

Nous voulons démontrer qu'on ne peut pas obtenir pour U_n, une décomposition en une somme de carrés dont le nombre soit moindre que h.

Posons, en effet,

$$(2)\quad U_n = \eta_1 R_1^2 + \eta_2 R_2^2 + \ldots + \eta_{h'} R_{h'}^2,$$

h' étant plus petit que h. Le second membre de (1) représentant une forme irréductible, on a (§ 342), $h \leqslant n$.

Puisque l'on a $h' < h$ et $h \leqslant n$, on a donc $h' < n$. Soit $n - h' = i$; i désignant un nombre entier positif. Les identités (1) et (2) donnent

$$(3)\quad \varepsilon_1 P_1^2 + \ldots + \varepsilon_h P_h^2 = \eta_1 R_1^2 + \ldots + \eta_{h'} R_{h'}^2.$$

Nous poserons

$$R_1 = b_1^1 x_1 + \dots + b_n^1 x_n$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$R_{h'} = b_1^{h'} x_1 + \dots + b_n^{h'} x_n.$$

Prenons les dérivées des deux membres de l'identité (3), par rapport à x_1 ; et soit

$$(4)\quad V_1 = \varepsilon_1 a_1^1 P_1 + \dots + \varepsilon_h a_1^h P_h - \eta_1 b_1^1 R_1 - \eta_{h'} b_n^{h'} R_{h'}$$

on a

$$(5)\quad V_1 = 0.$$

En prenant les dérivées partielles de (3) par rapport aux lettres $x_2, x_3, \dots x_n$, on a, de même

$$(5)\quad V_2 = 0,\ V_3 = 0,\ \dots\ V_n = 0.$$

Soient maintenant les équations

$$R_1 = 0 \quad R_2 = 0 \quad \dots \quad R_{h'} = 0 ;$$

elles constituent un système de h' équations linéaires et homogènes entre les inconnues $x_1, x_2, \dots x_n$. Puisqu'on suppose $h' < n$, ces équations admettent une infinité de solutions différentes de zéro (§ 107) et $(n - h')$ variables peuvent être choisies arbitrairement. Ces solutions transportées dans les identités (5) donnent les résultats suivants :

$$(5)\quad \begin{array}{l} \varepsilon_1 a_1^1 P'_1 + \dots + \varepsilon_h a_1^h P'_h = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_1 a_n^1 P'_1 + \dots + \varepsilon_h a_n^h P'_h = 0. \end{array}$$

Il va sans dire que P'_1 désigne ce que devient P_1, quand on remplace les variables par la solution particulière proposée ; et ainsi des autres. Ces égalités peuvent avoir lieu dans deux

hypothèses que nous allons successivement examiner.

Supposons d'abord que l'on ait

$$(7) \quad P'_1 = 0, P'_2 = 0, \ldots P'_h = 0 ;$$

dans ce cas on peut dire que les équations linéaires et homogènes

$$P_1 = 0, P_2 = 0, \ldots P_h = 0$$

admettent une infinité de solutions, $n - h'$ variables étant arbitraires et comme l'on a $n - h' > n - h$ nous avons vu (§ 112) que les formes $P_1, P_2, \ldots P_h$ n'étaient pas indépendantes. Cette conclusion est contraire à l'hypothèse.

Supposons maintenant que les équations (7) ne soient pas toutes vérifiées et considérons le système suivant

$$\varepsilon_1 a_1^1 X_1 + \ldots + \varepsilon_h a_1^h X_h = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_1 a_n^1 X_1 + \ldots + \varepsilon_h a_n^h X_h = 0.$$

Ces équations admettent une solution différente de zéro, savoir

$$X_1 = P'_1, \ldots X_h = P'_h.$$

Dans le tableau formé avec les coefficients des inconnues,

$$\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_h \cdot \left\| \begin{matrix} a_1^1 & \ldots & a_1^h \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \ldots & a_n^h \end{matrix} \right\|, \quad (n \geqslant h)$$

les déterminants d'ordre h sont tous égaux à zéro. Nous avons vu (§ 112) qu'il y avait alors une relation linéaire entre les formes $P_1, P_2, \ldots P_h$.

Ainsi, dans l'un comme dans l'autre des deux cas que nous avons successivement examinés, on arrive à cette conclusion que les formes P doivent être indépendantes ; conclusion qui est en contradiction avec l'hypothèse.

345. Théorème. *Lorsqu'une forme quadratique* U_n *est décomposée en carrés, d'après l'identité*

$$(1) \quad U_n = \varepsilon_1 P_1^2 + \varepsilon_2 P_2^2 + \dots + \varepsilon_h P_h^2,$$

si les fonctions P *ne sont pas indépendantes, la forme trouvée n'est pas irréductible et l'on peut décomposer* U_n *en une somme de carrés, dont le nombre est moindre que h.*

Puisqu'il y a dépendance entre les fonctions P, on a

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_h P_h = 0,$$

les coefficients λ, n'étant pas tous nuls. Supposons, par exemple, λ_h différent de zéro : on tire de l'identité précédente

$$P_h = -\frac{\lambda_1}{\lambda_h} P_1 \dots -\frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h} P_{h-1},$$

et l'identité (1) devient

$$U_n = \varepsilon_1 P_1^2 + \dots + \varepsilon_{h-1} P_{h-1}^2 + \varepsilon_h \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_h} P_1 + \dots + \frac{\lambda_{h-1}}{\lambda_h} P_h \right)^2.$$

Cette formule prouve que l'on peut considérer U_n comme une forme quadratique des lettres $P_1, P_2, \dots P_{h-1}$. On pourra donc (§ 342), décomposer U_n, par rapport aux lettres P, en une somme de $(h - 1)$ carrés, tout au plus. Cette décomposition étant effectuée, on pourra remplacer $P_1, P_2, \dots P_{h-1}$ par leurs expressions en fonction des lettres $x_1, x_2, \dots x_n$ et l'on obtiendra finalement pour U_n une décomposition en carrés dont le nombre est égal, ou inférieur à $(h - 1)$. La forme (1) n'est donc pas irréductible.

346. Théorème. *La méthode par réduction conduit à une forme irréductible.*

En effet, dans le cas où la forme possède les carrés de cer-

taines variables, celui de x_1 par exemple, la première fonction P_1 renferme x_1 et aucune des autres fonctions P ne contient cette lettre.

Ainsi P_1 est indépendante des autres fonctions P.

Si au contraire aucune lettre n'entre au carré dans la forme donnée, les deux premières fonctions P renferment, l'une et l'autre, les lettres x_1 et x_2 ; les autres fonctions P ne contiennent, au contraire, ni x_1, ni x_2. Je dis qu'il n'y a pas de dépendance entre les fonctions P.

En effet d'après l'identité (3), (§ 342), on a

$$P_1 = B(x_1 + x_2) + \frac{R+Q}{2}$$

et

$$P_2 = B(x_1 - x_2) + \frac{Q-R}{2}.$$

S'il existait une dépendance entre les fonctions P, on aurait

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots = 0.$$

En égalant alors à zéro les coefficients des variables x_1 et x_2, on trouverait

$$B(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$$
$$B(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

ou

$$2B\lambda_1 = 0$$

et

$$2B\lambda_2 = 0\,;$$

mais B n'est pas nul, on a donc

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0.$$

Ainsi s'il y a une dépendance entre les fonctions P, elle ne peut exister que pour les fonctions $P_3, \ldots P_h$.

En poursuivant ce raisonnement on reconnait qu'il ne peut y avoir de dépendance entre les formes linéaires et homogènes qui sont fournies par la méthode de réduction ; cette méthode conduit donc, avec certitude, à une forme irréductible.

347. Méthode par groupements. Lorsqu'on donne une forme quadratique on peut souvent, en groupant convenablement les termes, apercevoir une décomposition de cette forme en carrés.

Par exemple, la forme U

$$U = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz - 2zx - 2xy,$$

peut s'écrire ainsi :

$$U = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2.$$

Il importe de remarquer que cette manière d'opérer la décomposition de la forme quadratique peut conduire à une forme irréductible ; mais qu'elle peut aussi, dans d'autres cas, donner une forme réductible.

Ainsi dans l'exemple précédent la forme trouvée est réductible puisque la somme des trois fonctions linéaires est identiquement nulle.

Prenons maintenant la forme quadratique V.

$$V = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

La méthode par réduction conduit au résultat suivant

$$V = \frac{1}{3}(3x - y - z)^2 + \frac{8}{3}\left(y - \frac{z}{2}\right)^2 + 2z^2 ;$$

le second membre est une forme irréductible (§ 346) et, par conséquent, la décomposition de V ne peut pas être faite avec un nombre de carrés moindre que 3.

D'autre part, la méthode par groupements permet d'écrire V, sous la forme

$$V = (x+y-z)^2 + (y+z-x)^2 + (z+x-y)^2.$$

Le second membre représente encore une forme irréductible, puisqu'il ne renferme que 3 carrés.

348. Théorème. *Pour qu'une forme quadratique de n variables puisse être décomposée en carrés dont le nombre soit inférieur à n, il est nécessaire et suffisant que le discriminant de la forme soit nul.*

On appelle discriminant d'une forme quadratique U_n, le déterminant de n équations linéaires et homogènes obtenues en égalant à zéro les dérivées partielles de cette forme par rapport aux lettres $x_1, x_2, \dots x_n$. Nous désignerons ce discriminant par Δ_n.

1° *Si* U_n *est décomposable en une somme de carrés, dont le nombre est moindre que n, on a* $\Delta_n = 0$.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$(1) \quad U_n = \varepsilon_1 P_1^2 + \dots + \varepsilon_h P_h^2. \quad (h < n).$$

Conservons les notations employées plus haut (§ 344), et représentons par U_n^h la dérivée de U_n par rapport à x_h. En prenant les dérivées des deux membres de l'identité (1), successivement par rapport aux variables, nous obtenons, les identités suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}U_n^1 = \varepsilon_1 a_1^1 P_1 + \dots + \varepsilon_h a_1^h P_h \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{2}U_n^n = \varepsilon_1 a_n^1 P_1 + \dots + \varepsilon_h a_n^h P_h. \end{cases}$$

D'ailleurs les équations

$$P_1 = 0, \dots P_h = 0;$$

constituent un système d'équations linéaires et homogènes : le nombre des inconnues étant supérieur à celui des équations, un pareil système admet une infinité de solutions différentes de zéro (§ 107).

Imaginons l'une de ces solutions ; les identités (2) prouvent que cette solution vérifie les équations

$$(3)\quad U_n^1 = 0 \ \ldots\ U_n^n = 0\,;$$

le déterminant de ces équations, c'est-à-dire le discriminant de la forme, est donc nul.

2° *Si l'on a $\Delta_n = 0$, la forme U_n est décomposable en une somme de carrés, dont le nombre est inférieur à n.*

Nous savons déjà que U_n peut être décomposé en une somme de carrés dont le nombre est tout au plus égal à n. On peut donc poser

$$U_n = \varepsilon_1 P_1^2 + \ldots + \varepsilon_n P_n^2$$

et nous allons montrer qu'il existe nécessairement une dépendance entre les fonctions P.

Prenons, comme tout à l'heure, les dérivées partielles des deux membres, on a

$$\frac{1}{2} U_n^1 = \varepsilon_1 a_1^1 P_1 + \ldots + \varepsilon_n a_1^n P_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2} U_n^n = \varepsilon_1 a_n^1 P_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n^n P_n.$$

Puisque le déterminant Δ_n des équations (3) est nul, on peut trouver des quantités $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, qui ne sont pas toutes nulles, et qui vérifient l'identité

$$(4)\quad \lambda_1 U_n^1 + \ldots + \lambda_n U_n^n = 0.$$

On a donc

$$(5)\quad \mu_1 P_1 + \ldots + \mu_n P_n = 0$$

en posant

$$\mu_1 = \varepsilon_1 (a_1^1 \lambda_1 + \ldots + a_n^1 \lambda_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu_n = \varepsilon_n (a_1^n \lambda_1 + \ldots + a_n^n \lambda_n).$$

Si les nombres μ ne sont pas tous nuls la relation (5) prouve qu'il y a dépendance entre les fonctions P; si, au contraire, les coefficients μ sont tous nuls on a

$$\begin{array}{c} a_1^1\lambda_1 + \ldots + a_n^1\lambda_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^n\lambda_1 + \ldots + a_n^n\lambda_n = 0. \end{array}$$

Ces relations ayant lieu pour des valeurs des coefficients λ qui ne sont pas toutes nulles, on peut écrire

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant des formes linéaires, homogènes, P étant nul, ces fonctions ne sont pas indépendantes.

Ainsi il y a certainement dans l'hypothèse $\Delta_n = 0$, *une* dépendance entre les fonctions $P_1, \ldots P_n$; par suite la forme trouvée est réductible (§ 345).

349. Théorème. *Si l'on désigne par $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, une forme quadratique à n variables, on a*

$$X_1 f'_{x_1} + X_2 f'_{x_2} + \ldots + X_n f'_{x_n} = x_1 f'_{X_1} + x_2 f'_{X_2} + \ldots + x_n f'_{X_n}$$

Posons en effet

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_n^2 + 2B_{1,2} x_1 x_2 + \ldots + 2B_{n-1,n} x_{n-1} x_n.$$

On en déduit, successivement,

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} f'_{x_1} = A_1 x_1 + (B_{1,2} x_2 + \ldots + B_{1,n} x_n) \\ \frac{1}{2} f'_{x_2} = A_2 x_2 + (B_{1,2} x_1 + \ldots + B_{2,n} x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2} f'_{x_n} = A_n x_n + (B_{1,n} x_1 + \ldots + B_{n-1,n} x_{n-1}). \end{array}$$

Multiplions ces identités respectivement par $X_1, X_2, \dots X_n$: le **coefficient de** x_1 dans le second membre est égal à

$$A_1X_1 + B_{1,2}X_2 + \dots + B_{1n}X_n$$

c'est-à-dire égal à $\frac{1}{2}f'_{X_1}$. Cette remarque s'appliquant à toutes les **variables** on a donc l'identité

$$X_1f'_{x_1} + X_2f'_{x_2} + \dots + X_nf'_{x_n} = x_1f'_{X_1} + x_2f'_{X_2} + \dots + x_nf'_{X_n};$$

identité que nous nous proposions d'établir.

350. Théorème. *Le discriminant est un déterminant symétrique*.

En effet le déterminant Δ, des équations

$$\frac{1}{2}f'_{x_1} = 0, \quad \frac{1}{2}f'_{x_2} = 0 \dots \frac{1}{2}f'_{x_n} = 0$$

est

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_{1,2} & B_{1,3} & \dots & B_{1,n} \\ B_{1,2} & A_2 & B_{2,3} & \dots & B_{2,n} \\ B_{1,3} & B_{2,3} & A_3 & \dots & B_{3,n} \\ . & . & . & . & . \\ B_{1,n} & B_{2,n} & B_{3,n} & \dots & A_n \end{vmatrix}$$

Ce déterminant, qu'on appelle aussi, quelquefois, le *Hessien* de la forme quadratique, peut encore s'écrire de la manière suivante

$$\frac{1}{2^n}\begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1x_2} & \dots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2^2} & \dots & f''_{x_2x_n} \\ . & . & . & . \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \dots & f''x_n^2 \end{vmatrix}.$$

On a en effet

$$A_h = \frac{1}{2}f''x_h^2$$

et

$$B_{i,j} = \frac{1}{2} f''_{x_i x_j}.$$

351. Théorème. *Pour qu'une forme quadratique, de n variables, soit décomposable en une somme de h carrés indépendants, h étant plus petit que n, il est nécessaire que, dans le discriminant de la forme 1° tous les mineurs d'ordre (h+1) soient nuls; 2° qu'un mineur d'ordre h soit différent de zéro. Cette condition est d'ailleurs suffisante.*

Soit U la forme quadratique proposée,

$$(1) \quad U = A_1 x_1^2 + \ldots + A_n x_n^2 + 2B_{1,2} x_1 x_2 + \ldots + 2B_{n-1,n} x_{n-1} x_n.$$

Supposons que l'on ait

$$(2) \quad U = \varepsilon_1 P_1^2 + \varepsilon_2 P_2^2 + \ldots + \varepsilon_h P_h^2,$$

h étant plus petit que n. Des identités précédentes on déduit la suivante

$$\varepsilon_1 P_1^2 + \varepsilon_2 P_2^2 + \ldots + \varepsilon_h P_h^2 = A_1 x_1^2 + \ldots + 2B_{n-1} B_n x_{n-1} x_n.$$

Prenons successivement les dérivées des deux membres par rapport aux lettres x_1, x_2, ... x_n. Les notations, usitées plus haut (§ 344), étant conservées, on a

$$(A) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 a_1^1 P_1 + \ldots + \varepsilon_h a_1^h P_h = A_1 x_1 + \ldots + B_{1,n} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_1 a_n^1 P_1 + \ldots + \varepsilon_h a_n^h P_h = B_{1,n} x_1 + \ldots + A_n x_n. \end{cases}$$

Le discriminant Δ, de la forme proposée, est

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & \ldots & B_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{1,n} & \ldots & A_n \end{vmatrix}.$$

Si l'on considère les équations

$$(3) \quad P_1 = 0, \ldots P_h = 0;$$

elles admettent une infinité de solutions, $(n-h)$ variables étant arbitraires. En transportant ces solutions dans les identités (A), on voit que les équations

$$(4)\quad U'_{x_1}=0,\ldots U'_{x_n}=0$$

admettent une infinité de solutions, $(n-h)$ variables étant arbitraires. On sait que, dans ce cas, (§ 107) tous les déterminants d'ordre $(h+1)$, de Δ, sont nuls.

Je dis maintenant qu'il y a au moins un mineur, d'ordre h, différent de zéro. En effet si tous les mineurs d'ordre h étaient nuls dans Δ, les équations (4) seraient vérifiées par des valeurs des variables, $(n-h-1)$ d'entre elles étant arbitraires. Par suite les équations

$$\varepsilon_1 a_1^1 P_1 + \ldots + \varepsilon_h a_1^h P_h = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon_1 a_n^1 P_1 + \ldots + \varepsilon_h a_n^h P_h = 0$$

admettraient une infinité de solutions, $n-h-1$ variables étant arbitraires.

Dans ces conditions, on reconnait, par le raisonnement que nous avons donné plus haut (§ 344), qu'il y a dépendance linéaire entre les fonctions P, conclusion qui est contradictoire avec l'hypothèse que nous avons faite.

Réciproquement, *si tous les mineurs d'ordre $(h+1)$ du discriminant sont nuls, mais non tous les mineurs d'ordre h, la forme est décomposable en une somme de h carrés indépendants.*

En effet, la forme proposée est décomposable en une somme de carrés indépendants, notamment par la méthode de réduction. Soit H le nombre de carrés ainsi obtenus. D'après la proposition directe que nous venons d'établir :

1° Tous les déterminants mineurs d'ordre $(H+1)$ sont nuls ;

2° Il y a au moins un déterminant d'ordre H qui n'est pas nul.

Puisque, d'autre part, tous les mineurs d'ordre $(h+1)$ sont nuls et qu'un mineur d'ordre H est différent de zéro, on a

$$(1)\quad H < h+1.$$

D'ailleurs, tous les mineurs d'ordre $(H+1)$ sont nuls; et un certain mineur d'ordre h est différent de zéro, on a donc

$$(2)\quad h < H+1.$$

Les inégalités (1) et (2) ne peuvent être vérifiées par des valeurs entières de h et de H qu'en supposant $h = H$.

Cette démonstration établit, en même temps, le corollaire suivant :

352. Corollaire. *Si une forme quadratique est décomposée en carrés indépendants, de deux façons différentes, le nombre de ces carrés est le même, dans l'une et dans l'autre de ces deux décompositions.*

On peut aller plus loin dans cette étude des propriétés des formes quadratiques et montrer, notamment, que dans deux décompositions en carrés indépendants, les nombres des carrés précédés du signe +, et celui des carrés précédés du signe —, sont les mêmes. C'est la *loi d'inertie des signes*, loi due à *M. Sylvester*. Nous donnons la démonstration de ce théorème, dans une note placée à la fin de ce livre.

353. Conditions pour qu'un polynôme homogène et du second degré, à trois variables, soit un carré parfait.

Soit $f(x, y, z)$ la forme quadratique à trois variables,

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}f'_x = Ax + B''y + B'z$$

$$\frac{1}{2}f'_y = B''x + A'y + Bz$$

$$\frac{1}{2}f'_z = B'x + By + A''z.$$

Le discriminant de la forme est donc égal à Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

Pour que $f(x, y, z)$ soit un carré parfait, il est nécessaire et suffisant que tous les mineurs du second ordre de ce déterminant soient nuls.

Ces conditions sont *surabondantes*, et rentrent les unes dans les autres. Nous avons, en effet, précédemment reconnu (§ 74), qu'en supposant $A \neq 0$, si les conditions

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} A & B' \\ B'' & B \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} A & B' \\ B' & A'' \end{vmatrix} = 0$$

étaient vérifiées, $f(x, y, z)$ était un carré parfait.

EXERCICES

1. *Réduire à une forme plus simple l'expression* U,

$$U = (2bcx - acy - abz)^2 + (2cay - baz - bcx)^2 + (2abz - cbx - cay)^2.$$

2. *Démontrer, à priori, que le discriminant de la forme* U,

$$U = \frac{1}{n}\left\{ (x + y + z)^2 + (x + 2y + 2z)^2 + \ldots + (x + ny + nz)^2 \right\}$$

est nul. Vérifier que U *est en effet la somme de deux carrés.*

On trouve

$$U = \left[x + \frac{n+1}{2}(y + z) \right]^2 + \frac{n^2 - 1}{12}(y + z)^2.$$

3. *On considère la forme quadratique* U,

$$U = (x+2y+3z)^2 + (2x+3y+4z)^2 + \ldots + [nx + (n+1)y + (n+2)z]^2 - \frac{n(n-1)}{2(2n+1)}(y + 2z)^2;$$

démontrer que U *est un carré parfait.*

On peut résoudre cet exercice en posant

$$u_n = n(x+y+z) + (y+2z).$$

4. *Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique à trois variables se décompose en un produit de deux facteurs, est que le discriminant soit nul.*

On peut appliquer l'identité

$$UV = \left(\frac{U+V}{2}\right)^2 - \left(\frac{U-V}{2}\right)^2$$

et s'appuyer ensuite sur les principes exposés dans cette leçon (§ 348).

On peut aussi partir de l'identité

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = UV$$

en posant

$$U = \alpha x + \beta y + \gamma z$$
$$V = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z;$$

et l'on considère les dérivées partielles par rapport à x, y et z.

THÉORIE DES ÉQUATIONS

VINGT-SEPTIÈME LEÇON

THÉORÈME DE D'ALEMBERT.

Nous nous proposons d'abord, au début de la théorie des équations, d'établir que toute équation à coefficients réels, ou imaginaires, de la forme $m + ni$, admet une racine $\alpha + \beta i$. La démonstration que nous allons donner de ce théorème est due à M Walecki (¹).

354. Principe. *Pour démontrer qu'une équation du degré p, à coefficients imaginaires, admet une racine $\alpha + \beta i$, il suffit de reconnaître qu'une équation à coefficients réels du degré $2p$, admet une racine de cette forme.*

Soit $f(x) = 0$, l'équation proposée. Par un groupement convenable on peut toujours l'écrire sous la forme,

$$(1) \quad U + Vi = 0,$$

U et V désignant deux polynômes entiers en x, à coefficients réels, dont l'un, au moins, est du degré p.

1. *Démonstration d'un théorème fondamental de la théorie des équations algébriques, par M. Walecki.* (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 19 mars 1883.)

Considérons en effet les équations,

$$\frac{(y+t)^m+(y-t)^m}{2}=y^m+C_m^2 y^{m-2} t^2 + \ldots C_m^m t^m = 0$$

$$\frac{(y+t)^m-(y-t)^m}{2t}=C_m^1 y^{m-1}+C_m^3 y^{m-3} t^2 + \ldots + C_m^{m-1} y t^{m-2} = 0.$$

Si, entre ces deux équations nous éliminons t, le résultant est précisément $\theta(y)$. Ces équations étant d'ailleurs homogènes en y et t, $\theta(y)$ est une expression ne renfermant qu'un seul terme en y. D'autre part le terme diagonal de $\theta(y)$ est

$$(y^m)^{p-1}(C_m^{m-1}y)^p,$$

ou

$$m^p y^{2p(p-1)+p},$$

ou encore

$$m^p y^{p(2p-1)}.$$

Ainsi $\theta(y)$ est du degré $p(2p-1)$, et l'on peut poser

$$\theta(y)=\mathrm{H}y^{p(2p-1)}.$$

Il reste à vérifier que le coefficient numérique H, est différent de zéro. On a en effet

$$\mathrm{H}=\theta(1)$$

et si l'on supposait $\mathrm{H}=0$, les deux équations

$$\frac{(t+1)^m+(t-1)^m}{2}=0$$

$$\frac{(t+1)^m-(t-1)^m}{2t}=0$$

auraient une racine commune t'. Ce nombre t' serait donc aussi une racine commune aux deux équations

$$(t+1)^m=0 \quad (t-1)^m=0$$

ou aux équations

$$t+1=0 \quad t-1=0$$

ce qui est visiblement impossible.

356. Théorème de d'Alembert. *Toute équation algébrique a une racine.*

Nous distinguerons deux cas, dans la démonstration qui suit, selon que le degré de l'équation proposée est pair, ou impair.

Premier cas. *Le degré* μ *de l'équation proposée* $F(x)=0$, *est un nombre impair.*

Si les coefficients du polynôme $F(x)$ sont réels, le théorème qui nous occupe est évident ; nous en donnons plus loin la raison (§ 366).

Supposons donc qu'ils soient imaginaires et soit

$$F(x)=U+Vi.$$

Posons

$$f(x)=U^2+V^2.$$

En conservant la notation adoptée dans le paragraphe précédent, on a

$$f(x)=f_1(z^2)+zf_2(z^2).$$

$f_1(z^2)$ et $f_2(z^2)$ sont des polynômes qui ne peuvent pas être, simultanément, identiquement nuls. Si l'un d'eux est identiquement nul, ce sera $f_2(z^2)$, puisque $f_1(z^2)$ a pour premier terme $A_0z^{2\mu}$; $A_0x^{2\mu}$ désignant le premier terme de $f(x)$.

Supposons donc d'abord $f_2(z^2)=0$. L'équation $f_1(z^2)=0$ est du degré μ en X, après avoir posé $z^2=X$; comme μ est impair, l'équation $f_1(X)=0$ admet au moins une racine et l'on peut écrire

$$f_1(X)=(X-X_0)f_3(X).$$

$X-X_0$ est donc un diviseur, du second degré en x, du polynôme $f(x)$; et le théorème de d'Alembert se trouve vérifié dans ce cas particulier.

Admettons maintenant que $f_2(z^2)$ ne soit pas identiquement nul. L'équation R $(y) = 0$ est du degré $p(2p-1)$; ce nombre étant impair, elle admet donc une racine. Les polynômes f_1 et f_2 ont, alors, un diviseur commun et $f(x)$ est décomposable en un produit de deux facteurs U_1, V_1. Si l'un de ces facteurs est de degré impair, il admet un diviseur réel du premier degré et $f(x)$ a, par suite, une racine réelle.

Supposons, au contraire, que U et V soient l'un et l'autre de degrés pairs : soit $2q$ le degré de U_1, $2q'$ celui de V_1 ; je dis que l'un des nombres, q ou q', est impair. On a en effet,

$$2p = 2q + 2q',$$

ou

$$p = q + q',$$

p étant impair, l'un des nombres q, ou q', est nécessairement impair. Supposons, d'après cela, que le facteur U_1 soit du degré $2q$, q étant impair et inférieur à p. En raisonnant sur U_1, comme nous l'avons fait sur $f(x)$, on fera voir que U_1, par conséquent $f(x)$, admet un diviseur réel du premier ou du second degré ; ou, s'il n'en est pas ainsi, qu'il a du moins un diviseur U_2, qui est réel, et d'un degré $2r$, r étant un nombre impair et inférieur à q.

Ce dernier cas, celui où le diviseur n'est ni du premier, ni du second degré, ne peut d'ailleurs se présenter indéfiniment, les degrés des polynômes U_1, U_2, ... allant en décroissant. Il y a donc, en résumé, un diviseur de la forme $(x - \alpha - \beta i)$, au polynôme $U + Vi$, lorsque celui-ci est d'un degré impair.

Deuxième cas (1). *Le degré* μ, *de l'équation* $f(x) = 0$ *est un nombre pair.*

Considérons maintenant une équation à coefficients réels, ou imaginaires, et dont le degré μ soit égal à $2^i p$, p étant un nombre impair.

1. Cette dernière partie est extraite, textuellement, des Comptes rendus (*Loc. cit.*)

Pour abréger, je dirai que le nombre m est de parité i, et je vais démontrer que, si le théorème est établi pour toutes les équations dont le degré est de parité inférieure à i, il est encore vrai pour une équation de parité i; il sera, par suite, établi dans toute sa généralité, puisqu'il est vrai pour la parité zéro.

Soit $f(x)$ le premier nombre de l'équation; posons,

$$x = y + z, \text{ et } f(x) = \varphi(z^2) + z\psi(z^2).$$

Le résultant de φ et de ψ est de degré $\frac{\mu(\mu-1)}{2} = 2^{i-1}p(2^ip-1)$ par rapport à y; il est donc de la parité $(i-1)$ et, par suite, s'annule pour une valeur réelle ou imaginaire de y. En remarquant que φ est de parité $(i-1)$, on prouvera, comme plus haut, que $f(x)$ admet un diviseur du premier ou du second degré à coefficients réels ou imaginaires, ou un diviseur U_1 de parité i, mais de degré inférieur à celui de $f(x)$; on prouvera également que U_1 admet un diviseur du premier ou du second degré, ou un diviseur U_2 de parité i et d'un degré inférieur à celui de U_1. En continuant ces opérations, il est clair, puisque le dernier cas ne peut se présenter indéfiniment, que l'on déterminera un diviseur de $f(x)$ du premier ou du second degré, et, comme l'on sait qu'une équation du second degré à coefficients imaginaires est décomposable en facteurs du premier degré, la proposition énoncée est entièrement démontrée.

357. Théorème. *Une équation entière du degré m admet toujours m racines de la forme $(\alpha + \beta i)$; mais elle ne peut en admettre davantage sans être identiquement nulle.*

Le théorème de d'Alembert prouve que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine $a_1 + b_1 i$. On a donc (§ 145)

$$f(x) = (x - a_1 - b_1 i) f_1(x).$$

$f_1(x)$ désignant un polynôme dont le premier terme est $A_0 x^{m-1}$. Considérons maintenant l'équation

$$f_1(x) = 0;$$

elle aussi, d'après le théorème de d'Alembert, admet une racine $(a_2 + b_2 i)$ et l'on peut poser

$$f_1(x) = (x - a_2 - b_2 i) f_2(x);$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à l'identité

$$f_{m-1}(x) = A_0 x + c + di.$$

Cette identité peut s'écrire:

$$f_{m-1}(x) = A_0 (x - a_m - b_m i)$$

en posant,

$$c + di = -A_0 a_m - A_0 b_m i.$$

Cette égalité donne pour a_m et b_m des valeurs finies et bien déterminées, savoir

$$-a_m = \frac{ca_0 + db_0}{a_0^2 + b_0^2} \qquad -b_m = \frac{da_0 - cb_0}{a_0^2 + b_0^2}$$

en supposant

$$A_0 = a_0 + ib_0.$$

On déduit, de ces identités successives,

$$\text{(A)} \quad f(x) = A_0 (x - a_1 - b_1 i)(x - a_2 - b_2 i) \ldots (x - a_m - b_m i).$$

On voit ainsi que $f(x) = 0$, a m racines

$$a_1 + b_1 i, \quad a_2 + b_2 i, \ldots a_m + b_m i.$$

D'ailleurs, elle ne peut en admettre davantage. En effet, soit $\alpha + \beta i$ une racine différente de celles-ci ; le premier membre de l'identité (A) étant nul et tous les facteurs

$$x - a_1 - b_1 i, \quad x - a_2 - b_2 i, \ldots x - a_m - b_m i,$$

étant différents de zéro, quand on remplace x par $\alpha + \beta i$, il faut supposer $A_0 = 0$. Ainsi, le premier coefficient d'une équa-

tion du degré m qui admet plus de m racines est nul : appliquons cette remarque successivement aux équations

$$A_0 x^m + \dots + A_m = 0$$
$$A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Nous voyons que tous les coefficients A sont nuls ; l'équation proposée est donc identiquement nulle.

358. Définition des racines égales. L'identité (A) que nous venons d'établir n'a pas toujours lieu avec des facteurs binômes différents ; certains d'entre eux peuvent être identiques et s'il arrive que la décomposition de $f(x)$ en facteurs binômes linéaires fasse apparaître p fois, mais non $(p+1)$ fois, le facteur $(x - a - bi)$, nous dirons que la racine $(a + bi)$ est de multiplicité p, dans l'équation donnée. C'est en adoptant ce langage que l'on peut dire qu'une équation du degré m admet toujours m racines, et cet énoncé sous-entend que certaines de ces racines peuvent être égales.

Si nous désignons par P_1 le produit des facteurs binômes qui correspondent aux racines simples ; par P_2 celui des facteurs qui correspondent aux racines doubles, chacune d'elles n'étant prise qu'une fois, etc... ; on a, d'après ce que nous venons de voir,

$$(1) \quad f(x) \equiv A_0 P_1 (P_2)^2 (P_3)^3 \cdots (P_h)^h.$$

359. Théorème. *La fonction $f(x)$ n'est décomposable que d'une seule façon en facteurs linéaires.*

Posons en effet

$$(2) \quad f(x) \equiv B_0 Q_1 (Q_2)^2 \cdots$$

Les identités (1) et (2) donnent

$$(3) \quad A_0 P_1 (P_2)^2 \dots \equiv B_0 Q_1 (Q_2)^2 \dots$$

Dans le premier membre on a le terme $A_0 x^m$; on doit donc

retrouver ce terme dans le second membre, et ceci prouve : 1° que l'on a le même nombre de facteurs à droite et à gauche; 2° que $A_0 = B_0$.

Considérons maintenant un facteur de P_1, par exemple $x - a - bi$. Le premier membre s'annule pour $x = a + bi$; le second membre admet donc le facteur $x - a - bi$. On voit que ce facteur appartient à Q_1, parce que s'il appartenait à Q_2, il serait facteur double de $f(x)$, ce que nous ne supposons pas. En poursuivant ce raisonnement on trouve successivement $P_1 = Q_1$, $P_2 = Q_2$, etc ... Les deux décompositions sont donc identiques.

Nous signalerons encore quelques conséquences importantes du théorème de d'Alembert.

360. Théorème. *Si $f(x) = 0$ désigne une équation, à coefficients réels, elle admet le même nombre de fois la racine $(a + bi)$, et la racine conjuguée $(a - bi)$.*

En remplaçant x par $a + bi$, dans $f(x)$, on a

$$f(a + bi) = P - Qi.$$

et aussi, comme nous l'avons montré précédemment (§ 131)

$$f(a - bi) = P - Qi.$$

Si l'on suppose $f(a + bi) = 0$, on a $P = 0$ et $Q = 0$; et, par suite

$$f(a - bi) = 0.$$

On a donc

$$f(x) = (x - a - bi)(x - a + bi)\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction entière. On peut remarquer que les coefficients de $\varphi(x)$ sont réels. En effet, l'identité précédente peut s'écrire

$$f(x) = [(x - a)^2 + b^2]\varphi(x);$$

le polynôme $\varphi(x)$ est donc le quotient de $f(x)$, polynôme qui,

par hypothèse, n'a que des coefficients réels, par le trinôme du second degré $(x-a)^2+b^2$; cette remarque prouve que $\varphi(x)$ est bien un polynôme à coefficients réels. En raisonnant sur $\varphi(x)$, comme nous l'avons fait sur $f(x)$, et ainsi de suite, on aboutit à la propriété énoncée.

361. Théorème. *Une fonction entière $f(x)$, à coefficients réels, est toujours décomposable, identiquement, en facteurs réels du premier, ou du second degré.*

Cette propriété est la conséquence évidente de ce qui précède.

Soit $f(x)=0$ l'équation proposée et soit P le produit des facteurs binômes linéaires qui correspondent aux racines réelles. On a donc

$$f(x)=P.\varphi(x)$$

l'équation $\varphi(x)=0$ a tous ces coefficients réels et n'a que des racines imaginaires. Nous avons montré, au paragraphe précédent, que $\varphi(x)$ était décomposable en facteurs réels du second degré; finalement on peut donc dire que $f(x)$ est décomposable en facteurs réels du premier, ou du second degré.

362. Théorème. *Si deux équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ admettent les mêmes racines, et chacune de celles-ci avec le même degré de multiplicité, on a*

$$f(x)=\lambda\varphi(x);$$

λ désignant un coefficient indépendant de x, qui n'est ni nul, ni infini.

On a en effet, comme nous l'avons fait voir tout à l'heure,

$$f(x)=A_0P_1(P_2)^2\ldots(P_h)^h$$

et, d'après l'hypothèse

$$\varphi(x)=B_0P_1(P_2)^2\ldots(P_h)^h.$$

On tire de là

$$B_0f(x)=A_0\varphi(x),$$

ou bien

$$f(x) = \lambda\varphi(x)$$

en posant

$$\lambda = \frac{A_0}{B_0},$$

λ désignant une quantité qui n'est ni nulle, ni infinie.

363. Théorème. *La fonction $f(x)$ s'annule, en changeant de signe, si $x = \alpha$ est une racine réelle de multiplicité impaire : au contraire $f(x)$ s'annule, sans changer de signe, quand α désigne une racine réelle, de multiplicité paire.*

Pour préciser cet énoncé il faut imaginer que x est une variable indépendante et que l'on calcule, à chaque instant, la valeur de la fonction $f(x)$, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, toujours dans le même sens. Si l'on donne à x les trois valeurs

$$\alpha - \varepsilon, \quad \alpha, \quad \alpha + \varepsilon$$

il en résulte, pour $f(x)$, les valeurs correspondantes :

$$f(\alpha - \varepsilon), \quad f(\alpha), \quad f(\alpha + \varepsilon) ;$$

ε désignant une quantité positive et que l'on peut supposer aussi petite que l'on voudra.

Soit k le degré de multiplicité de la racine α : on a

$$f(x) = (x - \alpha)^k \varphi(x).$$

Comme nous supposons $\varphi(\alpha) \gtrless 0$, on peut choisir ε, assez petit pour que $\varphi(x)$ conserve le même signe, quand x varie dans l'intervalle $\alpha - \varepsilon$, $\alpha + \varepsilon$.

On a d'ailleurs

$$f(\alpha - \varepsilon) f(\alpha + \varepsilon) = (-\varepsilon)^k \cdot \varepsilon^k \cdot \varphi(\alpha - \varepsilon) \varphi(\alpha + \varepsilon).$$

D'après cela, si k est impair, on a

$$f(\alpha - \varepsilon) f(\alpha + \varepsilon) < 0 ;$$

on a, au contraire,

$$f(x-\varepsilon)f(x+\varepsilon) > 0,$$

si k est pair.

EXERCICES

1. *Démontrer que si toutes les racines d'une équation $f(x) = 0$, d'un degré impair m, sont des nombres en progression géométrique ; la racine m^{ieme}, changée de signe, du terme tout connu de l'équation, est une racine de l'équation.*

Soient a, aq, ... aq^{m-1} les m racines ; on a d'après le théorème de d'Alembert,

$$f(x) = (x-a)(x-aq)\ldots(x-aq^{m-1})\,;$$

Le terme tout connu est $f(0)$. On a d'ailleurs

$$f(0) = (-1)^m a^m q^{1+2+\ldots+(m-1)} = (-1)^m a^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}.$$

et, par suite,

$$\sqrt[m]{f(0)} = -aq^{\frac{m-1}{2}}.$$

On remarque enfin que $\frac{m-1}{2}$ est un nombre entier, qui fait partie de la suite 1, 2, ... $(m-1)$.

2. *Démontrer que si toutes les racines de l'équation*

$$x^m - Ax^{m-1} + \ldots + H = 0$$

sont en progression arithmétique, et si m est un nombre impair, $\frac{A}{m}$ est une des racines de l'équation.

Les racines sont

$$a,\ a+r,\ \ldots\ a+(m-1)r\,;$$

et elles ont pour somme la quantité

$$ma + \frac{m(m-1)}{2}r.$$

D'ailleurs l'identité de d'Alembert

$$f(x) \equiv (x-a)(x-a-r)\ldots(x-a-mr+r)$$

prouve que le coefficient de x^{m-1}, changé de signe, est égal à la somme des racines. On a donc

$$\frac{A}{m} = a + \frac{m-1}{2}r ;$$

si m est impair on voit donc que $\frac{A}{m}$ est une des racines.

3. *Les racines d'une équation de degré impair étant en progression harmonique, trouver une racine de l'équation.*

On sait que des nombres $a, b, c, \ldots k, l$ sont en progression harmonique lorsque les inverses sont en progression arithmétique. La solution de cet exercice se rattache ainsi immédiatement à celle de la question précédente. Il suffit de considérer l'équation aux inverses.

4. *Démontrer que l'équation à coefficients réels*

$$\frac{A^2}{x-a} + \frac{B^2}{x-b} + \ldots + \frac{L^2}{x-l} - H = 0,$$

a toutes ses racines réelles.

Soit $p+qi$ une racine imaginaire, $p-qi$ est aussi racine de l'équation; on a donc

$$\frac{A^2}{-a+p+qi} + \ldots - H = 0$$
$$\frac{A^2}{-a-p-qi} + \ldots - H = 0.$$

D'où, par combinaison,

$$q\left[\frac{A^2}{(p-a)^2+q^2} + \frac{B^2}{(p-b)^2+q^2} + \ldots\right] = 0$$

q n'étant pas nul, on devrait donc avoir $A=0$, $B=0$, etc.

VINGT-HUITIÈME LEÇON

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES ÉQUATIONS. LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

364. Nous allons exposer, dans cette leçon, quelques propriétés relatives aux équations d'un degré quelconque et nous prévenons ici, pour éviter des redites inutiles, que les équations que nous examinerons seront supposées satisfaire aux conditions suivantes :

1° Elles auront la forme entière et le second membre sera égal à zéro ;

2° Elles seront ordonnées par rapport aux puissances décroissantes de x ;

3° Les coefficients seront réels ;

4° Le premier coefficient A_0 sera supposé positif, et le dernier coefficient A_m, différent de zéro.

365. Théorème I. *Soit $f(x) = 0$ une équation ; si le produit $f(\alpha)\,f(\beta)$ est négatif, il y a au moins une racine comprise entre α et β.*

En effet $f(x)$ est une fonction continue (§ 234) ; elle ne peut, par conséquent, passer d'une valeur positive à une valeur négative sans s'annuler, une fois au moins, pour une valeur de x, comprise entre α et β (§ 230).

366. Théorème II. *Une équation d'un degré impair a au moins une racine réelle ; cette racine ayant un signe contraire à celui du dernier terme.*

Soit A_0x_m le premier terme de l'équation proposée $f(x) = 0$, et A_m le dernier terme. Substituons successivement, dans $f(x)$, 1° un nombre positif très grand ; 2° zéro ; 3° un nombre néga-

tif très grand, en valeur absolue. La première substitution donne un résultat positif (§ 235); comme m est impair A_0x^m a le signe —, lorsqu'on donne à x une valeur négative; la troisième substitution fait donc acquérir à la fonction $f(x)$ une valeur négative.

D'après cette remarque, et en s'appuyant sur le théorème précédent, on voit que si A_m est négatif il y a une racine entre o et $+\infty$; au contraire, si l'on suppose $A_m > 0$, on voit que l'équation proposée admet une racine, entre o et ∞. En résumé, dans tous les cas, on peut donc dire que $f(x) = 0$ a une racine d'un signe contraire à son dernier terme.

367. Théorème III. *Une équation dont le degré est pair, et dont le dernier terme est négatif a, au moins, deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.*

En effet, en substituant $+\infty$, o, et $-\infty$, on peut former le tableau suivant

x	$+\infty$	o	$-\infty$
$f(x)$	+	—	+

Le théorème (I) prouve qu'il y a: 1° au moins une racine entre $+\infty$ et o; 2° au moins une autre racine entre o et $-\infty$. La proposition se trouve ainsi établie.

368. Théorème IV. *Soit l'équation $f(x) = 0$; si l'on a*

$$f(\alpha)f(\beta) < 0$$

il y a un nombre impair de racines dans l'intervalle α et β; si l'on suppose, au contraire,

$$f(\alpha)f(\beta) > 0 \quad .$$

il y a zéro, ou un nombre pair de racines, entre α et β.

Désignons par x_1, x_2, . . x_p les racines de l'équation, comprises entre α et β. On a

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_p)\varphi(x),$$

$\varphi(x) = 0$ n'ayant que des racines imaginaires, ou des racines réelles, mais non comprises dans l'intervalle α, β.

L'identité précédente donne, successivement,

$$f(\alpha) = (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \dots (\alpha - x_p)\,\varphi(\alpha)$$

et

$$f(\beta) = (\beta - x_1)(\beta - x_2) \dots (\beta - x_p)\,\varphi(\beta);$$

par suite

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = \left(\frac{\alpha - x_1}{\beta - x_1}\right)\left(\frac{\alpha - x_2}{\beta - x_2}\right) \dots \left(\frac{\alpha - x_p}{\beta - x_p}\right)\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}.$$

On remarquera d'abord que le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}$ est positif; car si $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ étaient de signes contraires, l'équation $\varphi(x) = 0$, admettrait au moins une racine entre α et β (§ 365), ce que nous ne supposons pas. D'autre part chacune des fractions

$$\text{(A)} \qquad \frac{\alpha - x_1}{\beta - x_1}, \frac{\alpha - x_2}{\beta - x_2}, \dots \frac{\alpha - x_p}{\beta - x_p}$$

a une valeur négative puisque chacun des nombres x_1, x_2, ... x_p est compris entre α et β. Si $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ont des signes contraires, le nombre des fractions (A) est impair: il y a donc un nombre impair de racines dans l'intervalle considéré. Au contraire si $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ont le même signe, on doit admettre, ou qu'il n'existe aucune fraction (A), ou qu'elles sont en nombre pair.

369. Remarque. On peut observer que la démonstration précédente ne suppose pas que x_2, par exemple, soit différent de x_1. Les racines comprises dans l'intervalle α, β doivent donc être comptées, quand on applique le théorème précédent, dit *théorème des substitutions*, avec leur degré de multiplicité. Soit par exemple

$$f(x) = (x - 1)^2 (x - 2)^3 (x^2 + 1)$$

on a

$$f(3) = 40, \quad \text{et} \quad f(0) = -8.$$

Entre o et 3 il y a, à prendre les choses à la lettre, deux racines réelles, 1 et 2; mais on doit dire, pour se conformer à la démonstration précédente, qu'il y a, dans cet intervalle, *cinq racines réelles*; savoir, deux racines égales à 1, et trois racines égales à 2.

370. Définitions. Lorsqu'une équation du degré m

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_px^{m-p} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

a tous ses coefficients A_0, A_1, ... A_m différents de zéro, on dit que *l'équation est complète*; au contraire si A_px_{m-p} est suivi du terme $A_{p+h+1}x^{m-p-h-1}$, on dit qu'entre ces deux termes il existe *une lacune*. Cette lacune est *paire* ou *impaire* suivant que le nombre h, des termes absents, est lui-même pair ou impair.

Lorsque les coefficients de deux termes consécutifs ont le même signe, ces termes forment *une permanence;* on dit au contraire qu'ils offrent *une variation*, quand leurs coefficients ont des signes contraires.

Nous adopterons les notations suivantes :

$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m = 0$ (équation donnée),

P, nombre des racines positives,
N, id. négatives,
2I, id. imaginaires,
V, nombre de variations du polynôme $f(x)$,
V′, id. id. $f(-x)$.

371. Théorème. *Lorsque $f(x)$ est un polynôme complet, on a $V + V' = m$; si, au contraire $f(x)$ présente des lacunes, $V + V'$ est égal, ou inférieur à m.*

Considérons d'abord le cas où $f(x)$ est complet; ce polynôme renferme alors $(m + 1)$ termes. Les deux premiers

termes offrent, soit une permanence, soit une variation ; et chacun des termes suivants, lesquels sont en nombre égal à $(m-1)$, fournit une permanence, ou une variation : ce qui prouve que *dans un polynôme complet le nombre des variations et des permanences est égal au degré m du polynôme.* D'ailleurs chaque permanence de $f(x)$ devient une variation de $f(-x)$; on a donc $V+V'=m$.

Prenons maintenant un polynôme offrant des lacunes et considérons l'une d'entre elles, en particulier ; par exemple celle des deux termes

$$A_p x^{m-p}, \quad A_{p+h+1} x^{m-p-h-1},$$

termes qui sont consécutifs, dans le polynôme ordonné.

Nous allons étudier l'effet produit par cette lacune sur l'abaissement du nombre $V+V'$.

Supposons, en premier lieu, que la lacune soit paire ; posons $h=2k$, et

$$U=x^{m-p-h-1}\left(A_p x^{h+1}+A_{p+h+1}\right).$$

Si la lacune n'existait pas, la parenthèse de l'égalité précédente serait formée par un polynôme de degré $(h+1)$, polynôme qui fournirait au nombre $V+V'$, $h+1$ ou $2k+1$ unités. D'ailleurs $(h+1)$ étant impair, les deux termes consécutifs que nous considérons ont des exposants de parités différentes ; ces termes offrent donc une variation dans $f(x)$, ou dans $f(-x)$, mais une seule : par suite, ils fournissent une seule unité au nombre $V+V'$; la présence de la lacune diminue donc $V+V'$ de $2k$ unités.

Il nous reste à examiner le cas d'une lacune impaire. Soit $h=2k+1$; k pouvant être nul. En raisonnant comme nous venons de le faire, on voit :

1° Que si A_p et A_{p+h+1} ont le même signe, $V+V'$ est diminué de $2k+2$ unités ;

2° Que si A_p et A_{p+h+1} ont des signes contraires, $V+V$ est diminué de $2k$ unités.

Ainsi dans tous les cas on a $V + V' \leqslant m$; et l'on peut dire que la présence d'une lacune abaisse toujours le nombre $V + V'$; excepté lorsque cette lacune est formée par deux termes, ayant : 1° des signes contraires ; 2° des exposants différant de deux unités seulement.

372. Théorème. *Le nombre des racines positives d'une équation, et le nombre des variations de son premier membre sont, ou égaux, ou de même parité.*

Supposons d'abord que l'on ait $A_m > 0$, les substitutions 0 et $+\infty$ donnent l'un et l'autre le signe $+$; par suite le nombre P des racines positives est zéro, ou un nombre pair, $2k$. D'autre part, dans un polynôme dont les termes extrêmes ont le même signe, le nombre V des variations est zéro, ou un nombre pair, $2k'$. Ainsi $V - P$ est zéro, ou égal à $2(k'-k)$.

Dans le cas où l'on suppose $A_m < 0$, on voit, de même, que V et P sont deux nombres impairs ; leur différence est donc encore égale à zéro, ou à un nombre pair.

373. Théorème. *Entre les coefficients* $A_0\ A_1 \dots A_m$ *de l'équation* $A_0x^m + \dots + A_m = 0$, *et les racines* $x_1\ x_2 \dots x_m$, *réelles ou imaginaires de cette équation, on a les relations :*

$$-\frac{A_1}{A_0} = \Sigma x_1$$

$$+\frac{A_2}{A_0} = \Sigma x_1x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^p\frac{A_p}{A_0} = \Sigma x_1x_2 \dots x_p$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^m\frac{A_m}{A_0} = x_1x_2 \dots x_m.$$

Dans ces égalités $\Sigma x_1x_2 \dots x_p$ désigne la somme des produits différents que l'on peut obtenir avec les m nombres $x_1x_2 \dots x_p$, combinés p à p.

Ces relations sont la conséquence évidente de l'identité, établie précédemment (§ 357)

$$(1) \quad f(x) = A_0(x \quad x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m).$$

En effet, si l'on effectue le calcul indiqué dans le second membre, on voit que tous les termes en x^{m-p} s'obtiennent en prenant la lettre x dans $(m - p)$ binômes, et les lettres munies d'indices, dans les p autres binômes. Par exemple, un des termes dont nous parlons ici, est

$$A_0(-x_1)(-x_2) \ldots (-x_p)x^{m-p}$$

ou

$$A_0(-1)^p x_1 x_2 \ldots x_p x^{m-p}.$$

Le coefficient de x^{m-p} dans le second membre est donc

$$(-1)^p A_0 \Sigma x_1 x_2 \ldots x_p x^{m-p}$$

et l'identité (1) donne

$$A_p = (-1)^p A_0 \Sigma x_1 x_2 \ldots x_p.$$

374. Remarque. Si l'on cherche à combiner les relations précédentes de façon à obtenir une égalité ne renfermant plus que x_1, on trouve précisément

$$f(x_1) = 0.$$

On peut remarquer à priori, qu'il n'en peut être autrement, car tout calcul semblable à celui que nous venons d'imaginer peut se répéter, identiquement, avec les lettres x_2, x_3, ... x_m. On ne peut donc pas trouver une combinaison $F(x_1) = 0$ sans que l'on ait aussi nécessairement $F(x_2) = 0$, ... $F(x_m) = 0$. Ainsi $x_1, x_2, \ldots x_m$, sont racines de l'équation $F(x) = 0$: celle-ci est donc identique à $f(x) = 0$; à moins qu'elle ne soit d'un degré supérieur.

On peut d'ailleurs vérifier qu'en éliminant $x_2, x_3, \ldots x_m$; on retombe bien sur l'égalité $(f x_1) = 0$.

En effet, les relations (H) étant écrites sous la forme :

$$-\frac{A_1}{A_0} = x_1 + (x_2 + \ldots + x_m)$$

$$+\frac{A_2}{A_0} = x_1 (x_2 + \ldots + x_m) + (x_2 x_3 \ldots + x_{m-1} x_m)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^m \frac{A_m}{A_0} = x_1 (x_2 x_3 \ldots x_m) ;$$

Multiplions-les respectivement par $-x_1^{m-1}$, $+x_1^{m-2}$, ... $(-1)^{m-1} x_1$ et $(-1)^m$; les égalités ainsi obtenues étant ajoutées, on trouve bien, après avoir tenu compte des simplifications que comporte le résultat, $f(x_1) = 0$.

LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

375. Définitions. Les relations que nous avons trouvées entre les racines et les coefficients d'une équation conduisent assez naturellement à l'étude des formes symétriques.

Une forme algébrique des lettres a et b est dite symétrique, par rapport à ces lettres, lorsqu'elle reste identique à elle-même par la permutation de a en b, et de b en a.

Ainsi

$$a^2 + b^2 - ab,$$
$$a^3 + b^3 - a^2 b - b^2 a,$$

sont des formes symétriques de a et de b.

Généralement, une forme des lettres $a, b, \ldots l$, est symétrique par rapport à ces lettres lorsqu'elle ne change pas quand on permute, l'une dans l'autre, et successivement, ces lettres combinées deux à deux.

La forme

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

est symétrique par rapport aux lettres a, b, c. Au contraire

$$a^2b+b^2c+c^2a,$$

n'est pas une forme symétrique.

Nous nommerons *forme symétrique simple* l'expression

$$a^p+b^p+\ldots+l^p$$

dans laquelle p désigne un nombre entier et positif ; et nous poserons

$$S_p=a^p+b^p+\ldots+l^p.$$

Nous appellerons aussi forme symétrique simple l'expression

$$\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}+\ldots+\frac{1}{l^p};$$

nous la désignerons par S_{-p}.

Les formes symétriques qui ne sont pas simples sont dites *formes symétriques composées*. Par exemple,

$$a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b$$

est une forme symétrique, composée.

En supposant que a, b, ... l soient les m racines, réelles ou imaginaires, de l'équation

$$U=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m=0$$

nous allons chercher la valeur des formes symétriques des racines a, b, ... l, en fonction des coefficients A_0, A_1, ... A_m.

376. Formules de Newton. Soit $U=0$ l'équation proposée. L'identité

$$U\equiv(x-a)(x-b)\ldots(x-l)A_0;$$

donne

$$U'\equiv\Sigma(x-b)\ldots(x-l)A_0.$$

On en déduit,

$$\frac{U'}{U} = \Sigma \frac{1}{x-a},$$

ou,

$$(1) \qquad U' = \Sigma \frac{U}{x-a}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{U}{x-a} = A_0 x^{m-1} + (A_1 + a) x^{m-2} + (a^2 + A_1 a + A_2) x^{m-2} + \dots$$
$$+ a^{m-1} + A_1 a^{m-2} + \dots + A_{m-1}$$

Il résulte de cette identité, appliquée successivement aux fonctions $\frac{U}{x-b}, \dots \frac{U}{x-l}$

$$(2) \quad \Sigma \frac{U}{x-a} = A_0 m x^{m-1} + (S_1 + mA_1) x^{m-2} + (S_2 + A_1 S_1 + mA_2) x^{m-3}$$
$$+ \dots + (S_{m-1} + A_1 S_{m-2} + \dots + mA_{m-1}).$$

D'autre part on sait que l'on a

$$(3) \quad U' = A_0 m x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-1} + (m-2) A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1}.$$

Des identités (1), (2) et (3) ; on déduit les formules suivantes

$$(N) \left\{ \begin{array}{r} A_0 S_1 + A_1 = 0 \\ A_0 S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 = 0 \\ A_0 S_3 + A_1 S_2 + A_2 S_1 + 3A_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0 S_{m-1} + A_1 S_{m-2} + \dots + (m-1) A_{m-1} = 0. \end{array} \right.$$

Ces formules permettent de calculer successivement les inconnues $S_1, S_2, S_3, \dots S_{m-1}$. On trouve ainsi

$$A_0 S_1 = -A_1$$
$$A_0^2 S_2 = A_1^2 - 2A_2 A_0$$
$$A_0^3 S_3 = -A_1^3 + 3A_0 A_1 A_2 - 3A_3 A_0^2$$
$$A_0^4 S_4 = A_1^4 - 4A_1^2 A_2 A_0 + 4A_1 A_3 A_0^2 + 2A_0^2 A_2^2 - 4A_4 A_0.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Il nous reste à montrer comment on calcule les fonctions $S_m S_{m+1}$, etc..., et aussi les fonctions S_{-1}, S_{-2}, etc...

On a, par la définition même des nombres $a, b, \ldots l$,

$$(1) \quad \begin{cases} A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots + A_m = 0 \\ A_0 b^m + A_1 b^{m-1} + \ldots + A_m = 0 \\ \ldots \\ A_0 l^m + A_1 l^{m-1} + \ldots + A_m = 0. \end{cases}$$

De ces égalités, on tire,

$$(N') \quad A_0 S_m + A_1 S_{m-1} + \cdots + A_{m-1} S_1 + m A_m = 0,$$

relation qui permet de trouver S_m quand on a, préalablement, calculé $S_1, S_2 \ldots S_{m-1}$, au moyen des formules (N).

Multiplions maintenant les égalités (1) respectivement par $a^k, b^k, \ldots l^k$, et ajoutons ces résultats ; nous obtenons l'égalité

$$(N'') \quad A_0 S_{m+k} + A_1 S_{m+k-1} + \ldots + A_m S_k = 0.$$

Si dans cette relation qui a lieu quel que soit le nombre entier, positif, k, on donne à k successivement les valeurs 1, 2, 3, etc., on forme un tableau qui, avec les égalités (N) et (N'), permet de calculer, par voie récurrente, toutes les inconnues S_z, quelle que soit la valeur du nombre entier et positif, z.

Les fonctions symétriques simples S_{-z} se calculent aussi, par voie récurrente, au moyen de formules que nous allons donner et qui sont, d'ailleurs, la conséquence immédiate des relations (N), (N') et (N''), que nous venons d'établir.

Soit $f(x) = 0$ l'équation proposée ; considérons l'équation

$$x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

ou, $\varphi(x) = 0$, en posant

$$\varphi(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0.$$

$\varphi(x)$ se nomme *l'équation aux inverses*, parce qu'elle admet pour racines les m nombres $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots \frac{1}{l}$. Etablissons d'abord ce point. De l'identité

$$\varphi(x) = x^m f\left(\frac{1}{x}\right),$$

on déduit

$$\varphi\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^m} f(a);$$

et, comme l'on suppose $f(a) = 0$, on a donc bien

$$\varphi\left(\frac{1}{a}\right) = 0.$$

Cette remarque étant faite, les formules (N), (N′) (N″) appliquées à l'équation $\varphi(x) = 0$ donnent les relations

$$(N''') \quad \begin{cases} A_m S_{-1} + A_{m-1} = 0 \\ A_m S_{-2} + A_{m-1} S_{-1} + 2A_{m-2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m S_{-m} + A_{m-1} S_{-m+1} + \ldots + m A_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m S_{-m-k} + A_{m-1} S_{-m-k+1} + \ldots + A_0 S_{-k} = 0. \end{cases}$$

Les formules (N), (N′), (N″), (N‴), dites formules de Newton, résolvent complètement le problème que nous nous étions posé, et qui avait pour but le calcul des fonctions symétriques simples.

377. Fonctions symétriques composées. 1° Imaginons une forme symétrique des lettres $a, b, \ldots l$; ces lettres étant affectées des exposants p et q et posons

$$S_{p,q} = \Sigma a^p b^q \quad (p - q \neq 0).$$

Pour calculer $S_{p,q}$, qu'on nomme fonction symétrique double, considérons les deux identités

$$S_p = a^p + b^p + \ldots + l^p$$
$$S_q = a^q + b^q + \ldots + l^q.$$

Si nous les multiplions, membre à membre, les termes des seconds membres seront multipliés deux à deux, et ces multiplications seront de deux espèces, suivant qu'elles ont lieu pour des termes A, B, disposés comme l'indiquent les tableaux (1) et (2)

$$(1) \quad \left|\begin{array}{c} A \\ B \end{array}\right|, \qquad (2) \quad \left|\begin{array}{cc} A & \\ & B \end{array}\right|.$$

Les multiplications du premier genre donnent la fonction symétrique simple S_{p+q} ; les autres $S_{p,q}$. On a donc

$$S_p S_q = S_{p+q} + S_{p,q} ;$$

formule qui permet de calculer la fonction symétrique composée $S_{p,q}$ puisque nous connaissons les fonctions symétriques simples S_p, S_q et S_{p+q}.

2° Considérons, maintenant, une forme symétrique dans laquelle les lettres sont affectées d'exposants p, q, r, et posons

$$S_{p,q,r} = \Sigma a^p b^q c^r.$$

On a

$$S_p = a^p + b^p + \ldots + l^p$$
$$S_q = a^q + b^q + \ldots + l^q$$
$$S_r = a^r + b^r + \ldots + l^r.$$

Si nous multiplions, membres à membres, ces trois identités, les termes des seconds membres seront multipliés trois à trois et ces multiplications peuvent être distinguées en trois espèces, suivant que les termes A, B, C, que l'on considère, sont disposés comme l'indiquent les tableaux (1), (2) et (3) ;

$$(1) \quad \left|\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\right| \qquad (2) \quad \left|\begin{array}{cc} A & \\ B & \\ & C \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{cc} A & \\ & B \\ C & \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{cc} A & \\ & B \\ & C \end{array}\right|$$

$$(3) \quad \left|\begin{array}{ccc} & A & \\ & & B \\ C & & \end{array}\right|$$

Les multiplications qui correspondent à la figure (1) donnent la fonction symétrique simple S_{p+q+r} ; celles qui correspondent à la figure (2) fournissent les fonctions symétriques doubles

$$S_{p+q,\ r},\quad S_{p+r,\ q},\quad S_{p,\ q+r}\ ;$$

enfin les multiplications de la troisième espèce donnent la fonction symétrique cherchée $S_{p,\ q,\ r}$. On a donc

$$S_pS_qS_r = S_{p+q+r} + S_{p+q,\ r} + S_{p+r,\ q} + S_{q+r,\ p} + S_{p,\ q,\ r}.$$

Cette formule permet de calculer $S_{p,\ q,\ r}$; et, en s'appuyant sur l'identité

$$S_{x,\ y} = S_xS_y - S_{x+y},$$

on trouve finalement

$$S_{p,\ q,\ r} = S_pS_qS_r - S_pS_{q+r} - S_qS_{p+r} - S_rS_{p+q} + 2S_{p+q+r}.$$

La démonstration que nous venons de donner pour établir les formules qui permettent de calculer les fonctions symétriques doubles et triples est susceptible d'une généralisation évidente et sur laquelle nous n'insisterons pas autrement. Il résulte, de ce calcul, ce fait important : *Toutes les formes symétriques composées peuvent s'exprimer au moyen d'une fonction entière des formes simples.*

378. Théorème. *Toute fonction rationnelle et symétrique des racines d'une équation s'exprime rationnellement en fonction des coefficients.*

Les formules de Newton prouvent que les fonctions symétriques simples des racines s'expriment rationnellement en fonction des coefficients. D'autre part nous venons de remarquer que les fonctions symétriques composées s'expriment rationnellement au moyen des fonctions symétriques. De là résulte la propriété énoncée.

EXERCICES

1. *L'équation*

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_m = 0$$

dans laquelle on suppose

$$2\Sigma m A_2 = (m-1) A_1^2$$

a nécessairement des racines imaginaires, si elle n'est pas une puissance $m^{ième}$ exacte.

On remarquera qu'en désignant les racines par $x_1, x_2 \dots x_m$, on a par hypothèse

$$2m\Sigma x_1 x_2 = (m-1)(x_1 + x_2 \dots + x_m)^2$$

ou

$$(x_1 + x_2 \dots + x_m)^2 = m(x_1^2 +) x_2^2 \dots + x_m^2)$$

ou encore

$$\left.\begin{array}{l} (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \dots + (x_1 - x_m)^2 \\ \quad + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_2 - x_m)^2 \\ \quad + \dots\dots\dots \\ \qquad\qquad + (x_{m-1} - x_m)^2 \end{array}\right\} = 0.$$

2. *Exprimer que dans l'équation générale du troisième degré, une racine est la somme des deux autres, et résoudre l'équation dans ce cas particulier.*

L'équation étant représentée par

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

on trouve

$$p^3 - 4pq + 8r = 0.$$

Les racines sont

$$x_1 = -\frac{p}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(-p + \sqrt{5p^2 - 16q})$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(-p - \sqrt{5p^2 - 16q}).$$

3. *Exprimer qu'une racine de l'équation du troisième degré est moyenne arithmétique, ou moyenne géométrique, entre les deux autres.*

4. *Exprimer que l'équation*

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

admet deux racines égales et de signes contraires.

On voit facilement que $-\frac{B}{A}$ est la troisième racine de l'équation : la condition demandée est

$$AD = BC.$$

5. *Résoudre le système*

$$\begin{aligned} a^3x + a^2y + az &= 1 \\ b^3x + b^2y + bz &= 1 \\ c^3x + c^2y + cz &= 1. \end{aligned}$$

On considère l'équation

$$U^3x + U^2y + Uz - 1 = 0$$

et l'on a

$$x = \frac{1}{abc}, \quad y = -\frac{a+b+c}{abc}, \quad z = \frac{ab+ac+bc}{abc}.$$

6. *Résoudre les équations*

$$\begin{aligned} \frac{x}{\lambda - a} + \frac{y}{\lambda - b} + \frac{z}{\lambda - c} &= 1 \\ \frac{x}{\mu - a} + \frac{y}{\mu - b} + \frac{z}{\mu - c} &= 1 \\ \frac{x}{\nu - a} + \frac{y}{\nu - b} + \frac{z}{\nu - c} &= 1. \end{aligned}$$

(Grunert's ; archiv. vol. XXIII.)

On considère λ, μ, ν comme les trois racines de l'équation en X

$$\frac{x}{X - a} + \frac{y}{X - b} + \frac{z}{X - c} = 1.$$

On pose ensuite $X - a = \xi$ et l'on a une équation du troisième degré en ξ qui donne, par les relations connues

$$x = \frac{(a-\lambda)(a-\mu)(a-\nu)}{(a-b)(a-c)}.$$

Les valeurs de y et de z se déduisent de cette formule.

7. *En désignant par a, b, c, les racines de l'équation*

$$x^3+px+q=0,$$

démontrer que l'on a

$$(a^2+b^2-ab)(b^2+c^2-bc)(c^2+a^2-ac)+8q^2+3p^3=0.$$

8. *Exprimer que les trois racines de l'équation*

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

sont les côtés d'un triangle rectangle et résoudre l'équation, dans ce cas particulier,

En désignant par a, b, c les racines et en supposant

$$a^2+b^2=c^2,$$

on déduit, de la relation

$$a+b=-p-c,$$

la suivante

$$\frac{pc^2+r}{c}=-\frac{p^2}{2}.$$

On trouve finalement

$$c=\frac{p^3+2r-2pq}{p2},$$

la condition cherchée est donc

$$p^4(p^2-2q)=2(2pq-2r-p^3)^2.$$

9. *Exprimer que deux des racines de l'équation*

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

ont un produit égal à $+1$, *ou à* -1.

On trouve

$$r^2-pr+q-1=0,$$

et, dans le second cas,

$$r^2+pr+q+1=0.$$

10. *En appliquant les relations entre les coefficients et les racines, trouver*

la condition que doivent vérifier les coefficients de l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

pour que celle-ci admette une racine double.

En désignant par x' la racine double, on trouve d'abord les deux relations

$$3x'^2 + 2px' + q = 0,$$
$$px'^2 + 2qx' + 3r = 0.$$

On en conclut la condition demandée

$$(9r - pq)^2 = 4(3q - p^2)(3pr - q^2),$$

ou

$$4p^3r - p^2q^2 - 18pqr + 4q^3 + 27r^2 = 0.$$

11. *On propose de déterminer une équation du troisième degré*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

connaissant la somme, la somme des carrés, et la somme des cubes, des racines de cette équation.

Ayant posé

$$S_1 = a + b + c$$
$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$S_3 = a^3 + b^3 + c^3,$$

on a, d'abord,

$$p = -S_1, \quad q = \frac{S_1^2 - S_2}{2}.$$

D'autre part, l'identité

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

donne

$$r = -\frac{S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3}{6}.$$

12. *Trouver une relation entre les nombres S_1, S_2, S_3 de l'exercice précédent, et la quantité*

$$S_4 = a^4 + b^4 + c^4.$$

on remarque que

$$S_4 + pS_3 + qS_2 + rS_1 = 0,$$

et les formules précédentes donnent

$$6S_4 + 6S_1^2S_2 = S_1^4 + 8S_1S_3 + 3S_2^2.$$

VINGT-NEUVIÈME LEÇON

L'ÉLIMINATION.

379. Définition. *Éliminer x entre deux équations entières et homogènes*

$$(1)\quad f(x,y)=0, \qquad (2)\quad \varphi(x,y)=0.$$

c'est trouver la condition nécessaire et suffisante, que doivent vérifier les coefficients des polynômes f et φ, pour que les équations (1) et (2) admettent, l'une et l'autre, la solution $x=x'$, $y=y'$; x' et y' n'étant pas nuls à la fois.

Les principes connus sur la divisibilité d'un polynôme entier et homogène par un facteur linéaire $\alpha x+\beta y$, prouvent que la condition énoncée ci-dessus est équivalente à celle-ci : *trouver la condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier les coefficients des polynômes f et φ, pour qu'ils admettent un diviseur commun de la forme $\alpha x+\beta y$.*

Cette condition nécessaire et suffisante se nomme le *résultant* ou *l'éliminant* des deux polynômes proposés.

380. Théorème. *Si les polynômes entiers et homogènes*

$$f_p(x,y), \quad \varphi_q(x,y),$$

le premier du degré p, l'autre du degré q, admettent un diviseur linéaire commun, on peut trouver deux autres polynômes entiers et homogènes U_{p-1}, V_{q-1}, respectivement de degrés $(p-1)$ et $(q-1)$ satisfaisant à l'identité

$$V_{q-1}f_p(x,y)=U_{p-1}\varphi_q(x,y).$$

Soit $\alpha x + \beta y$ le diviseur commun aux deux polynômes proposés; si nous désignons par U_{p-1} et V_{q-1} les quotients $\frac{f_p(x, y)}{\alpha x + \beta y}$ et $\frac{\varphi_q(x, y)}{\alpha x + \beta y}$, quotients qui sont respectivement d'un degré indiqué par les indices des lettres U et V, nous avons

$$f_p(x, y) \equiv (\alpha x + \beta y) U_{p-1},$$
$$\varphi_q(x, y) \equiv (\alpha x + \beta y) V_{q-1},$$

et, par combinaison,

$$V_{q-1} \cdot f_p(x, y) \equiv U_{p-1} \cdot \varphi_q(x, y).$$

381. Théorème. *Réciproquement, les notations précédentes étant maintenues, si on a*

$$(1) \quad V_{q-1} \cdot f_p(x, y) \equiv U_{p-1} \cdot \varphi_q(x, y);$$

V_{q-1} *et* U_{p-1} *n'étant pas identiquement nuls, les deux polynômes* f_p *et* φ_q *admettent un diviseur commun de la forme* $\alpha x + \beta y$.

En effet le premier membre de l'identité (1) est décomposable en $(p + q - 1)$ facteurs de la forme $\alpha x + \beta y$ (§ 357). Parmi ces facteurs, $(q - 1)$ constituent par leur produit le polynôme V_{q-1} et nous pouvons imaginer que les deux membres de (1) ont été divisés successivement par ces $(q - 1)$ facteurs. La simplification une fois effectuée, comme φ_q est du degré q, il restera dans le second membre, au moins un facteur de φ_q, $(mx + ny)$. Ce facteur appartient donc aussi à f_p, et cette remarque établit le théorème en question.

382. Remarque. On peut généraliser les deux propriétés précédentes et montrer, par un raisonnement tout semblable à celui que nous venons de développer, que la condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes f_p et φ_q admettent k diviseurs de la forme $\alpha x + \beta y$, est que l'identité

$$V_{q-k} f_p(x, y) \equiv U_{p-k} \varphi_q(x, y)$$

soit vérifiée; V_{q-k}, U_{p-k} désignant des polynômes entiers, homogènes, respectivement de degrés $q-k$ et $p-k$.

383. Méthode d'Euler. La méthode d'Euler, que nous allons d'abord exposer, peut être considérée comme la conséquence immédiate des théorèmes précédents.

Posons

$$f(x, y) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} y + \dots + A_p y^p,$$

et

$$\varphi(x, y) = B_0 x^q + B_1 x^{q-1} y + \dots + B_q y^q.$$

Nous avons démontré l'existence de deux polynômes U_{p-1}, V_{q-1}

$$-U_{p-1} = \beta_0 x^{p-1} + \beta_1 x^{p-2} y + \dots + \beta_{p-1} y^{p-1}$$
$$V_{q-1} = \alpha_0 x^{q-1} + \alpha_1 x^{q-2} y + \dots + \alpha_{q-1} y^{q-1},$$

lesquels vérifient l'identité

$$(A_0 x^p + A_1 x^{p-1} y + \dots + A_p y^p)(\alpha_0 x^{q-1} + \alpha_1 x^{q-2} y + \dots + \alpha_{q-1} y^{q-1})$$
$$+ (B_0 x^q + B_1 x^{q-1} y + \dots + B_q y^q)(\beta_0 x^{p-1} + \beta_1 x^{p-2} y + \dots + \beta_{p-1} y^{p-1}) = 0$$

Écrivons que tous les coefficients de ce polynôme sont nuls : nous obtenons $(p+q)$ équations linéaires et homogènes, que l'on peut écrire, en supposant p supérieur, ou égal, à q.

$$(\mathrm{H}) \left\{ \begin{array}{llll}
A_0\alpha_0 & + B_0\beta_0 & & = 0 \\
A_1\alpha_0 + A_0\alpha_1 & + B_1\beta_0 + B_0\beta_1 & & = 0 \\
A_2\alpha_0 + A_1\alpha_1 + A_0\alpha_2 & + B_2\beta_0 + B_1\beta_1 + B_0\beta_2 & & = 0 \\
\dots & & & \\
A_{q-1}\alpha_0 + \dots + A_0\alpha_{q-1} & + B_{q-1}\beta_0 + \dots + B_0\beta_{q-1} & & = 0 \\
A_q\alpha_0 + \dots + A_1\alpha_{q-1} & + B_q\beta_0 + \dots & + B_0\beta_q & = 0 \\
\dots & & & \\
A_p\alpha_0 + \dots + A_{p-q+1}\alpha_{q-1} & & + B_q\beta_{p-q} + \dots + B_1\beta_{p-1} & = 0 \\
\dots & & & \\
A_p\alpha_{q-1} & & + B_q\beta_{p-1} & = 0
\end{array} \right.$$

De ces équations linéaires et homogènes qui admettent une solution non nulle; résulte un déterminant que nous désignons par Δ_e, et que nous nommerons *déterminant d'Euler*. Ce déterminant donne lieu aux remarques suivantes :

1° Il est d'ordre $(p+q)$, et ses éléments sont les lettres A et B, coefficients des équations proposées.

2° Les q premières colonnes renferment les seules lettres A, coefficients de l'équation qui est du degré p; et les p colonnes suivantes les seules lettres B, coefficients de l'équation qui est du degré q.

3° Le terme diagonal est $(A_0)^q\,(B_q)^p$.

Démontrons maintenant que : *réciproquement, si l'on a* $\Delta_e = 0$, *les équations* $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$; *ont au moins une solution commune.*

En effet si l'on a $\Delta_e = 0$ on sait (§ 109) que les équations (H) admettent une solution différente de zéro; il existe donc des facteurs U_{p-1}, V_{q-1} tels que l'on ait

$$V_{q-1}\,f(x, y) = U_{p-1}\varphi(x, y),$$

et nous avons prouvé (§ 381) que cette identité établit le fait que les équations $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ ont, au moins, une racine commune.

384. Théorème. *Le résultant est homogène et du degré* p *par rapport aux coefficients* B, *de l'équation* $\varphi(x, y) = 0$; *homogène et du degré* q, *par rapport aux coefficients* A, *de l'équation* $f(x, y) = 0$.

Ce théorème résulte des remarques qui ont été faites au paragraphe précédent, relativement à la forme de Δ_e. Imaginons, en effet, un terme quelconque U de Δ_e; toutes les colonnes doivent être représentées dans les facteurs qui constituent U. Il y a donc, dans ce terme, q lettres A et p lettres B.

385. Méthode de M. Sylvester. Les notations précé-

dentes étant conservées, on a

$$
\begin{array}{ll}
x^{q-1}f(x,y) = & A_0x^{p+q-1}+A_1x^{p+q-2}y+ \ldots\ldots + A_px^{q-1}y^p \\
yx^{q-2}f(x,y) = & \quad A_0x^{p+q-2}y+ \ldots\ldots\ldots + A_px^{q-2}y^{p+} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
yx^{q-2}f(x,y) = & \qquad A_0x^{p+1}y^{q-2}+ \ldots\ldots + A_pxy^{p+q-2} \\
y^{q-1}f(x,y) = & \qquad\quad A_0x^py^{q-1}+ \ldots\ldots\ldots + A_py^{p+q-1} \\
x^{p-1}\varphi(x,y) = & B_0x^{p+p-1}+B_1x^{p+q-2}+\ldots+B_qx^{p-1}y^q \\
yx^{p-2}\varphi(x,y) = & \quad B_0x^{p+q-2}y \ \ldots + B_qx^{p-2}y^{q+1} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{p-2}x\varphi(x,y) = & \qquad\qquad B_0x^{q+1}y^{p-2}+ \ldots +B_qxy^{p+q-2} \\
y^{p-1}\varphi(x,y) = & \qquad\qquad\quad B_0x^qy^{p-1}+ \ldots +B_qy^{p+1}
\end{array}
$$

Posons maintenant

$$y^{p+q-h-1}x^h = X_h,$$

les équations précédentes, après ce changement de notation, deviennent des équations (λ), linéaires et homogènes par rapport aux lettres

$$X_0, X_1, \ldots X_{p+q-1}.$$

Si nous supposons que les polynômes $f(x.y)$ et $\varphi(x.y)$, soient exactement divisibles, l'un et l'autre, par le facteur $(ax+by)$, le système (λ) est vérifié par des valeurs des inconnues X, qui ne sont pas toutes nulles. Il résulte de cette remarque, que l'on a

$$
\Delta_S = \begin{vmatrix}
A_0 & A_1 & \ldots & A_p & \ldots & \ldots \\
\ldots & A_0 & A_1 & \ldots & A_p & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & A_0 & A_1 & \ldots & A_p \\
B_0 & B_1 & \ldots & B_q & \ldots & \ldots \\
\ldots & B_0 & B_1 & \ldots & B_q & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & B_0 & B_1 \ldots & B_q
\end{vmatrix} = 0.
$$

Tel est le déterminant donné par la méthode de M. Sylvester ; on remarquera qu'il est, au signe près, identique à celui auquel a conduit la méthode d'Euler. L'un et l'autre représentent le résultant.

386. Méthode de Bezout. Dans l'exposition de cette méthode nous distinguerons deux cas suivant que les équations considérées ont, ou n'ont pas, le même degré.

1er *Cas*. Soient $U = 0$ et $V = 0$, deux équations du degré m. On a, par un groupement convenable des termes,

$$U = x^h P_h + Q_h,$$
$$V = x^h R_h + S_h,$$

h désignant un nombre entier, pouvant prendre successivement les valeurs $1, 2, \ldots (m - 1)$. On en déduit

$$U = xP_1 + Q_1 \qquad V = xR_1 + S_1$$
$$U = x^2P_2 + Q_2 \qquad V = x^2R_2 + S_2$$

et

$$\ldots \qquad \ldots$$
$$U = x^mP_m + Q_m, \qquad V = x^mR_m + S_m.$$

Soit x', y' la solution commune aux deux équations $U = 0$, $V = 0$; x' et y' n'étant pas nuls simultanément. En combinant deux à deux les identités précédentes on a

$$(1) \quad \begin{aligned} P_1S_1 - R_1Q_1 &= 0 \\ P_2S_2 - R_2S_2 &= 0 \\ \ldots \\ P_mS_m - R_mQ_m &= 0, \end{aligned}$$

équations qui admettent la solution $x = x'$, $y = y'$.

On peut d'ailleurs remarquer que les fonctions

$$P_1, P_2 \ldots P_m$$
$$R_1, R_2, \ldots R_m ;$$

sont, par rapport à x, respectivement de degrés

$$m-1,\ m-2, \dots 0;$$

D'autre part,

$$\begin{matrix} Q_1, Q_2, \dots Q_m \\ S_1, S_2, \dots S_m \end{matrix}$$

sont des polynômes en x, respectivement de degrés

$$0.\ 1, \dots m-1.$$

Ainsi les équations (1) sont, tout au plus, du degré $(m-1)$, en x. Ordonnons-les, par rapport à x et posons, comme nous l'avons fait tout à l'heure, dans l'exposition de la méthode de M. Sylvester,

$$X_{m-1} = x^{m-1},\ X_{m-2} = x^{m-2}y, \dots X_0 = y^{m-1},$$

nous trouvons ainsi m équations linéaires et homogènes, équations qui admettent une solution non nulle et nous obtenons, finalement, sous la forme d'un déterminant d'ordre m, égalé à zéro, une relation entre les coefficients des deux équations proposées. Nous démontrerons tout à l'heure que cette condition représente le résultant..

2me *Cas.* Supposons maintenant que les degrés m et p, des équations $U = 0$ $V = 0$, soient différents; et soit $m = p + q$.

La méthode que nous venons d'indiquer fournit seulement p équations :

$$(H) \quad \begin{matrix} A_1^1 X_{m-1} + A_1^2 X_{m-2} + \dots + A_1^m X_0 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_p^1 X_{m-1} + A_p^2 X_{m-2} + \dots + A_p^m X_0 = 0. \end{matrix}$$

On peut compléter le tableau de ces équations de la manière suivante, soit

$$V = \beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} y + \dots + \beta_p y^p;$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
x^{q-1}V &= \beta_0 x^{p+q-1} + \beta_1 x^{p+q-2}y + \ldots + \beta_p x^{q-1}y^p \\
yx^{q-2}V &= \qquad \beta_0 x^{p+q-2}y + \ldots + \beta_p x^{q-2}y^{p+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{q-1}V &= \qquad\qquad \beta_0 x^p y^{q-1} + \ldots + \beta_p y^{p+q-1};
\end{aligned}$$

on a donc

$$(\mathrm{H}')\quad \begin{aligned}
\beta_0 X_{m-1} + \beta_1 X_{m-2} + \ldots + \beta_p X_{m-p+1} &= 0, \\
\beta_0 X_{m-2} + \ldots + \beta_p X_{m-p} &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta_0 X_p + \ldots + \beta_p X_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Les équations (H) et (H′) étant vérifiées par des valeurs des inconnues X, qui ne sont pas toutes nulles, on a

$$\Delta_B = \begin{vmatrix}
A_1^1 & A_1^2 & \ldots & \ldots & A_1^m \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_p^1 & A_p^2 & \ldots & \ldots & A_p^m \\
\beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_p & \\
 & \beta_0 & \ldots & \beta_p & \\
 & & \ldots & \ldots & \\
 & & \beta_0 & \ldots & \beta_p
\end{vmatrix} = 0$$

387. Théorème. *Le déterminant auquel conduit la méthode de Bezout est égal au résultant.*

La condition $\Delta_B = 0$ que nous venons de trouver est une condition nécessairement vérifiée quand les équations que nous avons considérées admettent une solution commune ; il reste à reconnaître que $\Delta_B = 0$ est aussi une condition suffisante.

Nous avons montré (§ 384) que le résultant des équations $U = 0$, $V = 0$ devait être du degré m par rapport aux coefficients de V et du degré p par rapport à ceux de U. Les élé-

ments A et Δ_B sont d'ailleurs des fonctions du **premier degré** relativement aux coefficients de U et de V.

Observons aussi que toutes les lignes et toutes les colonnes doivent être représentées dans un terme quelconque de Δ_B. Ainsi Δ_B est une fonction des coefficients, et cette fonction est telle que chacun de ses termes est du degré m, par rapport aux coefficients de V ; et du degré p, par rapport à ceux de U. Le déterminant Δ_B n'est donc pas d'un degré supérieur au résultant ; et comme il est au moins égal au résultant, puisque $\Delta_B = 0$ est une condition nécessaire, on voit, finalement, que Δ_B représente bien le résultant lui-même.

388. Perfectionnement de Cauchy. Le perfectionnement que Cauchy a apporté à la méthode précédente est d'une importance secondaire, et porte seulement sur une légère modification relative à la manière de calculer les équations qui nous ont servi à établir le déterminant Δ_B.

Imaginons d'abord deux équations de même degré, et faisons passer successivement dans le second membre $1, 2, \ldots m$ termes : si nous divisons, membre à membre, les équations ainsi trouvées, nous obtenons les m équations de Bezout et, par suite le déterminant Δ_B.

Dans le cas où les deux équations ne sont pas de même degré, le procédé de Cauchy donne encore p équations de Bezout auxquelles on adjoindra les équations H′, considérées tout à l'heure.

389. Élimination par les fonctions symétriques. Théorème. *Considérons les deux équations*

$$f(x) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p = 0,$$
$$\varphi(x) = B_0 x^q + B_1 x^{q-1} + \ldots + B_q = 0,$$

et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ *; les racines de la première ;* $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_q$ *celles de la seconde ; les deux expressions* S, *et* T,

$$S = f(\mu_1) f(\mu_2) \ldots f(\mu_q),$$
$$T = \varphi(\lambda_1) \varphi(\lambda_2) \ldots \varphi(\lambda_p),$$

sont identiques, au signe près, et représentent le résultant.

On a, en effet,

$$f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_p),$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} S = & (\mu_1 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2) \dots (\mu_1 - \lambda_p) \\ & (\mu_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \lambda_2) \dots (\mu_2 - \lambda_p) \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & (\mu_q - \lambda_1)(\mu_q - \lambda_2) \dots (\mu_q - \lambda_p). \end{aligned}$$

On trouve de même

$$\begin{aligned} T = & (\lambda_1 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2) \dots (\lambda_1 - \mu_q) \\ & (\lambda_2 - \mu_1)(\lambda_2 - \mu_2) \dots (\lambda_2 - \mu_q) \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & (\lambda_p - \mu_1)(\lambda_p - \mu_2) \dots (\lambda_p - \mu_q). \end{aligned}$$

En comparant ces expressions de S et de T on voit qu'elles se composent, l'une et l'autre, de pq facteurs identiques, au signe près; ainsi S et T sont deux expressions identiques, au signe près.

Je dis maintenant que S ou T représentent le résultant. En effet si $f(x) = 0$, et $\varphi(x) = 0$, admettent une racine commune; si $\lambda_h = \mu_{h'}$, dans la colonne de rang h et dans la ligne de rang h' de S, on trouvera un facteur nul. On voit de même que dans la colonne de rang h' et dans la ligne de rang h on a, dans T, un facteur nul. Ainsi S et T s'annulent, quand les équations proposées ont une racine commune.

Réciproquement si l'on a $S = 0$ ou $T = 0$; un des pq facteurs qui constituent S ou T est nul; et les deux équations ont une racine commune. On a donc le résultant en écrivant, indifféremment, $S = 0$, ou $T = 0$.

390. Remarque. Le résultant pouvant s'écrire

$$S = (A_0\mu_1^p + \dots + A_p)(A_0\mu_2^p + \dots + A_p) \dots (A_0\mu_q^p + \dots + A_p)$$

on voit que S est une fonction symétrique des racines μ_1, μ_2,

$\dots \mu_q$; par conséquent on pourra exprimer S par une fonction rationnelle des coefficients B (§ 378). On remarquera d'ailleurs que S est une fonction rationnelle, et du degré q, par rapport aux coefficients A.

L'égalité

$$T = (B_0\lambda_1^q + \dots + B_q)(B_0\lambda_2^q + \dots + B_q)\dots(B_0\lambda_p^q + \dots + B_q)$$

prouve encore que T est une fonction rationnelle du degré p, par rapport aux coefficients B; S et T étant identiques, au signe près, et représentant le résultant, quand on les égale à zéro, on retrouve ainsi la proposition déjà établie (§ 384).

391. Théorème de Bezout. *Si l'on imagine deux équations quelconques entre x et y*

$$(1) \quad f(x,y) = 0, \quad \varphi(x,y) = 0,$$

l'une du degré p, l'autre du degré q, le résultant est, en général, du degré pq : dans tous les cas, il ne peut être d'un degré supérieur à pq.

Ordonnons les équations données, par rapport à x, elles s'écrivent alors :

$$(1) \quad A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p = 0,$$
$$(2) \quad B_0x^q + B_1x^{q-1} + \dots + B_q = 0.$$

Les coefficients A et B sont des polynômes entiers en y et le degré de chacun d'eux, par rapport à la lettre y, est égal, ou inférieur, à l'indice correspondant.

Soit $x'y'$ une solution commune aux équations (1) et (2), si nous remplaçons y par y', dans (1), et dans (2), on obtient deux équations en x, qui admettent une solution commune : $x = x'$. Le résultant de ces deux équations est donc nul; ainsi y' est une racine du résultant.

Réciproquement. Considérons le résultant $R(y) = 0$ et soit y' une racine quelconque de cette équation ; remplaçons y par y', dans (1), et dans (2) ; nous obtenons deux équations, dont

le résultant est nul, et qui, par suite, admettent au moins une solution commune, $x = x''$.

Il résulte de cette discussion que les solutions des deux équations proposées s'obtiennent par la résolution de l'équation $R(y) = 0$, équation qu'on peut nommer *la résolvante du système*. Nous nous proposons maintenant d'établir que cette résolvante est d'un degré égal, ou inférieur, au produit des degrés des deux équations données.

Posons $x = \frac{X}{\rho}$; les équations

$$(1') \quad A_0X^p + A_1\rho X^{p-1} + \ldots + A_p\rho^p = 0,$$

$$(2') \quad B_0X^q + B_1\rho X^{q-1} + \ldots + B_q\rho^p = 0,$$

ont respectivement pour racines

$$\rho\lambda_1, \rho\lambda_2, \ldots \rho\lambda_p;$$

et

$$\rho\mu_1, \rho\mu_2, \ldots \rho\mu_q.$$

Le résultant U, des équations (1) et (2), étant donné par la formule

$$U = \begin{matrix} (\mu_1 - \lambda_1) \ldots (\mu_1 - \lambda_p) \\ (\mu_2 - \lambda_1) \ldots (\mu_2 - \lambda_p) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (\mu_q - \lambda_1) \ldots (\mu_q - \lambda_p), \end{matrix}$$

on voit que chacun des facteurs sera multiplié par ρ et comme il y a pq facteurs, le résultant V, des équations (1′) et (2′), sera

$$(3) \quad V = U \cdot \rho^{pq}.$$

D'autre part, si nous comparons les équations (1) et (2) avec (1′) et (2′), on reconnait que la seule différence que l'on puisse noter est la suivante : chacun des coefficients A ou B est remplacé dans (1′) et dans (2′) par le même coefficient

multiplié par une puissance de ρ dont l'exposant est justement égal à l'indice de la lettre considérée. La formule (3) prouve que tous les termes de V renferment le facteur ρ^{pq} ; on conclut de là que chacun de ces termes est constitué par des facteurs A et B, les indices de ces lettres ayant une somme égale à pq. Chacun des termes de U est donc d'un degré en y égal ou inférieur à pq.

392. Théorème. *Le nombre des solutions communes à deux équations de degrés p et q est généralement égal à pq : dans aucun cas, il n'est supérieur à pq.*

Imaginons le résultant $R(y) = 0$: cette équation est généralement du degré pq; elle admet donc pq racines,

$$y_1 \quad y_2 \cdots y_{pq}.$$

A chacune d'elles, à y_1 par exemple, correspond une racine x_1, x_1 désignant la racine commune aux deux équations

$$\text{(M)} \quad \begin{aligned} f(x_1, y_1) &= 0, \\ \varphi(x_1, y_1) &= 0. \end{aligned}$$

On a ainsi, en général, pq solutions pour les deux équations proposées.

On peut pourtant objecter que le nombre des solutions serait supérieur à pq, si, à la racine y_1, correspondaient deux solutions x_1, x_1', communes aux équations M ; ces nombres x_1 x_1' étant d'ailleurs différents de ceux qui correspondent aux racines y_2, ... y_{pq}.

Cette circonstance particulière ne saurait se présenter, parce que en éliminant y entre les équations

$$f(x, y) = 0 \quad \varphi(x, y) = 0,$$

on obtiendrait un résultant $S(x) = 0$ qui admettrait plus de pq racines, et nous avons démontré que le résultant ne pouvait, dans aucun cas, être d'un degré supérieur à pq.

393. Méthode de Newton. Considérons deux équations du degré m, admettant une solution commune x',

$$U = A_0 x^m + \dots + A_m = 0,$$
$$V = B_0 x^m + \dots + B_m = 0.$$

Les deux équations

$$(1) \quad U_1 = B_0 U - A_0 V = 0,$$
$$(2) \quad V_1 = \frac{B_m U - A_m V}{x} = 0,$$

sont, l'une et l'autre, du degré $(m - 1)$ et sont vérifiées évidemment par $x = x'$. En opérant sur U_1 et V_1 comme nous l'avons fait sur U et V on obtiendra deux équations $U_2 = 0$ $V_2 = 0$, du degré $(m - 2)$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à deux équations du premier degré en x

$$Px + Q = 0,$$
$$Mx + N = 0.$$

Ces équations admettant la solution $x = x'$ on a donc

$$PN - MQ = 0.$$

Cette méthode indiquée par Newton donne lieu généralement à des calculs assez simples ; malheureusement elle ne donne pas toujours le résultant lui-même, mais, dans certains cas, le résultant multiplié par des facteurs étrangers.

Lorsque les équations ne sont pas du même degré, on forme d'abord la combinaison (2) ; puis on remplace (1) par la combinaison

$$B_0 U - A_0 V x^h = 0,$$

en supposant que le degré de U surpasse celui de V de h unités.

EXERCICES

1. *Éliminer les paramètres λ et μ entre les équations*

$$(1)\quad x(1+\lambda)=R\mu$$
$$(2)\quad y(1+\mu)=R\lambda$$
$$(3)\quad \lambda^2+\mu^2=1.$$

1° La méthode naturelle pour effectuer cette décomposition consiste à résoudre les deux premières équations par rapport à λ et à μ.

On a

$$\lambda(R^2-xy)=y(x+R)$$
$$\mu(R^2-xy)=x(R+y).$$

par suite

$$(A)\qquad (R^2-xy)^2=y^2(x+R)^2+x^2(R+y)^2.$$

2° On peut encore diriger le calcul d'élimination de la manière suivante. Les équations (1) et (2) donnent

$$\frac{x^2}{R^2}=\frac{\mu^2}{(1+\lambda)^2}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda},\ \text{d'où}\ \lambda=\frac{R^2-x^2}{R^2+x^2}$$
$$\frac{y^2}{R^2}=\frac{\lambda^2}{(1+\mu)^2}=\frac{1-\mu}{1+\mu},\ \text{d'où}\ \mu=\frac{R^2-y^2}{R^2+y^2}.$$

On a donc pour le résultat de l'élimination, ainsi dirigée

$$(B)\qquad 1=\left(\frac{R^2-x^2}{R^2+x^2}\right)^2+\left(\frac{R^2-y^2}{R^2+y^2}\right)^2.$$

3° Prenons enfin la marche suivante : on a, par une combinaison évidente

$$\frac{x+y}{R}=\frac{1+\lambda+\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)}$$

et

$$\frac{xy}{R^2}=\frac{\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)}$$

par suite.

$$(C)\ \frac{xy}{R^2}+\frac{x+y}{R}=1.$$

Cette dernière forme n'est pas décomposable; son discriminant étant différent de zéro. C'est donc le résultant demandé. Les formes A et B sont respectivement du quatrième et du huitième degré. On voit par cet exemple, combien l'élimination, en dehors du cas que nous avons traité dans cette leçon, et qui est seul complètement résolu, est une chose délicate et avec quelle facilité s'introduisent les facteurs étrangers, dans ces méthodes d'élimination par combinaison des relations données.

2. *Éliminer α entre les deux relations*

$$A\ \sin\alpha+B\ \cos\alpha=C,$$
$$A'\sin\alpha+B'\cos\alpha=C.$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}^2.$$

On rencontre quelquefois le cas particulier suivant

$$A\ \sin\alpha+B\ \cos\alpha=C,$$
$$A\ \cos\alpha-B\ \sin\alpha=C'.$$

le résultant est alors

$$A^2+B^2=C^2+C'^2.$$

3. *Rendre rationnelle l'équation*

$$1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=0.$$

On pose

$$\sqrt{x}=y\ ,\ \sqrt[3]{x}=z,$$

et on élimine y et z entre les équations

$$y+z+1=0,$$
$$y^2-x=0,$$
$$z^3-x=0;$$

on a, finalement,

$$x^3-10x^2+x-1=0.$$

4. *Démontrer que les trois équations*

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+c=0,$$
$$\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}+c=0,$$
$$(b+c)x+(a+c)y+(a+b)=0,$$

sont compatibles.

TRENTIÈME LEÇON

LES RACINES ÉGALES.

Nous nous proposons de ramener la résolution d'une équation, qui admet des racines multiples, à celles d'équations de degrés moindres, et ne renfermant que des racines simples. Ce problème, qui constitue un premier exemple de l'abaissement des équations, se résout en prenant pour base la théorie du plus grand commun diviseur. Nous exposerons d'abord cette théorie.

THÉORIE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

394. Définition du plus grand commun diviseur algébrique. Lorsque deux polynômes entiers et homogènes U et V n'admettent aucun diviseur commun de la forme $ax + by$, on dit que *ces polynômes sont premiers entre eux*.

Si, au contraire, D désignant un polynôme entier et homogène, on a

$$U = U_1 . D$$

et

$$V = V_1 . D,$$

U_1 et V_1 étant des polynômes entiers, homogènes, et premiers entre eux; on dit que D *est le plus grand commun diviseur de U et de V*.

Deux polynômes U, V, qui ne sont pas premiers entre eux, admettent évidemment un *p. g. c. d.*, lequel est d'un degré égal, ou inférieur, au plus petit des degrés de U et de V. On voit aussi qu'il n'y a qu'un seul polynôme pouvant repré-

senter la fonction que nous venons de définir. Il peut y avoir plusieurs diviseurs communs à U et V; mais il n'y a qu'un seul *p . g . c. d.*, lequel est, parmi les diviseurs communs, celui qui a le degré le plus élevé.

Ceci posé, nous allons résoudre le problème suivant :

Deux polynômes U *et* V, *étant donnés; reconnaître qu'ils sont, ou non, premiers entre eux; et dans le cas où ils ne sont pas premiers entre eux, déterminer leur* p . g . c . d.

On remarquera, dans les développements qui vont suivre, le rapprochement que l'on peut faire entre la théorie du *p . g . c . d.* algébrique et celle du *p . g . c . d.*, telle qu'elle a été exposée en arithmétique.

395. Lemme. *Si* U *n'est pas exactement divisible par* V, *le* p . g . c . d. *entre* U *et* V *est le même que celui qui existe entre le polynome* V *et le reste* R *obtenu en effectuant la division de* U *par* V.

Si U était exactement divisible par V, V serait évidemment le *p. g. c. d.* cherché. Supposons donc que cette division ne se fasse pas exactement et conduise à l'identité

$$(1) \quad U \equiv VQ + R,$$

on voit d'abord que si U et V sont premiers entre eux, V et R sont, eux aussi, premiers entre eux. En effet si V et R admettaient le diviseur commun $x - x_0$ on aurait

$$V_0 = 0 \quad \text{et} \quad R_0 = 0,$$

par conséquent $U_0 = 0$; mais alors U serait divisible par $x - x_0$, et les polynômes U et V ne seraient pas premiers entre eux.

Supposons maintenant que U et V admettent un *p . g . c . d.* D; nous allons montrer que D est aussi le *p . g . c . d.* de V et de R.

On a, par hypothèse,

$$(2) \quad U \equiv U_1 D$$
$$(3) \quad V \equiv V_1 D$$

U_1 et V_1 étant deux polynômes entiers, premiers entre eux. L'identité (1) peut donc s'écrire

$$(4) \quad R \equiv (U_1 - V_1 Q) D ;$$

$U_1 - V_1 Q$ est un polynôme entier qui n'est pas identiquement nul; car si l'on avait $U_1 - V_1 Q \equiv 0$ on aurait $R \equiv 0$ et par suite les polynômes U et V seraient exactement divisibles l'un par l'autre. Ainsi R est divisible par D et les indentités (3) et (4) établiront que D, est le *p. g. c. d.* des polynômes V et R, quand nous aurons montré que

$$V_1, \quad \text{et} \quad (U_1 - V_1 Q),$$

sont premiers entre eux.

Considérons en effet un diviseur quelconque $(x - x_0)$ de V_1; si $(x - x_0)$ était un diviseur de $U_1 - V_1 Q$, $x = x_0$ rendrait nulle cette fonction, et par suite U_1, puisque V_1 s'annule pour $x = x_0$; or U_1 et V_1 sont premiers entre eux; il en est donc de même de V_1 et de $(U_1 - V_1 Q)$.

396. Recherche du p. g. c. d. algébrique. Désignons toujours par U et V les deux polynômes proposés; divisons U par V, soit R_1 le reste obtenu; divisons V par R_1 soit R_2 le reste de cette division; et ainsi de suite.

Deux cas peuvent se présenter : 1° *le dernier reste obtenu* R_p *est numérique*: le *p. g. c. d.* entre U et V étant le même que ceux des polynômes

$$V \text{ et } R_1, \quad R_1 \text{ et } R_2, \ldots \; R_{p-1} \text{ et } R_p$$

et ces derniers n'ayant pas de diviseur commun de la forme $ax + b$, on peut conclure de ce calcul que U et V sont premiers entre eux. 2° *le dernier reste* R_p *est nul :* dans ce cas le *p. g. c. d.* entre R_{p-2} et R_{p-1} est égal à R_{p-1} ; R_{p-1} représente donc le *p. g. c. d.* cherché. On conclut de cette théorie la règle suivante :

Règle. *Étant donnés deux polynômes* U *et* V, *on divise successivement:* 1° U *par* V ; 2° V *par le reste* R_1 *de cette première*

division ; 3° R_1 par le reste R_2 de cette deuxième division ; et ainsi de suite : ces calculs conduisent nécessairement à une division dont le reste est numérique, ou égal à zéro : dans le premier cas U et V sont premiers entre eux ; dans la seconde hypothèse, ils admettent un p . g . c . d. *qui est égal au diviseur employé dans la dernière division.*

397. Théorème. *Lorsque deux polynômes U et V sont premiers entre eux, on peut toujours trouver deux polynômes entiers, μ et ν tels que l'on ait*

$$\mu U + \nu V = 1.$$

En effet les opérations que nous venons de définir dans l'énoncé de la règle précédente donnent les identités :

$$\begin{aligned} U &= VQ_1 + R_1 \\ V &= R_1Q_2 + R_2 \\ R_1 &= R_2Q_3 + R_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ R_{p-2} &= R_{p-1}Q_p + R_p, \end{aligned}$$

R_p étant un nombre. La première identité prouve que R_1 est de la forme algébrique $\alpha U + \beta V$, α et β désignant des polynômes entiers ; portons cette valeur de R_1 dans la deuxième identité, on voit que R_2 est aussi de cette forme ; et ainsi de suite. Toutes les quantités R_1, R_2, ... R_p ont donc la forme algébrique $(mU + nV)$ et l'on peut poser

$$R_p = \alpha' U + \beta' V.$$

En divisant par R_p, qui n'est pas nul et en posant

$$\frac{\alpha'}{R_p} = \mu, \quad \frac{\beta'}{R_p} = \nu ;$$

on a

$$1 = \mu U + \nu V ;$$

μ et ν étant deux polynômes entiers.

398. Théorème. *Un polynôme qui divise un produit de deux polynômes, et qui est premier avec l'un d'eux, divise l'autre.*

Soit P un polynôme divisant le produit U.V, de deux polynômes U et V; je suppose que P soit premier avec V, je dis que P divise U.

En effet, P et V étant premiers entre eux, nous venons de reconnaître qu'il existait deux polynômes μ, ν vérifiant l'identité

$$\mu P + \nu V \equiv 1,$$

et, par suite, l'identité

$$\mu PU + \nu VU \equiv U.$$

Par hypothèse, le polynôme P divise VU; soit Q le quotient, on a

$$UV \equiv P.Q,$$

et, par conséquent,

$$P(\mu U + \nu Q) \equiv U.$$

Cette identité prouve que U est exactement divisible par P.

399. Théorème [1]. *Étant donnés deux polynômes* U *et* V; *si l'on peut trouver deux autres polynômes* P *et* Q, P *étant d'un degré inférieur à* V, *et* Q *d'un degré inférieur à* U, *tels que la relation*

$$(1) \quad PU - QV \equiv 0,$$

soit vérifiée, U *et* V *ne sont pas premiers entre eux.*

La relation (1) donne

$$(2) \quad \frac{U}{V} \equiv \frac{Q}{P}, \quad \text{ou} \quad U \equiv V\frac{Q}{P}.$$

1. Ce théorème a déjà été établi plus haut (§ 381); mais la démonstration que nous donnons ici offre un intérêt particulier, parce qu'elle est affranchie de l'idée de décomposition d'un polynôme entier en facteurs. C'est cette démonstration que nous avons visée en exposant, d'après M. Walecki, le théorème de d'Alembert.

on peut d'ailleurs supposer que Q et P sont premiers entre eux, car s'ils admettaient un diviseur commun D on pourrait diviser les deux membres de (1) par D, l'identité n'en subsisterait pas moins.

D'après l'identité (2) P divise le produit VQ; il est premier avec Q, il divise donc V. Posons, d'après cela

$$(3) \quad V = P \cdot \theta$$

et observons que P étant, par hypothèse, d'un degré inférieur à V, θ est nécessairement une fonction entière de x, du premier degré, au moins.

Les identités (2) et (3) donnent alors

$$(4) \quad U = Q \cdot \theta.$$

Les relations (3) et (4) prouvent que les polynômes U et V admettent un diviseur commun θ, θ étant un polynôme entier en x; U et V ne sont donc pas premiers entre eux.

ABAISSEMENT D'UNE ÉQUATION QUI ADMET DES RACINES ÉGALES.

400. Théorème. *Si α est une racine de multiplicité p de l'équation $f(x) = 0$, elle est racine de multiplicité $(p-1)$ de l'équation $f(x) = 0$.*

On a, d'après l'hypothèse,

$$(1) \quad f(x) = (x-\alpha)^p \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier qui, pour $x = \alpha$, prend une valeur différente de zéro.

L'identité (1) donne la suivante

$$(2) \quad f'(x) = (x-\alpha)^{p-1} [p\varphi(x) + (x-\alpha)\varphi'(x)].$$

Si $p = 1$, en d'autres termes, si α est une racine simple, on a

$$f'(\alpha) = p\varphi(\alpha);$$

$f'(\alpha)$ est donc différent de zéro, puisqu'on a supposé $\varphi(\alpha) \neq 0$. Ainsi *une racine simple d'une équation n'appartient jamais à l'équation dérivée.*

Mais supposons, au contraire, $p > 1$; l'identité (2) prouve que α est une racine de multiplicité $(p-1)$, de l'équation $f'(x) = 0$ ou une racine d'une multiplicité supérieure. Pour que cette seconde hypothèse fût admissible il faudrait que le polynôme

$$p\varphi(x) + (x - \alpha)\varphi'(x),$$

devînt nul, pour $x = \alpha$. Or, pour $x = \alpha$, ce polynôme prend la valeur $p\varphi(\alpha)$, qui est différente de zéro. En résumé α est une racine de multiplicité $(p-1)$, dans l'équation dérivée.

401. Théorème. *Si α est une racine de multiplicité μ, de l'équation $f'(x) = 0$, ou elle n'est pas racine de l'équation $f(x) = 0$, ou celle-ci l'admet avec une multiplicité égale à $(\mu + 1)$.*

Si α est racine de l'équation $f(x) = 0$, elle ne peut être qu'une racine multiple, puisque si elle était racine simple elle ne pourrait vérifier l'équation $f'(x) = 0$. Soit z son degré de multiplicité dans $f(x) = 0$; $z - 1$ sera, d'après ce que nous venons de voir, le degré de multiplicité de α dans $f'(x) = 0$. On a donc $z - 1 = \mu$, ou $z = \mu + 1$.

402. Théorème. *Si α est une racine de multiplicité p, de l'équation $f(x) = 0$, elle est racine des équations*

$$(1) \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \ldots f^{(p-1)}(x) = 0,$$

avec les degrés respectifs,

$$p-1, \quad p-2, \quad \ldots \quad 1;$$

mais elle n'est pas racine de l'équation $f^{(p)}(x) = 0$.

En effet α est racine de multiplicité $(p-1)$ de l'équation $f'(x) = 0$ (§ 398). Cette propriété appliquée successivement aux équations (1) établit le théorème que nous venons d'énoncer.

403. Théorème. *Si l'on a, simultanément,*

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) = 0, \quad \ldots \quad f^{(p-1)}(\alpha) = 0;$$

et

$$f^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

α est racine de multiplicité p de l'équation f(x) = 0.

Si, dans l'identité

$$f(z+h) = f(z) + \frac{h}{1} f'(z) + \ldots + \frac{h^p}{p\,!} f^{(p)}(z) + \frac{h^{p+1}}{p\,!} \varphi^{(p)}(z),$$

on pose,

$$z = \alpha, \quad \text{et} \quad \alpha + h = x\,;$$

on a, en tenant compte de l'hypothèse,

$$f(x) = \frac{(x-\alpha)^p}{p\,!} \left[f^{(p)}(\alpha) + (x-\alpha)\,\varphi^{(p)}(\alpha)\right].$$

Cette identité prouve bien que α est une racine, de multiplicité p, de l'équation $f(x) = 0$.

404. Théorème. *Si l'équation f (x) = 0 n'a pas de racines multiples, les polynômes f (x) et f' (x) sont premiers entre eux ; si, au contraire f(x) = 0 admet des racines multiples*

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots \quad l$$

avec des degrés de multiplicité représentés respectivement par

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots \quad \lambda\,;$$

f (x) et f' (x) ont un p. g. c. d. *qui est donné par la formule*

$$D = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1}\ldots(x-l)^{\lambda-1}.$$

On a, par hypothèse,

$$(1) \quad f(x) = P_1 (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda},$$

P_1 désignant le produit des facteurs binômes qui correspondent aux racines simples. Prenons les dérivées des deux membres de cette identité et mettons en évidence le facteur commun à tous les termes, nous obtenons l'identité

$$(2) \quad f'(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots(x-l)^{\lambda-1}\,.\,V$$

en posant

$$\begin{aligned} V = \alpha P_1 (x-b) \ldots (x-l) \\ + \beta P_1 (x-a) \ldots (x-l) \\ + \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

Ce polynôme V ne s'annule pour aucune des valeurs de x qui sont racines de l'équation proposée. Cette observation faite, les identités (1) et (2) prouvent que D est bien le *p. g. c. d.* des polynômes $f(x)$ et $f'(x)$.

Remarque. Si l'on pose, d'après une notation déjà indiquée (§ 358),

$$f(x) = P_1 (P_2)^2 (P_3)^3 \ldots (P_h)^h,$$

le *p. g. c. d.* entre $f(x)$ est $f'(x)$ est donné par la formule

$$D = P_2 (P_3)^2 \ldots (P_h)^{h-1}.$$

Cette formule est générale et convient à tous les cas, si l'on convient, comme nous le faisons ici, que dans le cas où l'équation n'a pas de racines de multiplicité t, on y remplace P_t par 1.

405. Recherche des racines égales. Nous pouvons maintenant résoudre le problème que nous nous sommes posé plus haut et nous allons montrer comment on ramène la résolution d'une équation, à racines multiples, à celle d'équations n'ayant que des racines simples.

Soit posé

$$f(x) = P_1 (P_2)^2 (P_3)^3 \ldots (P_h)^h.$$

Si l'on désigne par D_1 le *p. g. c. d.* entre $f(x)$ et $f'(x)$ on a, comme nous venons de l'établir,

$$D_1 = P_2 (P_3)^2 \ldots (P_h)^{h-1}.$$

Soit D_2 le *p. g. c. d.* entre D_1 et le polynôme dérivé D'_1, on a

$$D_2 = P_3 (P_4)^2 \ldots (P_h)^{h-2}$$

et ainsi de suite. On peut donc former le tableau suivant :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_1 (P_2)^2 (P_3)^3 \ldots (P_h)^h \\ D_1 &= P_2 (P_3)^2 \ldots (P_h)^{h-1} \\ D_2 &= P_3 \ldots (P_h)^{h-2} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ D_{h-2} &= P_{h-1}(P_h)^2 \\ D_{h-1} &= P_h. \end{aligned}$$

Dans ces identités les premiers membres sont des polynômes entiers ; ces polynômes sont connus et ont été calculés, comme nous l'avons expliqué. On peut aussi remarquer que dans la suite

$$f(x),\ D_1,\ D_2,\ \ldots\ D_{h-2},\ D_{h-1}\ ;$$

chaque terme est divisible, exactement, par le suivant et l'on peut poser :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{D_1}\right) &= P_1 P_2 \ldots P_h \\ \left(\frac{D_1}{D_2}\right) &= P_2 \ldots P_h \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{D_{h-2}}{D_{h-1}}\right) &= P_{h-1} P_h \\ D_{h-1} &= P_h. \end{aligned}$$

Les divisions, indiquées dans les premiers membres, étant effectuées, on déduit de ces identités, les suivantes

$$P_1 = \left(\frac{\left(\frac{f(x)}{D_1}\right)}{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)}\right),\ P_2 = \left(\frac{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)}{\left(\frac{D_2}{D_3}\right)}\right), \ldots P_{h-1} = \left(\frac{\left(\frac{D_{h-2}}{D_{h-1}}\right)}{D_{h-1}}\right),\ P_h = D_{h-1}$$

Les divisions indiquées dans les seconds membres sont encore supposées effectuées, et la résolution de l'équation

proposée se trouve finalement ramenée à celle des équations

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \ldots P_h = 0;$$

qui n'admettent que des racines simples.

406. Exprimer qu'une équation a une racine double. Un problème qui se pose fréquemment, notamment dans la géométrie analytique, est celui qui a pour but de rechercher la condition que doivent vérifier les coefficients d'une équation donnée, pour que celle-ci admette une racine double.

L'équation étant, sous la forme homogène,

$$(1) \quad \varphi(x, y) = 0,$$

on a

$$\varphi(x,y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y) \ldots (a_mx + b_my).$$

Supposons que l'équation $\varphi(x, 1) = 0$ admette deux racines égales à α ; on a, dans ce cas,

$$(2) \quad \varphi(x, y) = (x - \alpha y)^2 Q,$$

Q désignant une fonction homogène des lettres x et y.

L'identité (2) donne d'ailleurs

$$\varphi'_x(x, y) = 2(x - \alpha y) Q + (x - \alpha y)^2 Q'_x,$$

et

$$\varphi'_y(x, y) = -2\alpha(x - \alpha y) Q + (x - \alpha y)^2 Q'_y.$$

Les équations $\varphi'_x = 0$, $\varphi'_y = 0$ sont donc vérifiées par les valeurs $x = \alpha$, $y = 1$. Cette propriété importante peut s'énoncer ainsi :

Soit $f(x) = 0$ une équation qui, rendue homogène, s'écrit $\varphi(x, y) = 0$; si x' est une racine double de $f(x) = 0$, α est une racine simple des équations.

$$\varphi'_x(x, 1) = 0, \quad \varphi'_y(x, 1) = 0$$

La réciproque de ce théorème est vraie. En effet soit α une racine simple des équations

$$\varphi'_x(x, 1) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_y(x, 1) = 0.$$

on a, d'après l'identité d'Euler (§ 305)

$$m\varphi(x, y) = x\varphi'_x(x, y) + y\varphi'_y(x, y).$$

Faisons $x = \alpha, y = 1$, on a

$$m\varphi(a, 1) = 0$$

et, par suite, $f(\alpha) = 0$. Ainsi α est une racine de l'équation proposée. Je dis qu'elle est racine simple de l'équation dérivée, $f'(x) = 0$.

En effet, $\varphi'_x(x . y)$ est identique à $f'(x)$, quand on y fait $y = 1$; or l'on suppose $\varphi'_x(\alpha, 1) = 0$; on peut donc dire que α est une racine double de l'équation $f(x) = 0$ (§ 399).

Application. *Exprimer que l'équation*

$$x^m + px + q = 0$$

admet une racine double.

On a, dans cet exemple,

$$\varphi(x,y) = x^m + pxy^{m-1} + qy^m,$$

par conséquent

$$\varphi'_x(x,y) = mx^{m-1} + py^{m-1}$$

et

$$\varphi'_y(x, y) = (m-1)pxy^{m-2} + mqy^{m-1}.$$

Si nous appliquons le théorème que nous venons d'établir, nous obtenons les deux équations

$$(1) \qquad mx^{m-1} + p = 0$$
$$(2) \qquad (m-1)px + mq = 0$$

qui ont une solution commune. L'équation (2) n'admet d'autre racine que le nombre $-\frac{mq}{(m-1)p}$; par suite, la condition cherchée est

$$(-1)^{m-1} \frac{m^m q^{m-1}}{(m-1)^{m-1} p^{m-1}} + p = 0.$$

ou

$$(\text{A})\qquad (-1)^{m-1}\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}+\left(\frac{p}{m}\right)^{m}=0.$$

Dans le cas particulier où l'on suppose $m=3$, l'équation étant

$$x^3+px+q=0,$$

la condition (A) devient

$$(\text{A}')\qquad \left(\frac{p}{3}\right)+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0.$$

407. Remarque. On peut facilement généraliser le principe que nous venons d'établir (§ 406), et montrer que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation $f(x)=0$ admette la racine α à la multiplicité p sont

$$\varphi^{(p-1)}_{x^{p-1}}(\alpha,1)=0,\quad \varphi^{(p-1)}_{x^{p-2}y}(\alpha,1)=0,\ \ldots\ \varphi^{(p-1)}_{y^{p-1}}(\alpha,1)=0;$$

$\varphi(x,y)$ désignant la fonction, entière et homogène, $y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$.

On voit d'abord que ces conditions sont nécessaires en prenant successivement les dérivées des deux membres de l'identité

$$\varphi(x,y)=(x-\alpha y)^p\text{R}.$$

Pour reconnaitre qu'elles sont suffisantes, on peut s'appuyer sur l'identité

$$(\text{B})\quad x^p\varphi^{(p)}_{x^p}(x,y)+px^{p-1}y\varphi^{(p)}_{x^{p-1}y}(x,y)+\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}y^2\varphi^{p}_{x^{p-2}y^2}(x,y)+\ldots$$
$$\ldots+y^p\varphi^{(p)}_{y^p}(x,y)=m(m-1)\ldots(m-p+1)\varphi(x,y),$$

qui est une généralisation du théorème d'Euler, relatif aux fonctions homogènes.

Cette identité peut s'établir de bien des façons différentes; on peut notamment la déduire du théorème d'Euler, de la manière suivante.

Les fonctions $\varphi'(x,y)$, $\varphi'(x,y)$ étant homogènes, et du degré $(m-1)$, on a d'après le théorème d'Euler

$$(m-1)\varphi'_x(x,y = x\varphi''_{x^2}(x,y) + y\varphi''_{xy}(x,y),$$

et

$$(m-1)\varphi'_y(x,y) = x\varphi''_{xy}(x,y) + y\varphi''_{y^2}(x,y).$$

On tire de là, par combinaison,

$$(m-1)(x\varphi'_x + y\varphi'_y) = x^2\varphi''_{x^2} + 2xy\varphi''_{xy} + y^2\varphi''_{y^2}$$

et, par suite

$$\frac{m(m-1)}{2}\varphi(x,y) = \frac{x^2}{1.2}\varphi''_{x^2} + \frac{xy}{1}\varphi''_{xy} + \frac{y^2}{1.2}\varphi''_{y^2}.$$

Ceci représente l'identité (H), dans le cas de $p = 2$. On obtiendra l'identité (H), elle-même, en supposant que la propriété est vraie pour les dérivées d'ordre $(p-1)$, et en montrant qu'elle subsiste pour les dérivées d'ordre p.

EXERCICES.

1. *En désignant par $\varphi(x,y)$ une forme homogène, d'x et d'y, démontrer l'identité suivante :*

$$(2^m - 1)\varphi(x,y) = (x\varphi'_x + y\varphi'_y) + \left(\frac{x^2}{1.2}\varphi''_{x^2} + \frac{xy}{1}\varphi''_{xy} + \frac{y^2}{1.2}\varphi''_{y^2}\right)$$
$$+ \left(\frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''_{x^3} + \frac{x^2y}{1.2.1}\varphi'''_{x^2y} + \frac{y^2x}{1.2.1}\varphi'''_{y^2x} + \frac{y^3}{1.2.3}\varphi'''_{y^3}\right)$$
$$+ \ldots$$

On peut déduire cette relation des identités

$$m\varphi = x\varphi'_x + y\varphi'_y$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2}\varphi = \frac{x^2}{1.2}\varphi''_{x^2} + \frac{xy}{1}\varphi''_{xy} + \frac{y^2}{1.2}\varphi''_{y^2}$$

. . . .

et de l'égalité connue

$$2^m - 1 = m + \frac{m(m-1)}{1.2} + \dots$$

On peut aussi l'établir, directement, au moyen de la formule de Taylor

$$\begin{aligned}\varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y) &+ \frac{h}{1}\varphi'_x + \frac{h^2}{1.2}\varphi''_{x^2} + \dots \\ &+ \frac{k}{1}\varphi'_y + \frac{hk}{1}\varphi''_{xy} \\ &+ \frac{k^2}{1.2}\varphi''_{y^2}\end{aligned}$$

en y faisant $h = x$ $k = y$.

2. *Démontrer que si l'équation*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

admet deux racines égales à α, *on a*

$$(1) \quad A_1 x^{m-1} + 2A_2 x^{m-2} + \dots + mA_m = 0.$$

On considère l'équation aux inverses, laquelle admet deux racines égales à $\frac{1}{a}$: $\frac{1}{a}$ est donc une racine de l'équation

$$mA_m x^{m-1} + \dots A_1 = 0;$$

on a donc bien la relation (1).

3. *Démontrer que si* α *est une racine double de l'équation* $f(x) = 0$, *on a, quelque soit* λ,

$$f'(\lambda) + \frac{\alpha}{1}f''(\lambda) + \frac{\alpha^2}{1.2}f'''(\lambda) + \dots + m\alpha^{m-1} = 0,$$

le premier terme de $f(x)$ *étant* x^m.

L'équation $f(x+\lambda) = 0$ a une racine double, quel que soit λ ; on développe $f(x+\lambda)$ par la formule de Taylor et on écrit que α est une racine de l'équation dérivée.

TRENTE ET UNIÈME LEÇON

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS

408. Définition de la transformation. Soit $f(x) = 0$ une équation donnée, du degré m; supposons qu'une quantité inconnue y soit déterminée par la relation

$$\text{(A)} \quad R(y, x_1, x_2, \dots x_k) = 0\,;$$

$x_1, x_2 \dots, x_k$ désignant k racines particulières de l'équation proposée. Ces quantités y, ainsi définies, peuvent être considérées comme les racines d'une équation

$$F(y) = 0.$$

Nous dirons que $F(y) = 0$ est l'équation transformée de l'équation $f(x) = 0$; (A) est la formule de la transformation.

409. Degré de l'équation transformée. Si la formule de transformation renferme k racines et si nous la supposons rationnelle, entière, et du degré q en y; le degré μ de l'équation transformée est, généralement, donné par la formule

$$\mu = q \cdot m(m-1)\dots(m-k+1).$$

Imaginons, en effet, un des arrangements k à k des m racines de l'équation $f(x) = 0$: à cet arrangement correspondent q valeurs de y. Le nombre total des valeurs de y est donc égal à q fois le nombre des arrangements des m racines groupées k à k; il est donc bien donné par la formule précédente.

Nous examinerons surtout, dans ce qui va suivre, le cas où $k = 1$, et celui où $k = 2$; mais nous ferons observer que le problème général peut se résoudre et que cette solution dépend seulement du calcul connu des fonctions symétriques des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Imaginons, en effet, toutes les combinaisons, k à k, des racines $x_1, x_2, \dots x_m$

$$x_1, x_2, \dots x_k,$$
$$x_2, x_3, \dots x_{k+1},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

L'équation en y

$$(1) \quad \text{R}(y, x_1, x_2, \dots x_k)\,\text{R}(y, x_2, x_3, \dots x_{k+1})\dots = 0,$$

a pour racines les nombres cherchés, sans exception et sans répétition ; en d'autres termes, (1) est l'équation transformée. Le premier membre de (1) est d'ailleurs une fonction symétrique des racines $x_1, x_2, \dots x_m$; en effectuant le produit indiqué, et en appliquant les formules connues pour le calcul des fonctions symétriques, on aura donc l'équation transformée. On remarquera, ceci est une conséquence d'une propriété précédemment démontrée (§ 378), que les coefficients de la transformée sont des fonctions rationnelles de ceux de la proposée.

410. Définitions générales. Nous adopterons les dénominations suivantes : la transformation est :

1° *d'ordre k*, lorsque la formule (A) renferme k racines ;

2° *rationnelle*, lorsque la formule (A) est $\text{U}y = \text{V}$, U et V étant des fonctions entières des racines ;

3° *entière*, lorsque l'on a $y = \varphi(x)$; $\varphi(x)$ désignant une fonction entière de x ;

4° *homographique*, lorsque la relation entre x et y est

$$\text{A}xy + \text{B}x + \text{C}y + \text{D} = 0,$$

A, B, C, D désignant des constantes. Dans tous les cas, il est entendu que la formule de transformation n'est pas décomposable, identiquement, en facteurs rationnels.

411. Théorème I. *Dans une transformation rationnelle du premier ordre, l'équation transformée est identique au résultant des deux équations.*

Soit

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

l'équation proposée et

$$(2) \quad y \cdot \psi(x) = \varphi(x)$$

la formule de transformation. Désignons par x_1, $x_2 \ldots x_m$ les m racines de (1); l'équation cherchée est

$$[y\psi(x_1) - \varphi(x_1)] \ldots [y\psi(x_m) - \varphi(x_m)] = 0.$$

Nous avons vu (§ 389), que le premier membre de cette équation est identique au résultant des équations (1) et (2). On pourra donc, dans ce cas, effectuer la transformation par l'une ou l'autre des méthodes qui ont été indiquées (leçon 29), pour former le résultant de deux équations.

412. Théorème II. *Une transformation entière, définie par les deux équations*

$$f(x) = 0,$$
$$y = \varphi(x);$$

$f(x)$ étant du degré m, et $\varphi(x)$ d'un degré p, supérieur ou égal à m, peut toujours être ramenée à la transformation

$$f(x) = 0$$
$$y = \psi(x)$$

$\psi(x)$, désignant une fonction entière, dont le degré est inférieur à m.

Soit posé

$$f(x) = x^m - Ax^{m-1} - Bx^{m-2} \ldots - H.$$

On a donc

$$x^m = Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + H;$$

par suite

$$x^{m+1} = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Hx,$$

ou

$$x^{m+1} = (A^2 + B)x^{m-1} + (AB + C)\,x^{m-2} + \dots + AH.$$

On peut ainsi calculer, de proche en proche, x^m, x^{m+1}, x^{m+2}, ...; les expressions de ces quantités étant des fonctions entières, du degré $(m-1)$, en x. Il résulte de cette remarque que y, qui est une fonction entière de x, pourra toujours s'exprimer par une formule ne renfermant aucune puissance de x, supérieure à $(m-1)$.

413. Théorème III. *Une transformation rationnelle, du premier ordre, définie par les équations*

$$f(x) = 0$$
$$y\,.\,U - V = 0,$$

peut toujours être ramenée à une transformation entière, toutes les fois que les polynômes V *et* $f(x)$, *sont premiers entre eux.*

Les polynômes U et $f(x)$, étant premiers entre eux, on sait (§ 397), qu'il existe deux polynômes entiers μ, ν, tels que l'identité

$$\mu f(x) + \nu U = 1,$$

soit vérifiée. On a donc

$$y = \frac{V}{U} = \frac{\nu V}{\nu U};$$

ou enfin

$$(1) \quad y = \frac{\nu V}{1 - \mu f(x)}.$$

Considérons maintenant la transformation entière définie par les formules

$$f(x) = 0,$$
$$(2) \quad Y = \nu V.$$

En appelant x_1, x_2, ... x_m, les m racines de $f(x) = 0$, on a, pour y et Y, des valeurs correspondantes y_1, y_2, ... y_m;

$Y_1, Y_2, \dots Y_m$; d'ailleurs les égalités (1) et (2), donnent

$$y_1 = Y_1 \quad y_2 = Y_2, \dots y_m = Y_m.$$

L'équation en Y est donc identique à l'équation en y et c'est ainsi que l'on peut ramener la transformation fractionnaire à la transformation entière, dans le cas où il n'y a pas de diviseur commun à $f(x)$ et à U ; c'est d'ailleurs le cas général.

414. Théorème IV. *Toute transformation entière, telle que celle qui correspond aux équations*

$$(1) \quad f(x) = x^m - Ax^{m-1} \dots - H = 0,$$
$$(2) \quad y = \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \dots + \lambda,$$

peut toujours être remplacée par une transformation fractionnaire définie par les deux équations

$$(3) \quad \begin{cases} f(x) = 0, \\ y = \dfrac{V}{U}, \end{cases}$$

U *et* V, *désignant des fonctions entières dont les degrés ont une somme égale à m ; l'un de ces degrés étant d'ailleurs arbitraire.*

On a en effet

$$xy = \alpha x^m + \beta x^{m-1} + \dots + \lambda x,$$

ou

$$xy = (\beta + \alpha A) x^{m-1} + \dots + \alpha H,$$

et, par conséquent,

$$y = \frac{V_1}{U_1},$$

V_1 étant du degré $m - 1$, et U_1 du degré 1.

On a, de même,

$$x^2 y = (\beta + \alpha A) x^m + \dots + H\alpha x$$

ou

$$(4) \quad x^2 y = (\beta + \alpha A)(Ax^{m-1} + \dots + H) + \dots + \alpha H x.$$

Le second membre de cette égalité est, généralement, un polynôme du degré $(m-1)$ en x. Mais on a

$$x^{m-1} = \frac{y}{x} - \frac{\beta}{x} x^{m-2} \dots - \frac{\lambda}{x}$$

Substituons cette valeur de x^{m-1}, dans (1) et nous avons

$$y = \frac{V_2}{U_2},$$

V_2 désignant une fonction entière du degré $(m-2)$, et U_2 un trinôme de second degré. Le raisonnement précédent peut être poursuivi indéfiniment; le théorème en question est donc établi.

415. Théorème. *Lorsque l'équation qu'on transforme est du troisième degré, une transformation entière, du premier ordre, peut toujours être remplacée par une transformation homographique.*

Soit

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx - c = 0,$$

l'équation proposée, et

$$(1) \quad y = mx^2 + nx + p,$$

la formule de transformation.

On a d'abord

$$(2) \quad xy = m(ax^2 + bx + c) + nx^2 + px.$$

Si l'on a $ma + n = 0$, la formule précédente est celle d'une transformation homographique; si l'on suppose au contraire $ma + n \gtrless 0$, on peut éliminer x^2 entre (1) et (2), et la relation finale, entre x et y, est homographique.

416. Remarque. L'avantage de la transformation homographique ressort de la remarque suivante. La relation

$$Axy + Bx + Cy + D = 0$$

donne

$$-x = \frac{Cy + D}{Ay + B};$$

l'équation transformée s'obtient donc immédiatement en écrivant la relation

$$f\left(-\frac{Cy+D}{Ay+B}\right)=0.$$

417. Transformations rationnelles du second ordre. Ces transformations sont définies par les trois équations

$$(1)\quad f(x_1)=0,$$
$$(2)\quad f(x_2)=0,$$
$$(3)\quad y\,.\,\psi(x_1,x_2)-\varphi(x_1,x_2)=0.$$

La transformée est du degré $\frac{m(m-1)}{2}$, et peut s'obtenir par la méthode générale indiquée plus haut (§ 409). Dans la pratique, et pour éviter le calcul, ordinairement pénible, des fonctions symétriques, on cherche la transformée en éliminant x_1 et x_2, entre les équations (1), (2) et (3). On obtient ainsi une équation $R(y)=0$ qui, après une simplification que nous allons signaler, représente, en général, l'équation cherchée.

La nécessité de la simplification dont nous voulons parler tient à la présence, dans l'équation $R(y)=0$, des facteurs

$$y\psi(x_1,x_1)-\varphi(x_1,x_1)$$
$$y\psi(x_2,x_2)-\varphi(x_2,x_2)$$
$$\cdot\ ,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

dont le produit θ, donne une fonction symétrique des racines de l'équation donnée $f(x)=0$. Il résulte de là que $R(y)$ est décomposable en deux facteurs rationnels et que l'équation cherchée est $\left(\frac{R(y)}{\theta}\right)=0$, ou une équation d'un degré inférieur $S(y)=0$; $S(y)$ désignant un certain diviseur de $\left(\frac{R(y)}{\theta}\right)$.

On évite l'introduction du facteur θ, en remplaçant l'une des équations (1) ou (2), par la combinaison

$$\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right)=0,$$

e premier membre de cette équation représentant *une division effectuée.*

Nous devons faire remarquer ici que la méthode que nous venons d'indiquer, pour obtenir la transformée par l'élimination des lettres x_1 et x_2, ne donne pas toujours cette transformée. Comme nous l'avons observé tout à l'heure, le premier membre de l'équation cherchée peut, dans certains cas, être un diviseur du premier membre de l'équation obtenue. Ceci tient à ce que l'on ne sait pas, en général, éliminer deux paramètres, entre trois équations, avec la certitude de ne pas introduire *des facteurs étrangers.*

Lorsqu'on emploie la méthode par élimination, on doit toujours s'assurer que le résultat obtenu n'est pas d'un degré supérieur à celui que l'on peut calculer, *à priori,* d'après la formule de transformation. Ce degré est $m(m-1)$, dans le cas général ; il n'est plus que $\frac{m(m-1)}{2}$ lorsque la transformation est entière et symétrique ; c'est-à-dire lorsquelle est définie par la formule

$$y = \varphi(x_1, x_2) ;$$

la fonction entière φ, étant symétrique par rapport aux lettres x_1 et x_2.

Applications.

ÉQUATION AUX CARRÉS DES DIFFÉRENCES.

418. Equation aux sommes deux à deux. Cette transformation est définie par la formule

$$(1) \quad y = x' + x'',$$

x' et x'' étant deux racines quelconques de l'équation $f(x) = 0$. Considérons seulement le cas où $f(x) = 0$ est une équation du troisième degré ; et soit

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r.$$

Désignons par x la troisième racine de l'équation $f(x)=0$: on a

$$x+x'+x''=-p$$

et, par conséquent,

$$y=-p-x.$$

La transformation proposée se trouve ainsi ramenée au premier ordre; l'équation transformée est

$$(2)\quad y^3+2py^2+(p^2+q)y+(pq-r)=0.$$

419. Remarque. La transformation des équations permet, dans certains cas, de calculer commodément certaines fonctions symétriques des racines d'une équation donnée. Ainsi, de l'équation que nous venons d'obtenir, et de propriétés connues, on déduit immédiatement qu'en désignant par a, b, c, les racines de l'équation

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

on a

$$(a+b)(a+c)(b+c)=r-pq;$$

et aussi

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{p^2+q}{r-pq}.$$

420. Équation aux carrés des différences. Soient x' et x'', deux racines quelconques de l'équation $f(x)=0$; si nous posons $y=(x'-x'')^2$, l'équation en y, $F(y)=0$, que l'on obtient par cette transformation est dite *équation aux carrés des différences*. L'importance de cette équation résulte du théorème suivant :

Théorème. *Pour qu'une équation $f(x)=0$ ait toutes ses racines réelles, il est nécessaire et suffisant que l'équation aux carrés des différences soit complète, et n'offre que des variations.*

On voit d'abord facilement que si l'équation $f(x)=0$ a toutes ses racines réelles; $F(y)=0$ est une équation complète,

qui n'offre que des variations. En effet soient a, b, deux racines de l'équation $f(x)=0$, la quantité positive $(a-b)^2$, est alors une racine de l'équation $F(y)=0$. Si nous désignons par α, β, γ, ... les racines de cette équation, et par μ son degré, on a

$$F(y)=(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)\ldots;$$

ou

$$F(y)=y^{\mu}-\Sigma\alpha y^{\mu-1}+\Sigma\alpha\beta y^{\mu-}\ldots$$

Les nombres α, β, γ, ... étant tous positifs, on voit que les expressions $\Sigma\alpha$, $\Sigma\alpha\beta$, ... sont des sommes de quantités positives : ceci montre bien que l'équation

$$y^{\mu}-\Sigma\alpha y^{\mu-1}+\Sigma\alpha\beta y^{\mu-2}\ldots=0,$$

est complète, et n'offre que des variations.

Je dis maintenant que *réciproquement :* si $F(y)=0$ est une équation complète, et si elle n'offre que des variations, l'équation $f(x)=0$ a toutes ses racines réelles.

En effet l'équation $f(x)=0$ ayant ses coefficients réels ne peut avoir une racine de la forme $\alpha+\beta i$, sans admettre anssi la racine conjuguée $\alpha-\beta i$. Parmi les différences des racines, combinées deux à deux, se trouve en particulier la suivante

$$(\alpha+\beta i)-(\alpha-\beta i),$$

différence qui est égale $2\beta i$; par suite, $-4\beta^2$ est une racine de l'équation $F(y)=0$. Or l'équation $F(-y)=0$ n'offre que des permanences si nous supposons que $F(y)=0$ est une équation complète n'offrant que des variations; il est donc impossible que $F(y)=0$ admette une racine négative, telle que $-4\beta^2$.

421. Exprimer qu'une équation a une racine double. Nous avons déjà répondu à cette question (§ 405); mais nous voulons montrer qu'elle peut aussi être résolue par le moyen de l'équation aux carrés des différences. On remarque en effet que *la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* $f(x)=0$ *ait une racine double, est que l'équation*

aux carrés des différences $F(y) = 0$, *ait son terme tout connu égal à zéro.*

Nous allons indiquer ici un moyen de calculer ce terme.

Soient $x_1, x_2, \ldots x_m$; les m racines de l'équation $f(x) = 0$: $X_1, X_2, \ldots X_{m-1}$, celles de l'équation $f'(x) = 0$.

On a,

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m),$$

et

$$f'(x) = mx^{m-1} + \ldots = m(x - X_1)(x - X_2) \ldots (x - X_{m-1}).$$

On a, d'autre part,

$$f'(x) = \Sigma (x - x_2) \ldots (x - x_m),$$

et, par suite,

$$f'(x_1) = (x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_m),$$
$$f'(x_2) = (x_2 - x_1) \ldots (x_2 - x_m),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f'(x_m) = (x_m - x_1) \ldots (x_m - x_{m-1}).$$

Multiplions ces égalités, nous avons :

$$f'(x_1) f'(x_2) \ldots f'(x_m) = \pm (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 \ldots (x_m - x_{m-1})^2.$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} f'(x_1) f'(x_2) \ldots f'(x_m) = m^m & (x_1 - X_1)(x_1 - X_2) \ldots (x_1 - X_{m-1}) \\ & (x_2 - X_1)(x_2 - X_2) \ldots (x_2 - X_{m-1}) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (x_m - X_1)(x_m - X_2) \ldots (x_m - X_{m-1}), \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} f'(x_1) f'(x_2) \ldots f'(x_m) = \pm m^m & (X_1 - x_1)(X_1 - x_2) \ldots (X_1 - x_m) \\ & (X_2 - x_1)(X_2 - x_2) \ldots (X_2 - x_m) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (X_{m-1} - x_1)(X_{m-1} - x_2) \ldots (X_{m-1} - x_m). \end{aligned}$$

On a donc, finalement,

$$\pm (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 \ldots (x_m - x_{m-1})^2 = m^m f(X_1) f(X_2) \ldots f(X_{m-1}).$$

Dans cette egalité le premier membre représente le terme tout connu de l'équation aux carrés des différences; le second membre est une fonction symétrique des racines de l'équation dérivée; fonction qui peut s'exprimer, rationnellement, au moyen des coefficients de l'équation proposée.

Le terme tout connu de l'équation aux carrés des différences présente un intérêt particulier dans le cas où l'équation $f(x) = 0$ est du troisième degré; nous allons en donner le motif.

422. Théorème. *Pour qu'une équation du troisième degré ait ses trois racines réelles, il est nécessaire et suffisant, que le terme tout connu de l'équation aux carrés des différences ait un signe contraire à celui du premier terme.*

Soit (1) $f(x) = 0$, l'équation proposée et soit

$$(2) \quad y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0,$$

l'équation aux carrés des différences; nous allons montrer que la condition nécessaire et suffisante, pour que l'équation $f(x) = 0$ ait ses trois racines réelles, est exprimée par l'inégalité $\gamma < 0$.

Il est d'abord évident que l'on a $\gamma < 0$ lorsque les racines de l'équation donnée sont réelles; car en appelant $y_1\, y_2\, y_3$ les racines de l'équation (2), on a $y_1 y_2 y_3 = -\gamma$; d'ailleurs y_1, y_2 et y_3 sont des nombres positifs, on a donc bien $\gamma < 0$.

Supposons maintenant que l'équation (1) ait deux racines imaginaires; soient

$$x', \quad a + bi, \quad a - bi,$$

les trois racines de cette équation;

$$(x' - a - bi)^2, \quad (x' - a + bi)^2, \quad (2bi)^2,$$

sont les racines de (2). On a donc

$$\gamma = -(2bi)^2\left\{(x' - a)^2 + b^2\right\}^2,$$

ou

$$\gamma = +4b^2\left\{(x'-a)^2+b^2\right\}^2.$$

Ainsi, dans le cas des racines imaginaires on a $\gamma > 0$. De ces remarques, on déduit le théorème énoncé.

423. Équation aux différences. Prenons l'équation réduite du troisième degré

$$x^3+px+q=0,$$

et proposons-nous de transformer cette équation par la formule

$$y = x' - x''.$$

Le calcul peut être dirigé de la manière suivante.

Des relations

$$f(x') = x'^3 + px' + q = 0,$$
$$f(x'') = x''^3 + px'' + q = 0,$$

on déduit

$$\left(\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\right) = x'^2 + x'x'' + x''^2 + p = 0 \quad (1).$$

On a d'ailleurs

$$(2) \quad y^2 = x'^2 + x''^2 - 2x'x'',$$

et, par suite, en combinant (1) et (2),

$$(3) \quad 3x'x'' = -p - y^2,$$

et aussi

$$(4) \quad 3(x'^2+x''^2) = y^2 - 2p.$$

De ces deux égalités, on déduit la suivante

$$(5) \quad 3(x'+x'')^2 = -y^2 - 4p;$$

on a d'ailleurs, en désignant par x, la troisième racine,

$$x + x' + x'' = 0$$

et, par conséquent, d'après (5),

$$(A)' \quad y^2 + 3x^2 + 4p = 0,$$

d'autre part, l'égalité (3) et la relation $x\,x'\,x'' = -q$, donnent

$$(B) \quad \frac{3q}{x} = p + y^2.$$

Entre (A) et (B) éliminons x, on a

$$27q^2 = -(p + y^2)^2 \cdot (y^2 + 4p),$$

ou enfin

$$(C) \quad y^6 + 6py^4 + 9p^2y^2 + 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

424. Remarque. L'équation aux différences est du degré $m\,(m-1)$; mais, pour une raison évidente, elle présente la particularité de n'avoir aucune puissance impaire de z. En posant $y^2 = z$, l'équation en z est précisément l'équation aux carrés des différences. D'après ce que nous avons vu plus haut (§ 421 et 422), il résulte de (C), que *l'équation*

$$x^3 + px + q = 0,$$

1° *a une racine double quand on a*

$$4p^3 + 27q^2 = 0,$$

2° *qu'elle a ses trois racines réelles quand on suppose*

$$4p^3 + 27q^2 < 0,$$

et seulement dans cette hypothèse.

425. Équation aux produits deux à deux. Dans le cas du troisième degré, l'équation proposée étant

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

la formule de transformation,

$$y = x'\,x'',$$

donne

$$xy = -r.$$

Par suite, l'équation transformée est

$$y^3 - qy^2 + pry - r^2 = 0.$$

En général, le degré de la transformée est $\frac{m(m-1)}{2}$.

428. Équation aux quotients deux à deux. Considérons l'équation du troisième degré, privée du second terme,

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0,$$

et proposons-nous de transformer cette équation, en prenant, pour formule de transformation, la relation

$$y = \frac{x'}{x''}.$$

On remarquera, d'une façon générale, que dans cette transformation, l'équation obtenue $F(y) = 0$ ne peut pas avoir la racine $\frac{x'}{x''}$, sans admettre aussi, pour racine, la quantité inverse $\frac{x''}{x'}$. Nous nous occuperons, dans la prochaine leçon, de ces équations remarquables, équations que nous nommerons *réciproques* et qui jouissent de la propriété d'admettre simultanément les racines x et $\frac{1}{x}$. Pour le moment, nous voulons seulement faire remarquer qu'en posant

$$z = \frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'},$$

l'équation en z ne peut être que du troisième degré, si l'équation $f(x) = 0$, qu'on transforme, est elle-même du troisième degré. Généralement, le nombre des valeurs de z est $\frac{m(m-1)}{2}$, si $f(x) = 0$ est du degré m. On doit aussi observer, qu'après avoir calculé la transformée en z, on obtiendra la transformée en y en remplaçant, dans la première, z par $y + \frac{1}{y}$.

Appliquons cette remarque à l'équation (1), et cherchons d'abord la transformée en z.

On a

$$y = \frac{x'^2 + x''^2}{x'x''}.$$

En désignant par x la troisième racine, et en tenant compte des relations

$$x = -x' - x'';$$

$$x'x'' = -\frac{q}{x}.$$

on obtient

$$z = -\frac{x^3 + 2q}{q},$$

ou encore

$$z = \frac{px - q}{q}.$$

De cette formule de transformation on déduit

$$x = \frac{q(z+1)}{p},$$

l'équation en z est donc

$$z^3 + 3z^2 + \left(3 + \frac{p^3}{q^2}\right)z + \frac{2p^3}{q^2} + 1 = 0.$$

La transformée en y s'obtient, comme nous l'avons remarqué tout à l'heure, en remplaçant z par $y + \frac{1}{y}$; cette transformée est

$$y^6 + 3y^5 + \frac{p^3 + 6q^2}{q^2}y^4 + \frac{2p^3 + 7q^2}{q^2}y^3 + \frac{p^3 + 6q^2}{q^2}y^2 + 3y + 1 = 0.$$

EXERCICES

1. *Démontrer que si l'on considère l'équation générale du troisième degré,*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

l'équation aux carrés des différences est

$$y^3 - 2(p^2 - 3q)y^2 + (p^2 - 3q)^2 y + 4q^3 + 27r^2 + p(4p^2r - 18qr - pq^2) = 0\,;$$

et vérifier que les deux inégalités

$$p^2 - 3q > 0,$$
$$4q^3 + 27r^2 + p(4p^2r - 18qr - pq^2) > 0,$$

rentrent l'une dans l'autre.

2. *Transformer l'équation*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

par la formule

$$y = a^2 - bc\,;$$

a, b, c, désignant les trois racines de l'équation proposée.

Déduire, du résultat obtenu, la résolution de l'équation du troisième degré, dans le cas particulier où l'une des racines est moyenne géométrique entre les deux autres.

On trouvera d'abord que la transformation est homographique et qu'elle correspond à la formule

$$y = -(px + q).$$

Le résultat est

$$y^3 - y^2(p^2 - 3q) - q(p^2 - 3q)y + q^3 - p^3r = 0.$$

3. *Transformer l'équation générale du troisième degré par la formule*

$$y = a^2 + bc.$$

Les notations précédentes étant conservées, on trouve

$$y^3 - y^2(p^2 - q) - y(q^2 - 6pr + p^2q) - q^3 + 6pqr - p^3r + 8r^2 = 0.$$

4. *On donne l'équation*

$$x^3 + px + q = 0,$$

et, en désignant par a, b, c ses trois racines, on propose de la transformer par la formule

$$y^2 - aby + c = 0.$$

On remarque d'abord que l'équation cherchée est

$$\left(y^2 + \frac{qy}{a} + a\right)\left(y^2 + \frac{qy}{b} + b\right)\left(y^2 + \frac{qy}{c} + c\right) = 0.$$

En développant ce produit, et en tenant compte des relations connues entre les coefficients et les racines, on trouve

$$y^6 - py^5 - q(q+3)y^3 + p(2q+1)y^2 - p^2y - q = 0.$$

5. *Transformer l'équation*

$$x^3 + px + q = 0,$$

par la formule

$$y = a^2b + b^2c + c^2a\,;$$

a, b, c, désignant les trois racines de l'équation proposée (Todhunter).

On peut résoudre cette question en remarquant que y admet seulement deux valeurs : en appelant celles-ci y' et y'' on observe que $y' + y''$ et $y'\,y''$ sont des fonctions symétriques des lettres a, b, c.

Le résultat est

$$y^2 + 2p^2y + p^4 - pq^2 - 4q^3 = 0.$$

6. *Transformer l'équation*

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0$$

par la formule

$$y^2 - a^2y + a = 0$$

a étant une racine quelconque de l'équation (1).

L'équation cherchée est

$$(y^2 - a^2y + a)(y^2 - b^2y + b)(y^2 - c^2y + c) = 0.$$

On trouve finalement

$$y^6 + 2py^5 + p^2y^4 - q(q+3)y^3 + p(1-q)y^2 - q = 0.$$

7. *Transformer, au moyen d'un déterminant, l'équation $f(x)=0$; la formule de transformation étant $y=x^p$, et p désignant un nombre entier.*

On remarquera que l'on a

$$x^{p+1}=xy,\quad x^{p+2}=x^2y,\quad \ldots\quad x^{2p-1}=x^{p-1}y;$$

et, de même

$$x^{2p}=y^2\quad x^{2p+1}=xy^2,\quad \ldots\quad x^{3p-1}=x^{p-1}y^2;$$

et ainsi de suite. On applique ces formules aux équations

$$f(x)=0,\quad xf(x)=0,\quad \ldots\quad x^{p-1}f(x)=0;$$

et après avoir posé $x^0=X_0, x^1=X_1, \ldots x^{p-1}=X_{p-1}$, on a finalement des équations linéaires et homogènes.

8. *Transformer l'équation*

$$(1)\quad x^3+px^2+qx+r=0,$$

par la formule

$$y=a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};$$

a, b, c, désignant les trois racines de (1)

On trouve

$$r^2y^3+ry^2(2q+rp)+y(3r^2+r^2q+pqr+rp+q^2)$$
$$+(r+p)(r^2+rp+q)-r=0.$$

9. *Transformer l'équation*

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

par la formule

$$y=x+\frac{1}{x}.$$

Le résultat est

$$ry^3+y^2(q+pr)+y(p-3r+pq+rq)+(p-r)^2+(q-1)^2=0.$$

On peut déduire de cette équation diverses conséquences; parmi elles, nous signalerons l'identité suivante :

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=(a+b+c-abc)^2+(ab+ac+bc-1)^2.$$

10. *Qu'arrive-t-il pour l'équation aux quotients deux à deux, quand la proposée a une racine double?*

Si $f(x) = 0$ a deux racines égales x', x'' ; les quotients $\frac{x'}{x''}$ et $\frac{x''}{x'}$ deviennent égaux à l'unité ; la transformée aux quotients deux à deux a donc deux racines égales à l'unité.

Si dans les équations en z et en y (§ 426), on fait $y = 1$ ou $z = 2$ on trouve

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

C'est bien la condition trouvée plus haut (§ 424) pour exprimer que l'équation $x^3 + px + q = 0$ a une racine double.

Généralement, si l'équation $f(x) = 0$, a μ racines égales, la transformée aux quotients a $\mu(\mu - 1)$ racines égales à l'unité.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON

ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS

427. Définition. Lorsque le premier membre d'une équation $f(x) = 0$, peut être décomposé identiquement en facteurs rationnels, de telle sorte que l'on ait

$$(1) \quad f(x) = \varphi(x)\,\psi(x)\ldots\chi(x),$$

la résolution de cette équation est ramenée à celle des équations d'un degré plus simple,

$$(2) \quad \varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0, \ldots \chi(x) = 0.$$

Nous exprimerons ce fait en disant qu'on a abaissé l'équation donnée.

Cet abaissement des équations se produit dans plusieurs circonstances et notamment, comme nous allons le reconnaître, quand il existe entre les racines de l'équation proposée, une, ou plusieurs relations connues.

Les équations (2) ont des degrés respectifs $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ qui vérifient la relation

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = m,$$

m désignant le degré de l'équation donnée. Ces nombres, $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ définissent l'abaissement dont cette équation est susceptible.

428. Théorème. *Lorsque deux racines particulières x', x'' de l'équation $f(x) = 0$ du degré m, vérifient la relation $\mu(x', x'') = 0$; l'équation peut être abaissée ; sa résolution étant*

ramenée à celles de deux équations du premier degré, d'une part; et à celle d'une équation du degré $(m-2)$, *d'autre part.*

Nous supposons que les trois relations

$$(1)\quad f(x') = 0, \quad (2)\quad f(x'') = 0, \quad (3)\quad \mu(x', x'') = 0;$$

sont vérifiées; on peut dire d'après cela que les deux équations

$$f(x) = 0, \quad \mu(x, x'') = 0.$$

ont une solution commune, $x = x'$: par suite le résultant de ces équations est nul.

Soit $R(x'')$, ce résultant : les deux équations

$$f(x) = 0, \quad R(x) = 0,$$

ont une solution commune, $x = x''$. Il existe donc un polynôme $D(x)$ divisant exactement $f(x)$ et $R(x)$. Ce diviseur commun étant calculé par la méthode connue (§ 396), en désignant par $Q(x)$ le quotient $\frac{f(x)}{D(x)}$, on a

$$f(x) = D(x)\, Q(x).$$

Nous avons ainsi établi que l'équation proposée est susceptible d'abaissement; mais il nous reste à définir cet abaissement.

Nous supposons que la relation (3) n'est vérifiée *que par deux racines particulières*. Il résulte de cette hypothèse que si l'on suppose que x'' est un nombre donné il n'y a qu'*un seul nombre* x' vérifiant les égalités (1), (2) et (3). Le raisonnement précédent et les calculs que nous avons indiqués conduisent donc à un polynôme $D(x)$ *du premier degré.*

D'ailleurs les équations

$$R(x) = 0, \quad Q(x) = 0,$$

admettent une racine commune $x = x''$; les polynômes $R(x)$, $Q(x)$, admettent donc un diviseur commun $E(x)$, et l'on peut poser

$$Q(x) = E(x)\, Q_1(x).$$

On voit, en raisonnant comme nous l'avons fait tout à l'heure, que $E(x)$ est nécesairement du premier degré en x et l'on a finalement

$$f(x) = D(x)\,E(x)\,Q_1(x):$$

$D(x)$ et $E(x)$ sont du premier degré, par suite $Q_1(x)$ du degré $(m-2)$.

429. Remarque I. Si la relation $\mu(x'x'') = 0$ est symétrique par rapport aux lettres x' et x'', l'équation qui fournit x' doit donner aussi x''. Dans ce cas particulier, l'abaissement obtenu par la méthode précédente est défini par deux équations rationnelles dont les degrés sont 2 et $(m-2)$.

430. Remarque II. Lorsque la relation $\varphi(x', x'') = 0$ est vérifiée pour p groupes de racines combinées convenablement deux à deux, le raisonnement que nous venons de faire conduit aux conclusions suivantes :

1° Si $\mu(x', x'')$ n'est pas une fonction symétrique des lettres x', x'', l'abaissement est défini par deux équations du degré p et une troisième équation du degré $m-2p$.

2° Si $\mu(x', x'')$ est une fonction symétrique des lettres $x'x''$, l'abaissement est défini par deux équations seulement; l'une du degré $2p$, l'autre du degré $m-2p$.

De cette dernière remarque on conclut qu'il n'y a pas abaissement effectif, dans le cas où la relation $\mu(x', x'') = 0$ est symétrique, et a lieu pour p groupes de racines, associées deux à deux; l'équation proposée étant du degré $2p$.

431. Théorème. *Si trois racines particulières x', x'', x''' d'une équation du degré m, $f(x) = 0$, vérifient la relation $\mu(x', x'', x''') = 0$, on peut abaisser l'équation; les abaissements étant, généralement, définis par les tableaux suivants :*

$$(1, 1, 1, m-3), \text{ ou } (1.\ 2,\ m-3). \text{ ou enfin } (3, m-3).$$

On a, par hypothèse,

$$(1)\ f(x') = 0, \quad (2)\ f(x'') = 0, \quad (3)\ f(x''') = 0, \quad (4)\ \mu(x', x'', x''') = 0.$$

Éliminons x' et x'' entre les équations (1), (2) et (4). On

obtient, entre les coefficients donnés et la racine x''' une relation que nous désignerons par $R(x''') = 0$.

Considérons maintenant les deux équations

$$f(x) = 0, \quad R(x) = 0\,;$$

elles admettent une racine commune $x = x'''$: par suite, les deux polynômes $f(x)$ et $R(x)$ admettent un diviseur commun $D(x)$ et l'on a

$$f(x) = D(x)\,Q(x).$$

$D(x)$ est, généralement, un polynôme du premier degré, si la forme $\mu(x', x'', x''')$ n'admet aucune symétrie, comme nous le supposerons d'abord. Dans cette hypothèse on peut trouver deux autres facteurs rationnels du premier degré au polynôme $f(x)$, en cherchant le plus grand commun diviseur des polynômes

$$f(x), \quad \text{et} \quad Q(x).$$

On remarquera d'ailleurs que l'on a les relations

$$f(x') = 0, \quad Q(x') = 0\,;$$

et aussi les suivantes

$$f(x'') = 0, \quad Q(x'') = 0.$$

D'après cela il existe aux polynômes $f(x)$ et $Q(x)$ un diviseur commun qui est, généralement, du second degré. Ce diviseur est d'ailleurs décomposable en facteurs rationnels du premier degré, puisque les racines x', x'' peuvent être obtenues, comme la racine x''', par des équations rationnelles du premier degré. Dans ce cas, l'abaissement est défini par les nombres 1, 1, 1 et $(m-3)$.

Lorsque la forme $\mu(x', x'', x''')$ est symétrique par rapport aux lettres x' et x'', l'équation du second degré, dont nous parlons ici, ne sera plus, en général, décomposable en facteurs rationnels, et l'abaissement est défini par les nombres 1, 2 et $(m-2)$.

Enfin si la forme $\varphi(x', x'', x''')$ est symétrique par rapport aux trois lettres x', x'', x'''; le calcul indiqué conduit, généralement, à une équation de troisième degré dont les racines sont, précisément, les nombres x', x'' et x'''. Dans cette hypothèse, l'abaissement est défini par les nombres 3 et $(m-3)$.

ÉQUATIONS RÉCIPROQUES

132. Définition des équations réciproques. On peut encore abaisser une équation lorsque, comme dans les cas que nous allons examiner, les coefficients de cette équation présentent certaines particularités. Nous avons déjà donné (leçon 13) des exemples de cette sorte d'abaissement lorsque nous avons ramené la résolution d'une équation du quatrième degré, à celles d'équation du second degré. Nous avons cité, à ce propos, les équations réciproques du quatrième degré comme étant des équations quadratiques. Nous revenons ici sur ce sujet pour examiner maintenant les équations réciproques d'un degré quelconque : nous définirons d'abord ces équations remarquables. Soit $f(x) = 0$, l'équation proposée; nous supposerons, dans ce qui va suivre, que $+1$ et -1 ne sont pas des racines de cette équation; s'il en était autrement, si l'on avait $f(1) = 0$, ou $f(-1) = 0$, on commencerait par débarrasser $f(x)$ des facteurs $(x-1)$ ou $(x+1)$, qui seraient diviseurs de ce polynôme.

Cette réserve étant faite, nous nommerons *équation réciproque celle qui a les mêmes racines que l'équation aux inverses.*

Les deux équations

$$f(x) = 0, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

ayant les mêmes racines, m étant le degré de $f(x)$, on doit donc avoir

$$(1) \quad f(x) = \lambda x^m f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nous ferons d'ailleurs remarquer que l'on a $\lambda = 1$. En effet l'identité précédente donne pour $x = 1$, l'égalité

$$f(1) = \lambda f(1)$$

et comme l'on suppose $f(1) \neq 0$, on a bien $\lambda = 1$.

433. Théorème. *Le degré d'une équation réciproque est toujours un nombre pair.*

L'identité (1) donne

$$f(-1) = \lambda(-1)^m f(-1)$$

ou

$$1 = \lambda(-1)^m.$$

Mais on a prouvé que λ était égal à l'unité ; cette égalité montre donc que m est un nombre pair.

434. Théorème. *Dans une équation réciproque les coefficients, également éloignés des extrêmes, sont égaux et ont le même signe.*

En effet si nous posons

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m ;$$

on a

$$x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = A_m x^m + A_{m-1} x + \ldots + A_1 x + A_0.$$

Nous venons, d'ailleurs, d'établir l'identité

$$f(x) = x^m f\left(\frac{1}{x}\right)$$

nous avons donc

$$A_0 = A_m, \quad A_1 = A_{m-1}, \text{ etc...}$$

La réciproque est évidemment vraie ; de l'identité

$$f(x) = A_0 x^{2q} + A_1 x^{2q-1} + \ldots + A_q x^q + \ldots + A_1 x + A_0$$

on déduit

$$f(x) = x^{2q} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

435. Théorème. *Dans une équation réciproque, les racines sont, deux à deux, inverses l'une de l'autre.*

Si $f(x) = 0$ désigne une équation réciproque, on a

$$(1) \quad f(x) = x^p f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Soit α une des racines de l'équation $f(x) = 0$, l'identité (1) donne

$$f(\alpha) = \alpha^p f\left(\frac{1}{\alpha}\right);$$

mais on suppose

$$f(\alpha) = 0,$$

on a donc

$$\alpha^p f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0,$$

ou encore

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0.$$

Ainsi $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de l'équation proposée.

436. Théorème. *Une équation réciproque, du degré, $2q$ est susceptible d'abaissement ; sa résolution pouvant être ramenée à la résolution simultanée d'une équation du degré q, et de q équations du second degré.*

L'équation proposée est

$$A_0 x^{2q} + A_1 x^{2q-1} + \ldots + A_q x^q + \ldots + A_1 x + A_0 = 0,$$

ou

$$A_0\left(x^q + \frac{1}{x^q}\right) + A_1\left(x^{q-1} + \frac{1}{x^{q-1}}\right) + \ldots + A_q = 0.$$

En posant

$$x + \frac{1}{x} = y, \text{ et } x^p + \frac{1}{x^p} = V_p$$

on a

$$(1)\quad A_0V_q + A_1V_{q-1} + \dots + A_q = 0.$$

Nous avons vu (§ 146) que V_p pouvait s'exprimer au moyen d'une fonction entière en y, du degré p. L'équation précédente sera, d'après cela, du degré q en y; soient $y_1, y_2, \dots y_q$ ses q racines. La résolution de l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à celle de l'équation (1), et des q équations du second degré

$$x^2 - y_1x + 1 = 0$$
$$x^2 - y_2x + 1 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x^2 - y_qx + 1 = 0.$$

437. Équations réciproques (*Sens général*). Les équations qui viennent de nous occuper peuvent être considérées comme un cas particulier de l'équation suivante :

$$(1)\quad A_0x^{2q} + A_1x^{2q-1} + \dots + A_qx^q + kA_{q-1}x^{q-1} + k^2A_{q-2}x^{q-2} + \dots + k^{q-1}A_1x + k^qA_0 = 0.$$

Cette équation présente la particularité de rester identique à elle-même quand on change x en $\frac{k}{x}$. En supposant $k = 1$, on a une équation réciproque, dans le sens ordinaire du mot.

L'équation (1) est susceptible du même genre d'abaissement que l'équation réciproque ordinaire.

Écrivons-la sous la forme suivante :

$$A_0\left(x^q + \frac{k^q}{x^q}\right) + A_1\left(x^{q-1} + \frac{k^{q-1}}{x^{q-1}}\right) + \dots + A_q = 0,$$

puis posons

$$x + \frac{k}{x} = y, \quad \text{et} \quad x^p + \frac{k^p}{x^p} = W_p.$$

Entre les trois fonctions W_p, W_{p-1}, W_{p-2} existe une relation

de récurrence, et l'on vérifie immédiatement l'identité

$$W_p - yW_{p-1} + kW_{p-2} = 0.$$

Cette relation permet de calculer, de proche en proche, les fonctions $W_1, W_2, \ldots$; sachant que $W_0 = 2$ et que $W_1 = y$; elle montre aussi que W_p est une fonction entière de y, du degré p.

De ces remarques diverses, il résulte que les équations réciproques, dans le sens général que nous attribuons ici à ce mot, se traitent comme les équations réciproques ordinaires et sont susceptibles du même genre d'abaissement.

438. Remarque I. Les équations réciproques (sens général) peuvent être définies par l'identité

$$(1) \quad f(x) = \lambda x^{2q} f\left(\frac{k}{x}\right).$$

On détermine λ en remplaçant x par $\sqrt{k}$, ce nombre $\sqrt{k}$, n'étant pas, on le suppose du moins, racine de l'équation $f(x) = 0$; celle-ci ayant été, au besoin, débarrassée des facteurs $(x^2 - k)$. On trouve ainsi

$$f(\sqrt{k}) = \lambda k^q f(\sqrt{k})$$

ou

$$\lambda = \frac{1}{k^q}.$$

L'identité (1) devient alors

$$f(x) = \frac{x^{2q}}{k^q} f\left(\frac{k}{x}\right).$$

Il résulte de cette identité, que si x' est racine de l'équation $f(x) = 0$, $\frac{k}{x'}$ est aussi racine de cette équation.

On peut, d'après cette remarque, ramener les équations réciproques (sens général), aux équations réciproques (sens ordinaire). Il suffit de remplacer x par $\frac{x}{\sqrt{k}}$.

439. Remarque II. On peut encore abaisser l'équation $f(x)=0$ lorsque ses racines se séparent, deux à deux; les racines de chacun de ces groupes vérifiant une relation homographique en involution.

Soient x' et x'' les racines d'un groupe; supposons que, A et B étant des constantes données, on ait

$$x'x'' + A(x' + x'') + B = 0,$$

ou

$$(x' + A)(x'' + A) = A^2 - B.$$

Nous supposerons $A^2 - B$, différent de zéro; car si l'on avait $A^2 - B = 0$, $-A$ serait racine de l'équation proposée et l'on débarrasserait celle-ci des facteurs $(x + A)$, autant de fois que la division par $(x + A)$, serait possible.

Supposons donc $A^2 - B \gtrless 0$, et soit $A^2 - B = k$. En posant $\frac{x + A}{\sqrt{k}} = X$, l'équation, transformée par cette formule, sera réciproque.

440. Remarque III. Nous avons supposé dans le paragraphe précédent que la relation homographique renfermait nécessairement le terme en $x'x''$; il nous reste à examiner le cas particulier où l'équation homographique est privée de ce terme et affecte la forme

$$x' + x'' + \frac{B}{A} = 0.$$

On remarquera que cette relation peut s'écrire

$$\left(x' + \frac{B}{2A}\right) + \left(x'' + \frac{B}{2A}\right) = 0,$$

et en transformant l'équation proposée $f(x)=0$, par la formule

$$x+\frac{B}{2A}=X,$$

l'équation transformée aura ses racines, deux à deux, égales et de signes contraires. En posant $X^2=y$ on aura donc finalement, une équation en y du degré q; si $f(x)$ est un polynôme du degré $2q$.

441. Équations binômes. Les équations binômes, telles que

$$x^m-1=0$$

peuvent se résoudre, complètement, par le moyen des tables trigonométriques. Nous ne voulons ici que signaler l'abaissement dont elles sont susceptibles quand on cherche à les résoudre par des signes algébriques.

Si l'on suppose que m soit pair, et égal à $2q$, l'identité

$$x^{2q}-1=(x^q-1)(x^q+1)$$

ramène la résolution de l'équation proposée, à celle de deux équations du degré q.

Si m est impair, et égal à $2q+1$, on remarquera que l'on a

$$x^{2q+1}-1=(x-1)(x^{2q}+x^{2q-1}+\ldots+x+1).$$

On doit alors résoudre l'équation

$$x^{2q}+x^{2q-1}+\ldots x+1=0$$

qui est réciproque : elle peut, comme nous l'avons vu, être résolue au moyen d'une équation du degré q, et de q équations du second degré.

442. Racines cubiques de l'unité. On appelle ainsi un nombre réel ou imaginaire dont le cube est égal à l'unité. En

désignant ce nombre par x, il est déterminé par l'équation

$$(1) \quad x^3 - 1 = 0.$$

Cette équation binôme a trois racines qui jouissent d'une propriété remarquable qui nous servira plus tard, quand nous traiterons de la résolution des équations du troisième degré, et que nous voulons signaler ici. La propriété en question peut se formuler ainsi : *les trois racines cubiques de l'unité sont trois termes consécutifs d'une progression géométrique, le premier de ces termes étant égal à l'unité.*

En effet, l'équation (1) peut s'écrire

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

On obtient d'abord la racine $x_1 = 1$, et les deux autres racines x_2. x_3 sont données par l'equation

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

On a donc

$$x_2 x_3 = 1,$$

ou

$$x_3 = \frac{1}{x_2} = \frac{(x_2)^2}{(x_2)^3},$$

ou $x_3 = (x_2)^2$, en tenant compte de l'hypothèse $(x_2)^3 = 1$.

Nous représenterons, d'après cette remarque, par $1, j, j^2$: les trois racines cubiques de l'unité.

EXERCICES

1. *Résoudre une équation du troisième degré sachant que, parmi ses racines, il y en a deux qui sont égales et de signes contraires.*

Soit

$$f(x) = Ax^3 + Bx^3 + Cx^2 + D = 0,$$

l'équation proposée ; on cherche d'abord la condition que doivent vérifier les coefficients pour que les nombres α et $-\alpha$ soient, l'un et l'autre, racines de cette équation. On trouve ainsi

$$AD = BC,$$

et l'on a, finalement,

$$f(x) = (Ax + B)\left(x^2 + \frac{C}{A}\right).$$

2. *Résoudre une équation du troisième degré, sachant que l'une des racines est moyenne géométrique entre les deux autres.*

L'équation étant

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

on trouve la condition suivante $q^3 = p^3 r$, et l'on a

$$f(x) = \left(x + \frac{q}{p}\right)\left[x^2 + x\left(p - \frac{q}{p}\right) + \frac{q^2}{p^2}\right] = 0.$$

3. *Exprimer que dans l'équation générale du quatrième degré il y a deux racines particulières égales et de signes contraires et, dans cette hypothèse, résoudre l'équation.*

L'équation étant

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

On trouve, pour la condition cherchée,

$$r^2 - pqr + p^2 s = 0.$$

On suppose $p \neq 0$ et l'on tire s, de cette relation. L'équation peut alors s'écrire

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x + \frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{px}{2} + \frac{q}{2} - \frac{r}{p}\right)^2.$$

4. *Exprimer que l'équation*

$$x^4 + mx^2 + nx + h = 0$$

a deux racines particulières, dont la somme est égale au produit des deux autres racines.

Soient a, b, c, d les quatre racines : on suppose que l'on a

$$a + b = cd,$$

la somme des quatre racines étant nulle, on a

$$cd + c + d = 0, \quad \text{ou}, \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + 1 = 0.$$

On peut poser $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$; la transformée en y est une équation du quatrième degré ayant deux racines égales et de signes contraires. On peut donc résoudre celle-ci, en suivant la marche indiquée dans l'exercice précédent.

5. *Démontrer que si m est un nombre premier, les m racines de l'équation*

$$(1) \quad x^m - 1 = 0,$$

sont

$$(2) \quad 1, \quad \alpha, \quad \alpha^2, \ldots \alpha^{m-1};$$

α étant une expression imaginaire dont la puissance $m^{ième}$ est égale à 1.

On voit d'abord, sans difficulté, que les m termes de la suite (2) sont des racines de (1) : on reconnaît que ces expressions sont différentes, de la manière suivante.

Soit $h < k < m$; je dis que l'on ne peut pas avoir

$$(3) \quad \alpha^k = \alpha^h.$$

Posons $k = h + \theta$, l'égalité précédente devient

$$(4) \quad \alpha^\theta = 1.$$

Puisque θ est inférieur à m, θ est premier avec m, et l'on a

$$mx - \theta y = \pm 1,$$

x et y étant entiers. Adoptons le signe $+$: l'égalité (4) donne $\alpha^{\theta y} = 1$, et, par suite, $\alpha^{\theta y + 1} = \alpha$, ou $\alpha^{mr} = \alpha$. Mais on a $\alpha^m = 1$, par conséquent $\alpha^{mr} = 1$. On aurait donc $\alpha = 1$, ce qu'on ne suppose pas. En prenant le signe $-$, on est conduit à l'égalité $\frac{1}{\alpha} = 1$, qui donne encore $\alpha = 1$.

TRENTE-TROISIÈME LEÇON

LIMITES DES RACINES

443. Définition des limites. Soit A et B, A étant plus grand que B, deux nombres positifs et tels que toutes les racines positives de l'équation $f(x) = 0$ soient comprises entre A et B; nous dirons que A est *une limite supérieure*, et B, *une limite inférieure* des racines positives de cette équation.

Imaginons, de même, deux nombres négatifs A′ et B′, A′ étant moindre que B′ en valeur absolue; si toutes les racines négatives de l'équation $f(x) = 0$ sont comprises dans l'intervalle A′, B′; nous dirons que A′ est une limite supérieure, et B′ une limite inférieure des racines négatives de cette équation.

Remarque. *La recherche des nombres* A, B; A′, B′ *peut être ramenée à celle d'une limite supérieure des racines positives.*

Soit $f(x) = 0$, l'équation proposée et α une limite supérieure des racines positives de l'équation $x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$; $\frac{1}{\alpha}$ est évidemment une limite inférieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$.

De même, si l'on considère l'équation $f(-x) = 0$ et si toutes les racines positives de cette équation sont comprises entre les nombres μ et ν; toutes les racines négatives de la proposée seront renfermées dans l'intervalle $(-\mu, -\nu)$.

Le problème que nous nous sommes posé et qui visait la recherche des quatre nombres A, B, A′, B′; se trouve, par ces considérations, ramené à cette question unique : *déterminer une limite supérieure des racines positives d'une équation donnée.*

Les différentes méthodes que nous allons exposer, à l'exception pourtant de celle de Newton, reposent sur le théorème suivant; théorème qui constitue comme un principe fondamental dans la recherche qui nous occupe.

444. Théorème. *Si une fonction entière $f(x)$, dont le premier terme a un coefficient positif, est ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x, et si elle ne présente qu'une variation ; cette fonction est croissante, pour toutes les valeurs positives de x.*

Soit une fonction entière $f(x)$,

$$f(x) = Ax^m + \dots + Bx^n - Cx^p \dots - Dx^q,$$

$f(x)$ est, par hypothèse, un polynôme ordonné, ne présentant qu'une variation, variation qui a été mise en évidence; les quantités A, ... B; ... C, ... D étant supposées positives.

On a

$$f(x) = x^n\left(Ax^{m-n} + \dots + B - \frac{C}{x^{n-p}} \dots - \frac{D}{x^{n-q}}\right).$$

La fonction x^n est croissante pour toute valeur positive de x; d'ailleurs les quantités Ax^{m-n}, ... B, pour le même motif, sont croissantes; exception faite de B, qui est une constante. Enfin, les fractions $\frac{C}{x^{n-p}}$, ... $\frac{D}{x^{n-p}}$ diminuent, quand x croît. Pour ces raisons diverses $f(x)$ est une fonction croissante, pour toute valeur positive de x.

Il résulte évidemment de cette propriété que si l'on suppose : 1°, $f(\alpha) > 0$; 2°, $\beta > \alpha$; on a aussi $f(\beta) > 0$.

445. Méthode par groupements. Une fonction entière $f(x)$, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x, peut toujours être écrite sous la forme

$$f(x) = (P_1 - Q_1) + (P_2 - Q_2) + \dots + (P_h - Q_h);$$

chacune des parenthèses ne présentant qu'une variation.

On doit d'ailleurs observer que la dernière de ces parenthèses peut ne présenter que des termes positifs et se réduire à l'expression P_h, dans le cas où le dernier terme de $f(x)$ est positif.

Ceci posé, soit α, un nombre qui, substitué à x, dans chacune des fonctions

$$P_1 - Q_1, \quad P_2 - Q_2, \ldots P_h - Q_h;$$

donne des résultats positifs, ces fonctions étant croissantes (§ 444), si l'on suppose $f(x) > 0$, on a $f(x) > 0$, pour toutes les valeurs de x plus grandes que α. Ainsi α est une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$.

448. Méthode par groupements irréguliers. Le raisonnement que nous venons de faire n'exige nullement que les groupes considérés aient été obtenus par la méthode de groupement que nous avons indiquée.

Si, en cherchant à généraliser la règle que nous venons de donner, on suppose que l'on ait

$$f(x) = U_x + V_x + \ldots + W_x$$

et si, pour $x = \alpha$, on peut reconnaître que les fonctions U_x, V_x, W_x; sont croissantes; α est, évidemment, une limite des racines [1].

Il résulte de cette observation, qu'au lieu de grouper dans leur ordre naturel, les termes de l'équation ordonnée, on pourra les associer dans un ordre différent, chacun des groupes commençant par un terme positif.

Cette remarque a une certaine importance; elle permet quelquefois, comme nous le montrerons tout à l'heure sur un exemple particulier, de trouver une limite plus avantageuse que celles qui sont fournies par les autres méthodes.

1. Il sera sous-entendu, dans la suite de cette leçon, que le mot *limite*, désigne, explicitement, une limite supérieure des racines positives: nous supposerons aussi que cette limite est un nombre plus grand que l'unité.

447. Théorème. *Le nombre α déterminé par la méthode par groupements est une limite pour les équations dérivées.*

En posant

$$f(x) = (P_1 - Q_1) + (P_2 - Q_2) + \dots + (P_h - Q_h)$$

on a

$$f'(x) = (P'_1 - Q'_1) + (P'_2 - Q'_2) + \dots + (P'_h - Q'_h).$$

La fonction $(P_1 - Q_1)$ est croissante, pour $x = \alpha$; sa dérivée $(P'_1 - Q'_1)$ est donc positive, pour cette valeur de x.

D'ailleurs la forme $(P'_1 - Q'_1)$ n'offrant qu'une variation, cette fonction est croissante, pour $x = \alpha$. Ainsi $f'(x)$ est une fonction positive, et croissante, pour cette valeur de x.

Cette démonstration s'étend, comme on le voit, aux équations $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$, etc...

448. Règle de Mac-Laurin. *Lorsque le premier coefficient* A_0, *d'une équation* $f(x) = 0$, *est un nombre positif,* $1 + \frac{N}{A_0}$ *est une limite des racines ;* N *désignant la valeur absolue du plus grand coefficient négatif.*

Soit

$$(A) \quad f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m;$$

l'équation proposée ; posons

$$\varphi(x) = A_0x^m - N(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1).$$

Nous allons chercher à déterminer un nombre positif x', vérifiant l'inégalité $\varphi(x') > 0$, mais nous établirons d'abord que ce nombre est une limite.

On a

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

en posant,

$$\psi(x) = (A_1 + N)x^{m-1} + \dots + (A_m + N)$$

les coefficients $A_1 + N, \dots A_m + N$ sont nuls ou positifs, puisque N désigne le plus grand coefficient négatif, changé de

signe. Ainsi, on a $f(x') > \varphi(x')$. Si l'on observe maintenant que $\varphi(x)$ n'a qu'une variation, on reconnait que $\varphi(x)$, est, pour $x = x'$, une fonction positive et croissante (§ 444), si l'on a $\varphi(x') > 0$. D'après cela, $f(x)$ représentant identiquement la somme de deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, qui sont, l'une et l'autre, positives et croissantes, pour $x = x'$, $f(x)$ est elle-même, pour cette valeur de x, une fonction positive et croissante.

Cherchons donc à résoudre l'inégalité

$$(1) \quad \varphi(x) > 0,$$

pour une valeur de x supérieure à l'unité.

On doit donc avoir

$$A_0 x^m > N(x^{m-1} + \ldots + 1)$$

ou

$$A_0 x^m > N \frac{x^m - 1}{x - 1}$$

ou, encore

$$(2) \quad \frac{\frac{N}{A_0}}{x-1} \cdot \frac{x^m - 1}{x^m} < 1.$$

La fraction $\frac{x^m - 1}{x^m}$ est positive, et plus petite que l'unité : par suite si l'on pose

$$\frac{\frac{N}{A_0}}{x' - 1} = 1$$

ou

$$x' = 1 + \frac{N}{A_0},$$

l'inégalité (2) et, par suite l'inégalité (1) seront vérifiées, pour $x = x'$. Le nombre $1 + \frac{N}{A_0}$ est donc, d'après les explications

données tout à l'heure, une limite des racines de l'équation $f(x) = 0$; on peut même ajouter que la fonction $f(x)$, est croissante pour $x = x'$, et pour toutes les valeurs de x supérieures à x'.

449. Théorème. *Le nombre* $1 + \frac{N}{A_0}$ *donné par la règle de Mac-Laurin, est aussi une limite pour les équations dérivées.*

On a, en effet, d'après (A)

$$f'(x) = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}.$$

Soit N' la valeur absolue du plus grand coefficient négatif, du second membre. Le terme qui a pour coefficient N' provient nécessairement d'un terme négatif $-A_hx^{m-h+1}$, du polynôme $f(x)$.

On a donc,

$$N' = (m - h + 1)A_h,$$

et la règle de Mac-Laurin, appliquée à l'équation $f'(x) = 0$, donne une limite z,

$$z = 1 + \frac{m-h+1}{m} \cdot \frac{A_h}{A_0}.$$

Mais on a

$$N \geqslant A_h$$

par conséquent le nombre z est plus petit que $\left(1 + \frac{N}{A_0}\right)$, puisque l'on a $\frac{m-h+1}{m} < 1$. Ainsi $1 + \frac{N}{A_0}$ est une limite des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Cette remarque s'applique évidemment à l'équation $f''(x) = 0$ et, généralement, à toutes les équations dérivées.

450. Règle de Lagrange. *Si le premier coefficient négatif d'une équation $f(x) = 0$, ordonnée, et du degré m, appartient au terme dont l'exposant est égal à $(m-p)$, les notations*

précédentes étant conservées, le nombre $1+\sqrt[p]{\frac{N}{A_0}}$ *est une limite des racines de l'équation.*

Cette règle, due à Lagrange, donne une limite plus avantageuse que celle de Mac-Laurin, quand on suppose que le terme A_1x^{m-1} de l'équation proposée a un coefficient A_1, positif ou nul. La règle de Lagrange peut s'établir ainsi.

On a

$$f(x) \equiv [A_0x^m - N(x^{m-p} + \dots + x + 1)] + [A_1x^{m-1} + \dots + (N+A_p)x^{m-p} + \dots + (N+A_m)].$$

Les coefficients

$$A_1, \dots (N+A_p), \dots (N+A_m),$$

sont positifs ou nuls, et l'on voit, en raisonnant comme nous l'avons fait pour établir la règle de Mac-Laurin, que si l'on peut trouver un nombre x' vérifiant l'inégalité

$$(1) \quad A_0x^m > N(x^{m-p} + \dots + x + 1);$$

x' et tous les nombres supérieurs rendront la fonction $f(x)$ positive et croissante.

L'inégalité précédente peut s'écrire

$$A_0x^m > N\frac{x^{m-p+1}-1}{x-1},$$

ou encore, puisque $(x-1)$ est une quantité supposée positive,

$$A_0x^m(x-1) - Nx^{m-p+1} + N > 0,$$

ou, encore, sous une autre forme,

$$(2) \quad A_0(x-1)x^{p-1} - N + \frac{N}{x^{m-p+1}} > 0.$$

Remarquons maintenant que l'on a $x > x-1$ et, par suite, $x^{p-1} > (x-1)^{p-1}$; puisque $(x-1)$ désigne une quantité positive.

L'inégalité (2) peut d'ailleurs s'écrire,

$$A_0(x-1)[(x-1)^{p-1}+x^{p-1}-(x-1)^{p-1}]-N+\frac{N}{x^{m-p-1}}>0,$$

ou

$$(2)\quad [A_0(x-1)^p-N]+A_0(x-1)[x^{p-1}-(x-1)^{p-1}] + \frac{N}{x^{m-p+1}}>0.$$

On voit, d'après cela, que si l'on détermine x par l'équation

$$A_0(x-1)^p=N,$$

laquelle donne

$$x'=1+\sqrt[p]{\frac{N}{A_0}};$$

ce nombre x' vérifie l'inégalité (2) et, par suite, l'inégalité (1).

451. Théorème. *Le nombre* $1+\sqrt[p]{\frac{N}{A_0}}$ *donné par la règle de Lagrange, est une limite pour toutes les équations dérivées.*

On a, en effet,

$$f'(x)=mA_0x^{m-1}+\ldots-(m-p)A_px^{m-p-1}+\ldots+A_{m-1}.$$

Le premier coefficient négatif, dans le second membre, est $(m-p)A_p$ qui correspond au terme dont l'exposant est $m-p-1$. La règle de Lagrange, appliquée à l'équation $f'(x)=0$ donne une limite z,

$$z=1+\sqrt[p]{m-h\,\frac{A_h}{A_0}};$$

$(m-h)A_h$ représentant le plus grand coefficient négatif de l'équation $f'(x)=0$. On a d'ailleurs $A_h\leqslant N$ et comme l'inégalité $\frac{m-h}{m}<1$ est évidemment vérifiée, z est plus petit

que $1+\sqrt[p]{\frac{N}{A_0}}$. Puisque $f'(x)$ est une fonction positive et croissante pour $x=\alpha$, et pour toutes les valeurs de x supérieures à α, $1+\sqrt[p]{\frac{N}{A_0}}$ est donc aussi une limite de l'équation $f'(x)=0$.

La propriété s'étend évidemment aux autres équations dérivées : $f''(x)=0$, etc...

452. Méthode de Newton. Nous allons enfin exposer une dernière méthode ; cette méthode due à Newton repose sur le principe suivant :

Théorème. *Si $f(x)=0$ désigne une équation entière, et si un nombre α satisfait aux inégalités*

$$f(\alpha)>0, \quad f'(\alpha)>0, \quad \ldots \quad f^{(m-1)}(\alpha)>0;$$

α est une limite des racines de l'équation proposée.

La formule de Taylor (§ 308), donne

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+\frac{h}{1}f'(\alpha)+\ldots+\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}f^{m-1}(\alpha)+A_0h^m,$$

A_0 désignant, comme toujours, le premier coefficient du polynôme $f(x)$, coefficient qui est positif. Cette identité prouve que, dans l'hypothèse formulée plus haut, $f(\alpha+h)$ est plus grand que $f(\alpha)$, si l'on suppose h positif. La fonction $f(x)$ est donc croissante pour $x=\alpha$, et pour tous les nombres supérieurs à α.

Ceci posé, considérons la suite

$$U_1=f(x), \quad U_2=f'(x), \quad \ldots \quad U_m=f^{(m-1)}(x);$$

soit α_1 le plus petit nombre entier qui rende U_m nul ou positif. Substituons α_1 dans U_{m-1}, U_{m-2}, ... ; jusqu'à ce qu'on trouve une fonction U_{m-k} qui soit négative pour $x=\alpha_1$. Dans cette fonction, remplaçons x par α_1+1, α_1+2, ... ; jusqu'à ce qu'on obtienne un nombre α_2 qui donne à U_{m-k} une valeur positive ou nulle.

On doit remarquer ici qu'il résulte de ce qui précède 1° que $(\alpha_2 - 1)$ donne à U_{m-h} le signe —, 2° que α_2 donne le signe +, aux fonctions U_{m-h}, ... U_m; et ce dernier point résulte du théorème précédent, puisque les fonctions, $U_{m-h+1} \ldots U_m$, sont croissantes pour $x = \alpha_2$ et pour toutes les valeurs supérieures à α_2.

Après avoir déterminé α_2, comme nous venons de l'expliquer, on calculera successivement, d'une manière analogue, α_3, α_4, etc...; jusqu'à ce qu'on trouve enfin un nombre entier α, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *α rend positives les fonctions* U,

2° $(\alpha - 1)$ *ne jouit pas de cette propriété.*

Le nombre α, ainsi défini, est la limite que nous adopterons.

458. Exemple. Soit

$$x^6 + 7x^4 - 3x^3 + 2x - 100 = 0$$

l'équation proposée :

1° *Méthode par groupements*. On écrit l'équation sous la forme

$$(x^6 + 7x^4 - 3x^3) + 2(x - 50) = 0.$$

Première limite, $\alpha_1 = 50$.

2° *Méthode par groupements irréguliers*. Écrivons l'équation de la manière suivante :

$$(x^6 + 4x^4 - 100) + (3x^4 - 3x^3) + 2x = 0.$$

On trouve :

Deuxième limite, $\alpha_2 = 2$.

3° *Méthode de Mac-Laurin*. On a, dans l'exemple proposé $N = 100$ $A_0 = 1$.

Troisième limite, $\alpha_3 = 101$.

4° *Méthode de Lagrange*. Le premier terme négatif est $-3x^3$; la formule $1 + \sqrt[p]{\frac{N}{A_0}}$, donne ici, $1 + \sqrt[3]{100}$.

Quatrième limite, $x_4 = 6$.

5° *Méthode de Newton.* Nous formerons ici, pour appliquer cette méthode, le tableau suivant :

$$f(x) = x^6 + 7x^4 - 3x^3 + 2x - 100$$
$$f'(x) = 6x^5 + 28x^3 - 9x^2 + 2$$
$$\frac{f''(x)}{1.2} = 15x^4 + 42x^2 - 9x$$
$$\frac{f'''(x)}{1.2.3} = 12x^3 + 28x - 3$$
$$\frac{f^{\text{IV}}(x)}{1.2.3.4} = 9x^2 + 7.$$

Il est inutile, dans cet exemple, de calculer $f^{\text{V}}(x)$, puisque $f^{\text{IV}}(x)$ est constamment positif.

La valeur $x = 1$ donne le signe $+$ aux fonctions f''', f'', et f'; mais non à f; $x = 2$ donne le signe $+$ à f : concluons donc que la méthode de Newton donne :

cinquième limite, $x_5 = 2$.

La méthode de Newton donne lieu, en général, à des calculs plus compliqués que les autres méthodes exposées dans cette leçon ; mais elle offre certains avantages, comme le prouvent les considérations qui suivent.

454. Théorème. *Les limites données par les méthodes exposées plus haut* (exception faite de la méthode par groupements irréguliers) *sont supérieures, ou tout au moins égales, à celle qui est fournie par la méthode de Newton.*

Soit α la limite donnée par la méthode de Newton; α' une des limites qui ont été calculées par les méthodes que nous avons exposées. Nous avons montré que α', et tous les nombres supérieurs, donnaient le signe $+$, à la fonction proposée, et à toutes ses dérivées. Or α jouit de cette propriété, mais non $(\alpha - 1)$. Ainsi α' est un des nombres

$$\alpha, \quad \alpha + 1, \quad \alpha + 2, \ldots ;$$

il est donc au moins égal à α.

455. Théorème. *Lorsque l'équation $f(x)=0$, a toutes ses racines réelles, la méthode de Newton conduit à la meilleure limite.*

Nous nommons *meilleure limite* le nombre entier immédiatement supérieur à la plus grande racine positive.

Posons

$$x=y+h,$$

on a donc

$$f(y+h)=f(h)+yf'(h)+\frac{y^2}{2!}f''(h)+\ldots+\frac{y^m}{m!}f^{(m)}(h).$$

Dans cette identité, remplaçons h par α, ce nombre α étant la limite donnée par la méthode de Newton. Tous les coefficients de l'équation en y,

$$\frac{y^m}{m!}f^{(m)}(\alpha)+\ldots+yf'(\alpha)+f(\alpha)=0$$

sont positifs. Au contraire dans l'équation

$$(1)\quad \frac{y^m}{m!}f^{(m)}(\alpha-1)+\ldots+yf'(\alpha-1)+f(\alpha-1)=0,$$

un certain nombre de coefficients sont négatifs.

L'équation $f(x)=0$ ayant toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $f(y+h)=0$. Or nous verrons bientôt (leçon 36), qu'une équation qui a des variations, et dont toutes les racines sont réelles, admet nécessairement des racines positives.

L'équation (1) ayant des racines positives, une au moins, parmi les racines de l'équation $f(x)=0$ est supérieure à $(\alpha-1)$. Il n'y a donc pas de meilleure limite que ce nombre α donné par la méthode de Newton.

EXERCICES

1. *Soient $A_0, A_1, \ldots A_{p-1}$ les p premiers coefficients d'une équation, coefficients qui sont supposés positifs ; et soit A le plus grand coefficient négatif, pris en valeur absolue ; démontrer que α,*

$$\alpha = 1 + \frac{A}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{p-1}},$$

est une limite supérieure des racines.

Soit

$$f(x) = A_0 x^m + \ldots + A_{p-1} x^{m-p+1} - A_p x^{m-p} + \ldots + H = 0,$$

l'équation proposée ; on considère la fonction $\varphi(x)$,

$$\varphi(x) = (A_0 + A_1 + \ldots + A_{p-1}) x^{m-p+1} - A_p x^{m-p} + \ldots + H,$$

et on applique la règle de Mac-Laurin à cette équation.

2. *Les notations de l'exercice précédent étant maintenues A′ désignant la valeur absolue du plus grand coefficient négatif après A, démontrer que β.*

$$\beta = 1 + \frac{A + A'}{2A_0 + 2A_1 + \ldots + 2A_{p-2} + A_{p-1}},$$

est une limite supérieure des racines.

Il suffit de considérer l'équation $(x+1)f(x) = 0$ et de lui appliquer la règle précédente.

3. *Appliquer les différentes méthodes, pour trouver une limite supérieure des racines, à l'équation*

$$f(x) = x^5 + q^2 x^4 + q x^3 - q^3 x^2 + x - 1 = 0,$$

dans laquelle on suppose $q = 100$.

On trouve les résultats suivants:

1° Règle de Mac-Laurin ;

$$q^3 + 1 = 1000001.$$

2° Règle de Lagrange

$$\sqrt{q^3 + 1} = 101.$$

3° Celle de l'exercice (1) donne

$$x = \frac{q^3}{1 + q + q^2} + 1.$$

On a donc

$$x = q + \frac{1}{q^2 + q + 1}.$$

ou

$$x < q + 1 ; \qquad x = 101 \text{ est une limite.}$$

4° Celle de l'exercice (2)

$$\beta = 1 + \frac{1 + q^3}{2q^2 + q + 2} = \frac{q^3 + 2q^2 + q + 3}{2q^2 + q + 2}.$$

En effectuant la division indiquée on voit que

$$\beta < \frac{q}{2} + 1 ; \qquad \beta = 51 \text{ est une limite.}$$

5° La méthode par groupements et celle de Newton donnent 10 pour limite. Ce nombre est, dans le cas précédent, la meilleure limite, l'équation ayant une racine comprise entre 9 et 10.

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON

RACINES ET FACTEURS COMMENSURABLES.

Parmi les causes d'abaissement d'une équation donnée, nous signalerons encore la présence des facteurs commensurables.

Nous dirons qu'un polynôme homogène $\varphi(x,y)$, à coefficients commensurables, est un facteur commensurable du polynôme homogène $f(x,y)$, lorsque la division de $f(x,y)$ par $\varphi(x,y)$ peut se faire, sans donner de reste.

Nous nous occuperons d'abord du cas le plus simple, celui où l'on a

$$\varphi(x,y) = \alpha x + \beta y.$$

456. Théorème. *Si le premier membre de l'équation, à coefficients entiers,*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + \ldots + A_m y^m = 0,$$

admet le facteur commensurable $\alpha x + \beta y$ (α et β étant entiers): 1° α *est un diviseur de* A_0; 2° β *est un diviseur de* A_m.

On a, par hypothèse,

$$\text{(A)} \quad A_0 x^m + \ldots + A_m y^m = (\alpha x + \beta y)(P x^{m-1} + \ldots + Q y^{m-1}).$$

Dans cette identité (note A), P, ... Q; désignent des nombres entiers. On a, d'ailleurs, en égalant dans les deux membres les termes en x^m et en y^m,

$$A_0 = \alpha P, \qquad \text{et} \qquad A_m = \beta Q.$$

Ces égalités prouvent que les quotients $\frac{A_0}{\alpha}$, $\frac{A_m}{\beta}$, sont des nombres entiers.

457. Corollaire. *Quand le premier terme d'une équation en x, a pour coefficient l'unité, cette équation n'admet, pour racines commensurables, que des nombres entiers.*

En effet, si, dans l'identité (A), on suppose que l'on ait $y=1$ et $A_0=1$; l'égalité $A_0=\alpha P$, devient $1=\alpha P$: on a donc $\alpha=1$ et $P=1$.

D'après cela, le diviseur $\alpha x+\beta y$ se réduit à $x+\beta$, β étant un nombre entier.

458. Théorème. *On peut toujours ramener la recherche des racines commensurables, à celle des racines entières.*

Soit

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m=0,$$

l'équation donnée. Posons $x=\frac{X}{A_0}$, il vient alors

$$\frac{X^m}{A_0^{m-1}}+A_1\frac{X^{m-1}}{A_0^{m-1}}+\ldots+A_m=0,$$

ou

$$X^m+A_1X^{m-1}+\ldots+A_mA_0^{m-1}=0.$$

Dans cette équation les coefficients sont entiers et le premier d'entre eux est égal à l'unité. Nous venons de montrer, dans le paragraphe précédent, qu'une pareille équation ne pouvait admettre que des racines commensurables entières; le principe énoncé se trouve ainsi établi.

459. Remarque. La transformation que nous venons d'indiquer donne lieu, quelquefois, à une simplification digne d'être notée. Le cas que nous voulons signaler ici, est celui où l'équation proposée se présente sous la forme

$$a_0\alpha^mx^m+a_1\alpha^{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}\alpha x+a_m=0.$$

Posons

$$\alpha x = \frac{X}{\lambda}.$$

L'équation transformée est

$$a_0 \frac{X^m}{\lambda^m} + a_1 \frac{X^{m-1}}{\lambda^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{X}{\lambda} + a_m = 0;$$

si nous prenons λ égal à a_0, nous avons, pour déterminer X, l'équation :

$$X^m + a_1 X^{m-1} + \dots + a_m a_0^{m-1} = 0.$$

On remarquera que le terme tout connu de l'équation, ainsi transformée, est $a_m a_0^{m-1}$; par la méthode générale, on eut trouvé, pour le dernier terme de la transformée, $a_m a_0^{m-1} \alpha^{m(m-1)}$. La facilité de la recherche des racines commensurables reposant, principalement, sur la simplicité plus ou moins grande du dernier terme, la remarque que nous venons de signaler a une importance notable; elle devra être appliquée toutes les fois qu'il sera possible de le faire.

460. Recherche des racines entières. Soit une équation, à coefficients entiers, le premier d'entre eux étant égal à l'unité,

$$(1) \quad x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0;$$

et soit α, une racine commensurable, entière, de cette équation. On a

$$(2) \quad x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = (x - \alpha)(x^{m-1} + \lambda_1 x^{m-2} + \dots + \lambda_{m-2} x + \lambda_{m-1}).$$

En égalant les termes tout connus de cette identité on a d'abord

$$a_m = -\alpha\lambda_{m-1}$$

ou

$$(3) \quad \left(\frac{a_m}{\alpha}\right) = -\lambda_{m-1}.$$

Les coefficients λ sont entiers, pour des raisons bien connues, et qui résultent de la division du polynôme $x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$ par $x - \alpha$; ainsi *les racines entières de l'équation* (1) *sont des diviseurs, positifs ou négatifs, du terme tout connu* a_m.

L'identité (2) donne aussi les égalités suivantes

$$(4) \quad \begin{array}{l} a_{m-1} = \lambda_{m-1} - \alpha\lambda_{m-2} \\ a_{m-2} = \lambda_{m-2} - \alpha\lambda_{m-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 = \lambda_1 - \alpha. \end{array}$$

Ces relations, et l'égalité (3), donnent successivement

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\lambda_{m-2} = \dfrac{a_{m-1} + \dfrac{a_m}{\alpha}}{\alpha} \\[2ex] -\lambda_{m-3} = \dfrac{a_{m-2} + \dfrac{a_{m-1} + \dfrac{a_m}{\alpha}}{\alpha}}{\alpha} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

On peut maintenant énoncer la propriété suivante : pour qu'un nombre entier α, soit racine de l'équation (1), il est nécessaire qu'il remplisse les conditions suivantes :

1° Il doit diviser le terme tout connu ; soit Q_1 le quotient obtenu.

2° Si à ce quotient Q_1, on ajoute le coefficient a_{m-1}, cette somme doit être encore divisible par α ; en général, si, à un quotient Q_h, obtenu par la voie indiquée, on ajoute le coefficient du terme en x^h, cette somme, divisée par α, doit donner un quotient entier, Q_{h+1}.

3° La loi précédente étant vérifiée, tout le long de l'équation, les nombres Q_1, Q_2, ... Q_{m-1} étant entiers, il faut encore que l'égalité

$$(6) \quad a_1 = \lambda_1 - \alpha,$$

soit vérifiée; et comme l'on a $\lambda_1 = - Q_{m-1}$, il faut donc que le dernier quotient trouvé augmenté du coefficient du terme en x^{m-1} donne une somme égale à la racine essayée, mais affectée d'un signe contraire.

Ces conditions sont nécessaires; elles sont aussi suffisantes. En effet si elles sont vérifiées les égalités (5) et (6) entrainent les égalités (4), et, celles-ci, l'identité (2).

On voit, d'après cela, que la recherche des racines entières de l'équation (1) exige d'abord la connaissance des diviseurs positifs ou négatifs, du terme tout connu. Pour diminuer le nombre des calculs, on utilise un certain nombre de remarques que nous exposerons maintenant.

461. Règles d'exclusion. 1° *Si α est une racine de l'équation entière $f(x) = 0$,*

$$f(x) = x^m + \ldots + A_m,$$

les divisions $\frac{f(1)}{\alpha - 1}$ et $\frac{f(-1)}{\alpha + 1}$, *doivent se faire exactement.*

En effet, l'identité

$$(1) \quad f(x) = (x - \alpha)\,\varphi(x)$$

donne, successivement, les égalités suivantes :

$$-\varphi(1) = \frac{f(1)}{\alpha - 1}$$

$$-\varphi(-1) = \frac{f(-1)}{\alpha + 1}.$$

D'ailleurs $\varphi(x)$ est un polynôme à coefficients entiers, par suite, $\varphi(1)$ et $\varphi(-1)$ sont des nombres entiers : la remarque énoncée se trouve donc démontrée.

2° *Si parmi les trois nombres*

$$f(1), \quad f(0), \quad f(-1),$$

il n'y en a aucun qui soit divisible par 3, il n'y a pas de nombre entier vérifiant l'équation proposée.

En effet l'identité (1) donne les trois égalités suivantes :

$$-f(1) = (\alpha - 1)\varphi(1),$$
$$-f(0) = \alpha\varphi(0),$$
$$-f(-1) = (\alpha + 1)\varphi(-1).$$

Dans les trois nombres entiers consécutifs

$$\alpha - 1, \quad \alpha, \quad \alpha + 1,$$

il y en a un qui est certainement divisible par 3 ; le diviseur 3 doit donc appartenir à l'un des nombres

$$f(1), \quad f(0), \quad f(-1).$$

Cette remarque, qui est due à Gauss, est susceptible d'une généralisation évidente. On voit que l'un des nombres $f(1)$, $f(2), \ldots f(p)$, doit être divisible par p quand l'équation $f(x) = 0$ admet des racines entières. Mais dans la pratique on se borne, généralement, à la remarque simple que nous avons donnée sur les trois nombres $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$, parce que ces nombres se calculent facilement.

462. Racines commensurables fractionnaires. L'identité (A) qui peut s'écrire, en faisant $y = 1$,

$$(A') \quad A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m = (\alpha x + \beta)(\lambda_1 x^{m-1} + \lambda_2 x^{m-2} + \ldots + \lambda_m)$$

donne les égalités

$$A_0 = \alpha\lambda_1$$
$$A_1 = \beta\lambda_1 + \alpha\lambda_2$$
$$A_2 = \beta\lambda_2 + \alpha\lambda_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_m = \beta\lambda_m.$$

Réciproquement, si ces égalités sont vérifiées par des valeurs entières des coefficients λ, l'identité (A') a lieu, et $\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ est une racine commensurable de l'équation proposée.

Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes, pour que $\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ soit une racine de l'équation

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m = 0,$$

sont les suivantes :

$$\lambda_1 = \frac{A_0}{\alpha}$$

$$\lambda_2 = \frac{A_1 - \frac{\beta A_0}{\alpha}}{\alpha}$$

$$\lambda_3 = \frac{A_2 - \beta\frac{A_1 - \beta\frac{A_0}{\alpha}}{\alpha}}{\alpha}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\lambda_m = \frac{A_m}{\beta};$$

tous les coefficients λ étant entiers.

463. Application. 1° *Exemple numérique.* Soit l'équation

$$(1)\quad f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2x - 3 = 0$$

Pour la ramener à la forme d'une équation n'ayant que des racines entières et pour appliquer en même temps une remarque faite plus haut (§ 459), multiplions les deux membres par 2 ; il vient

$$2^4x^4 - 2^3x^3 - 6\,.\,2^2x^2 + 2\,.\,2x - 6 = 0,$$

ou, en posant $2x = X$,

$$(2)\quad X^4 - X^3 - 6X^2 + 2X - 6 = 0.$$

C'est cette équation que nous allons considérer. On a

$$f(1) = -10, \quad f(0) = -6, \quad f(-1) = -12.$$

La remarque de Gauss n'exclut pas toutes les racines entières, puisque $f(0)$ est divisible par 3.

Les diviseurs que nous devons considérer successivement sont

$$2, \quad 3, \quad 6; \quad -2, \quad -3 \quad \text{et} \quad -6,$$

$f(1)$, fait exclure -2; $f(-1)$, 6 et -6. Il reste donc à examiner les seuls nombres

$$2, \quad 3 \quad \text{et} \quad -3.$$

Voici le tableau du calcul :

DIVISEUR 2	DIVISEUR 3	DIVISEUR (—3)
$-\frac{6}{2} = -3$	$-\frac{6}{3} = -2$	$\frac{-6}{-3} = 2$
$\frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$	$-\frac{2+2}{3} = 0$	$\frac{2+2}{-3} = -\frac{4}{3}$
(2 n'est pas racine)	$\frac{0-6}{3} = -2$	(—3 n'est pas rac.)
	$-\frac{2-1}{3} = -1$	
	(3 est racine)	

Ainsi 3 est la seule racine entière de l'équation (2) et, par conséquent, $\frac{3}{2}$ la seule racine commensurable de l'équation (1).

On peut vérifier ce calcul en remarquant que l'on a, en effet,

$$8x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2x - 3 = (2x - 3)(4x^3 + 4x^2 + 1).$$

2° *Exemple algébrique.* La recherche des facteurs commensurables ou, si l'on préfère, des facteurs rationnels, de la forme $\alpha x + \beta y$, peut encore se faire, dans certains cas, sur des équations algébriques.

Prenons l'équation

$$x^3 - 3pqx + p^3 + q^3 = 0.$$

Parmi les diviseurs algébriques du terme tout connu se trouve l'expression $p + q$. Appliquons la méthode des racines commensurables à la quantité $-(p + q)$.

Le calcul suivant :

$$\frac{p^3 + q^3}{-p - q} = -p^2 + pq - q^2,$$

$$\frac{-p^2 + pq - q^2 - 3pq}{-p - q} = p + q,$$

$$\frac{-p + q}{p + q} = -1.$$

prouve que $-(p + q)$ est racine. On a, en effet, l'identité connue

$$x^3 - 3pqx + p^3 + q^3 = (x + p + q)(x^2 - px - qx + p^2 + q^2 - pq).$$

464. Remarque. Il y a une règle d'exclusion que nous n'avons pas encore signalée et qui peut être profitable dans certains exemples numériques. Cette règle évidente peut se formuler ainsi : *les seuls diviseurs du dernier terme que l'on doit essayer, sont ceux qui sont compris entre les limites assignées aux racines, par les méthodes connues.*

Prenons, par exemple, l'équation

$$x^4 - 9x^2 - 108x + 324 = 0.$$

Le dernier terme admet un grand nombre de diviseurs, puisque l'on a $324 = 2^2 3^4$. Parmi les diviseurs positifs, on peut exclure tous ceux qui sont égaux ou supérieurs à 12, la règle de Lagrange assignant $1 + \sqrt{108}$ comme limite aux racines positives.

On peut encore abaisser cette limite, en remarquant que l'équation précédente peut être écrite sous la forme suivante

$$(x^4 - 36x^2 + 324) + x(27x - 108) = 0$$

ou

$$(x^2 - 18)^2 + 27x(x-4) = 0.$$

Le nombre 4 est donc la limite assignée par cette méthode et les seuls diviseurs positifs que l'on ait à essayer sont 2 et 3. Ce dernier nombre est d'ailleurs une racine de l'équation comme le prouve l'identité suivante :

$$x^4 - 9x^2 - 108x + 324 = (x-3)(x^3 + 3x^2 - 108).$$

465. Facteurs commensurables d'un degré quelconque. Soit $f(x) = 0$, l'équation proposée ; $f(x)$ admettant, nous le supposons, le facteur commensurable y

$$y = x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1} x + \alpha_p.$$

On tire de cette égalité

$$x^p = y - \alpha_1 x^{p-1} \ldots - \alpha_p,$$

Multiplions, de part et d'autre, par x, et, dans le second membre, remplaçons x^p, au moyen de la relation précédente ; nous obtenons, pour x^{p+1}, une expression ne renfermant que les lettres

$$y, \quad x, \quad x^2, \ldots x^{p-1}.$$

En poursuivant cette manière de faire, nous pourrons calculer, successivement, toutes les puissances de $x : x^p$, x^{p+1}, ... par des expressions qui sont des fonctions entières de y, et des puissances de $x : x$, x^2, ... x^{p-1}. Ce calcul étant effectué, le polynôme $f(x)$ prendra donc, lui aussi, cette forme algébrique et en groupant convenablement les termes de cette forme, on aura finalement

$$(1) \quad f(x) = U_1 x^{p-1} + U_2 x^{p-2} + \ldots + U_p;$$

U_1, U_2, ... U_p désignant des fonctions entières de y.

Ceci posé soit λ_1 une des p racines de l'équation

$$(2) \quad x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \ldots + \alpha_p = 0.$$

Pour $x = \lambda_1$ on a $y = 0$. Désignons par $u_1, u_2, \dots u_p$ les termes indépendants de y, dans les fonctions U; puisque λ_1 est une racine de l'équation $f(x) = 0$, l'identité (1) donne

$$u_1 \lambda_1^{p-1} + u_2 \lambda_1^{p-2} + \dots + u_p = 0.$$

On conclut de là que l'équation, du degré $(p-1)$,

$$u_1 X^{p-1} + u_2 X^{p-2} + \dots + u_p = 0,$$

admet p racines, savoir celles de l'équation (2). On a donc

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots \quad u_p = 0,$$

et ceci constitue un système de p équations, entre les p inconnus $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$.

On doit enfin remarquer que l'élimination de $\alpha_2, \dots \alpha_p$ entre ces équations, si elle se fait sans introduction de facteurs étrangers, conduit, pour une raison évidente, à une équation en α_1 du degré C_m^p. On cherchera, par la méthode exposée plus haut, les racines commensurables de cette équation et l'on déterminera ainsi la première inconnue α_1. Les autres inconnues $\alpha_2, \dots \alpha_p$ se calculent ensuite par des équations que l'on peut former par combinaison des équations $u = 0$; ces combinaisons sont, généralement, du premier degré.

466. Théorème. *Étant donnée une équation $f(x) = 0$, ayant ses coefficients réels, on peut toujours trouver les racines de la forme $\alpha + \beta i$; α et β désignant deux nombres commensurables.*

En effet l'équation $f(x) = 0$ ayant, nous le supposons, ses coefficients réels, $\alpha - \beta i$ est aussi l'une de ses racines; par suite, le produit

$$(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i),$$

est un diviseur de $f(x)$. Mais on a

$$(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2;$$

α et β étant commensurables, le trinôme $(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)$ est un facteur commensurable du polynôme $f(x)$; il sera donc possible de le déterminer, notamment par la méthode précédente. Dans ce cas, l'équation du degré m, proposée, est abaissée; sa résolution étant ramenée à celle de deux équations, dont les degrés sont 2 et $(m - 2)$.

EXERCICES

1. *Trouver les racines de l'équation*

$$x^4 + 9x + 18 = 0,$$

En appliquant la méthode indiquée (§ 466), on trouve les facteurs commensurables $x^2 + 3x + 3$, et $x^2 - 3x + 6$.

2. *Appliquer la méthode des racines commensurables à l'équation*

$$x^3 - x(a^2 + b^2 + ab) + ab(a + b) = 0.$$

3. *Trouver les racines de l'équation*

$$x^3 - p^2(p^2 + p + 1)x - p^4(p + 1) = 0,$$

Sachant que ces racines sont commensurables, quelle que soit la valeur commensurable attribuée à p.

Les trois racines sont $-p$, $-p^2$, et $p(p + 1)$.

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON

THÉORÈME DE ROLLE

Le théorème de *Rolle* que nous allons exposer dans cette leçon, ceux de *Descartes* et de *Sturm,* que nous verrons ensuite, ont pour but ; soit la recherche de la présence des racines imaginaires dans une équation donnée, soit la séparation des racines réelles, non commensurables.

On dit que deux nombres commensurables α et β, séparent une racine de l'équation $f(x) = 0$, lorsque il y a, dans l'intervalle α, β, une seule racine réelle de cette équation.

467. Principe. *La dérivée logarithmique d'une fonction entière passe du négatif au positif lorsqu'elle devient infinie.*

Soit $f(x)$, la fonction entière proposée ; considérons la fonction y,

$$y = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

La dérivée $f'(x)$ étant d'un degré inférieur à celui de $f(x)$ y ne peut devenir infinie que pour les valeurs de x qui sont des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Soit a l'une de ces racines, p son degré de multiplicité ; on a donc

$$f(x) = (x - a)^p \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière. On a, par suite,

$$f'(x) = p(x - a)^{p-1} \varphi(x) + (x - a)^p \varphi'(x)$$

et, par conséquent,

$$(1)\quad y = \frac{p}{x-a} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Supposons maintenant que x varie dans l'intervalle $a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$; comme $\varphi(a)$ est différent de zéro, on peut prendre ε assez petit pour que $\varphi(x)$ ne change pas de signe, pendant cette variation. La fraction $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ conserve donc une valeur finie; au contraire, $\frac{p}{x-a}$ prend des valeurs qui croissent au delà de toute limite, quand ε tend vers zéro. Cette fraction donne donc son signe au second membre de l'égalité. Pour $x = a-\varepsilon$, la fraction $\frac{p}{x-a}$ prend la valeur $\frac{p}{-\varepsilon}$, nombre négatif, si nous supposons ε positif; au contraire, pour $x = a+\varepsilon$, cette même fraction est égale à $\frac{p}{\varepsilon}$, valeur positive, dans la même hypothèse. En résumé, y est négatif avant le passage de x par la valeur a, positif après ce passage.

468. Théorème. *Entre deux racines réelles consécutives α, β d'une équation, il y a un nombre impair de racines réelles de l'équation dérivée.*

Désignons par ε une quantité positive, variable, et qui peut être aussi petite que l'on voudra. Faisons varier x dans l'intervalle

$$\alpha+\varepsilon,\quad \beta-\varepsilon,\quad (\alpha<\beta).$$

Le rapport $\frac{f'(x)}{f(x)}$ est positif, pour $x=\alpha+\varepsilon$; négatif, pour $x=\beta-\varepsilon$ (§ 467). D'ailleurs $f(x)$ conserve le même signe, pour toutes les valeurs de x prises dans l'intervalle que nous considérons, puisqu'il n'y a, par hypothèse, aucune racine réelle de l'équation $f(x)=0$, dans l'intervalle α, β. On doit donc

admettre que $f'(x)$ a des valeurs de signes contraires, pour $x = \alpha + \varepsilon$, et pour $x = \beta - \varepsilon$. Il y a, par suite, (§ 368), un nombre impair de racines de l'équation $f'(x) = 0$, dans l'intervalle $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$, c'est à dire dans l'intervalle (α, β), puisque ε est aussi petit que l'on veut.

469. Théorème. *Entre deux racines réelles, consécutives, α', β', de l'équation $f'(x) = 0$, il y a soit zéro, soit une racine de l'équation $f(x) = 0$.*

En effet, si dans l'intervalle α', β' se trouvaient plusieurs racines de l'équation $f(x) = 0$, en prenant deux nombres consécutifs α, β, parmi ces racines, on aurait, dans l'équation $f(x) = 0$, deux racines consécutives ne comprenant aucune racine de l'équation dérivée. Nous venons de voir, au paragraphe précédent, que cette hypothèse est inadmissible.

470. Théorème. *Lorsqu'une équation $f(x) = 0$ n'a que des racines simples, elles sont séparées par les nombres*

$$-\infty, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots \alpha_q, +\infty.$$

Cette suite, dite suite de Rolle, étant formée par les racines $\alpha_1, \ldots \alpha_q$; réelles, et rangées dans l'ordre croissant, de l'équation $f'(x) = 0$.

Considérons d'abord deux nombres α consécutifs, par exemple, α_z et α_{z+1}. Si nous avons

$$f(\alpha_z)\, f(\alpha_{z+1}) < 0,$$

il y a une seule racine de l'équation $f(x) = 0$, dans l'intervalle α_z, α_{z+1}. Au contraire il n'y a aucune racine, dans cet intervalle, si nous supposons

$$f(\alpha_z)\, f(\alpha_{z+1}) > 0.$$

Ceci résulte du théorème précédent.

Considérons maintenant l'intervalle $-\infty$, α_1 : dans cet intervalle il y a aussi zéro, ou une racine de l'équation $f(x) = 0$.

Il suffit, pour le reconnaître, de reproduire le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure (§ 469), raisonnement qui s'applique encore à l'intervalle α_q, $+\infty$. En résumé, la suite de Rolle sépare les racines de l'équation proposée.

Telles sont les propriétés qui constituent, par leur ensemble, la méthode de Rolle, pour la séparation des racines. Nous l'appliquerons, tout à l'heure, à quelques exemples, mais nous voulons d'abord déduire, des principes précédents, certaines conséquences importantes.

471. Théorème. *Lorsque l'équation $f'(x) = 0$ admet $2k$ racines imaginaires, ou $2k$ racines égales, ou enfin $2k+1$ racines égales, il y a, au moins, $2k$ racines imaginaires dans l'équation $f(x) = 0$.*

L'équation $f'(x) = 0$ étant du degré $(m-1)$, si l'on suppose $f(x)$ du degré m, la suite de Rolle comprend $(m+1)$ termes, par conséquent, m intervalles, tout au plus. S'il y a $2k$ racines imaginaires, ou $(2k+1)$ racines égales, dans l'équation dérivée, le nombre des intervalles se trouve, par celà même, diminué de $2k$: chacun d'eux renfermant tout au plus, une racine, de l'équation $f(x) = 0$, il y a donc, au moins, $2k$ racines imaginaires dans cette équation.

Supposons maintenant qu'il y ait une racine α de multiplicité $2k$, dans l'équation dérivée. Il est facile de reconnaître que cette racine doit être, purement et simplement, supprimée dans la suite de Rolle.

Supposons, en effet, que α soit placée dans la suite de Rolle entre les racines β, γ; cette suite est alors

$$-\infty \ldots \beta, \alpha, \gamma, \ldots + \infty.$$

Dans l'intervalle (β, α) il y a zéro, ou une racine; il y a aussi zéro, ou une racine, dans l'intervalle (α, γ). Par suite dans l'intervalle (β, γ) il y a zéro, une, ou deux racines; mais cette dernière hypothèse doit être rejetée. En effet, s'il y avait deux racines x', x'' entre β et γ, il faudrait que x' fut placée entre β et α, et x'' entre α et γ; mais alors entre les deux racines

consécutives x' et x'' se trouveraient un nombre pair $2k$, de racines de la dérivée ; ce qui n'est pas possible (§ 468).

Dans les trois cas que nous venons de signaler la suite de Rolle perd $2k$ intervalles ; il y a donc $2k$ racines imaginaires, au moins, dans l'équation considérée.

472. Corollaire. *Quand une équation $f(x)=0$ a toutes ses racines réelles et distinctes, il en est de même pour les équations dérivées $f'(x)=0$, $f''(x)=0$ ... .*

D'après ce que nous venons de voir, cette proposition est évidemment vraie pour l'équation $f'(x)=0$. Du moment qu'elle est vérifiée pour la dérivée première, elle s'étend, par cela même, à toutes les dérivées successives.

473. Théorème. *On peut appliquer le théorème de Rolle aux équations du quatrième degré, sans qu'on ait besoin de résoudre une équation d'un degré supérieur à 2.*

Considérons l'équation du quatrième degré, débarrassée de son second terme,

$$(1)\quad x^4+px^2+qx+r=0.$$

L'équation aux inverses est

$$(2)\quad rx^4+qx^3+px^2+1=0.$$

Si les racines de l'équation (2) sont séparées par des nombres a, b, ... ; ceux de l'équation (1) seront séparées par les nombres $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, ... Or le théorème de Rolle s'applique, commodément, à l'équation (2) parce que l'équation dérivée

$$4rx^3+3qx^2+2px=0,$$

admet une racine nulle. La suite de Rolle sera donc formée par les quantités

$$-\infty,\quad 0,\quad +\infty$$

auxquelles on adjoindra, s'il y a lieu, les racines de l'équation

$$4rx^2+3qx+2p=0.$$

474. Application du théorème de Rolle à un exemple. Avant d'aller plus loin, nous voulons montrer, sur un exemple, comment on applique, ordinairement, le théorème de Rolle.

Soit

$$f(x) = 16x^3 - 24px^2 + 9p^2x + pq^2 = 0,$$

l'équation proposée. On a

$$\frac{1}{3}f'(x) = 16x^2 - 16px + 3p^2.$$

L'équation $f'(x) = 0$ admet pour racines

$$x_1 = \frac{p}{4}, \quad x_2 = \frac{3p}{4}.$$

La suite de Rolle est, si l'on suppose $p > 0$,

$$-\infty, \frac{p}{4}, \frac{3p}{4}, +\infty,$$

on trouve, d'ailleurs,

$$f(x_1) = p(p^2 + q^2),$$

et

$$f(x_2) = pq^2.$$

Quel que soit le signe de p, $f(x_1)$ et $f(x_2)$ ont évidemment le même signe. Ainsi l'équation proposée a nécessairement deux racines imaginaires. Mais cette manière directe d'appliquer le théorème de Rolle est, souvent, impraticable. Les développements qui suivent ont pour but de montrer quelques perfectionnements qui peuvent, quelquefois, être apportés à la méthode de Rolle.

475. Remarque I. *Au lieu de substituer les racines de la dérivée dans l'équation proposée $f(x) = 0$, équation du degré*

*m, on peut, quand on applique la méthode de **Rolle**, faire cette substitution dans une équation du degré $(m-2)$.*

Si l'on divise $f(x)$,

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

par $f'(x)$, on a

$$\text{(A)} \quad f(x) = \left(\frac{x}{m} + \frac{A_1}{m^2}\right) f'(x) + \varphi(x);$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière du degré $(m-2)$. Soit α une racine quelconque de l'équation $f'(x) = 0$; l'identité précédente donne l'égalité

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha).$$

On pourra donc, et ceci donne lieu à un calcul plus simple, substituer les éléments de la suite de Rolle dans la fonction du degré $(m-2)$, $\varphi(x)$; c'est ce que nous voulions montrer.

476. Remarque II. *On peut remplacer la suite de Rolle par une autre suite, dont les termes sont :* 1° $\left(-\frac{A_1}{m}\right)$; 2° $(m-2)$ *nombres, racines d'une équation du degré* $(m-2)$.

L'identité (A) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\text{(A')} \quad \frac{\left(\frac{x}{m} + \frac{A_1}{m^2}\right)\varphi(x)}{f(x)} = \left(\frac{x}{m} + \frac{A_1}{m^2}\right) - \left(\frac{x}{m} + \frac{A_1}{m^2}\right)^2 \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Nous supposons, d'ailleurs, que l'équation $f(x) = 0$, n'admet pas la racine $-\frac{A_1}{m}$; s'il en était ainsi, si l'on avait $f\left(-\frac{A_1}{m}\right) = 0$, on abaisserait l'équation en divisant $f(x)$ par $\left(x + \frac{A_1}{m}\right)$. En répétant, sur l'identité (A'), le raisonnement que nous avons fait plus haut (§ 467), on voit qu'*entre deux racines réelles consé-*

cutives de l'équation $f(x)=0$, il y a un nombre impair de racines de l'équation

$$(1) \qquad \left(x+\frac{A_1}{m}\right)\varphi(x)=0.$$

La méthode de Rolle s'applique donc à l'équation $f(x)=0$, en remplaçant la suite de Rolle, par les racines de l'équation (1).

477. Remarque III. *Soit $f(x)=0$ une équation du troisième degré, et soient α et β les racines de l'équation $f'(x)=0$; l'équation proposée a ses trois racines réelles, quand on a $f(\alpha)\,f(\beta)<0$. Cette condition est nécessaire et suffisante.*

La condition est nécessaire. En effet, α et β sont deux éléments consécutifs de la suite de Rolle; si le produit $f(\alpha)\,f(\beta)$ est positif, les facteurs $f(\alpha)$, $f(\beta)$ ayant le même signe il n'y a aucune racine de l'équation $f(x)=0$ dans l'intervalle α, β; cette équation a donc des racines imaginaires.

Si l'on suppose maintenant que le produit $f(\alpha)\,f(\beta)$ soit négatif, il y a certainement une racine entre α et β; mais il faut montrer que les trois racines sont, dans cette hypothèse, nécessairement réelles.

En effet si la méthode de Rolle donne, en supposant $\alpha<\beta$, le tableau suivant :

x;	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$f(x)$;	$-$	$+$	$-$	$+$

les trois racines sont réelles. Mais on peut avoir $f(\alpha)\,f(\beta)<0$ avec cette seconde disposition :

x:	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$f(x)$;	$-$	$-$	$+$	$+$

et, dans ce cas, l'équation $f(x)=0$ n'aurait qu'une racine réelle. Je dis que le tableau précédent est impossible. En effet si l'on a

$$f(x)=x^3+px^2+qx+r$$

on a, par suite,

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q.$$

Quand x varie de $-\infty$, à α, $f'(x)$ est toujours positif; $f(x)$ est donc une fonction croissante. Pour $x = \alpha$, $f'(x)$ s'annule et change de signe; par suite $f(x)$ est une fonction décroissante dans l'intervalle α, β. Il est donc impossible que $f(x)$ soit négatif, pour $x = \alpha$; et positif, pour $x = \beta$. Le premier tableau est donc le seul que l'on puisse trouver, quand on suppose $f(\alpha) f(\beta) < 0$.

478. Application. Appliquons les remarques précédentes à l'équation générale du troisième degré.

Soit

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

l'équation proposée. En divisant $f(x)$ par $f'(x)$ on a

$$f(x) = f'(x)\left(\frac{x}{3} + \frac{p}{9}\right) + \left[\left(\frac{2q}{3} - \frac{2p^2}{9}\right)x + r - \frac{pq}{9}\right].$$

Désignons par α et β les deux racines de l'équation

$$3x^2 + 2px + q = 0,$$

le calcul nous donne

$$f(\alpha) f(\beta) = \left[\left(\frac{2q}{3} - \frac{2p^2}{9}\right)\alpha + r - \frac{pq}{9}\right]\left[\left(\frac{2q}{3} - \frac{2p^2}{9}\right)\beta + r - \frac{pq}{9}\right].$$

Effectuons maintenant le produit indiqué dans le second membre et remarquons que nous avons

$$\alpha + \beta = -\frac{2p}{3}, \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \frac{q}{3};$$

nous obtenons finalement, en posant

$$f(\alpha) f(\beta) = u,$$

$$u = f'(\alpha)\,f'(\beta) = \left(\frac{2q}{3} - \frac{2p^2}{9}\right)^2 \frac{q}{3} - \left(\frac{2q}{3} - \frac{2p^2}{9}\right)\left(r - \frac{pq}{9}\right)\frac{2p}{3}$$
$$+ \left(r - \frac{pq}{9}\right)^2.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation générale du troisième degré ait ses trois racines réelles est donc

$$u < 0.$$

Si l'on a $u = 0$, l'équation a une racine double; enfin, elle a deux racines imaginaires quand on suppose $u > 0$.

479. Le théorème de Rolle peut quelquefois s'adapter à des cas pour lesquels l'application de ce théorème ne semble pas possible, et, par exemple, lorsque l'équation dérivée ne peut pas être résolue.

Soit l'équation $X = 0$,

$$X = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} \dots + \frac{x^{2p}}{2p!}.$$

On a

$$X' = -1 + \frac{x}{1} \dots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!},$$

et, par conséquent,

$$X + X' = \frac{x^{2p}}{2p!}.$$

Soit α une racine de l'équation $X' = 0$; d'après l'identité précédente on a

$$X_\alpha = \frac{\alpha^{2p}}{2p!}.$$

On voit donc que si l'équation $X' = 0$ a des racines réelles, la suite de Rolle donne constamment le signe $+$, dans X; l'équation $X = 0$ n'a donc que des racines imaginaires.

480. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que $f(x)$ représentait une fonction entière ; par suite que $f(x)$ et sa dérivée étaient *continues*. Cette continuité des fonctions f et f', est une condition nécessaire et l'on doit toujours s'assurer qu'elle est remplie. S'il arrive qu'une fonction soit discontinue, pour $x = x_0$, on doit séparer la suite de Rolle en deux suites, l'une s'arrêtant à $x_0 - \varepsilon$, l'autre commençant à $x_0 + \varepsilon$; ε désignant une quantité positive, variable, et d'ailleurs aussi petite que l'on voudra l'imaginer.

EXERCICES

1. *Appliquer directement le théorème de Rolle aux équations*

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x^3 + px^2 + q = 0.$$

2. *Appliquer le théorème de Rolle à l'équation* $X = 0$

$$X = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}.$$

On remarque que l'on a

$$X' = 1 + x + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

3. *Appliquer le théorème de Rolle à l'équation*

$$Ax^m + \frac{x^{m-1}}{1} + \frac{x^{m-2}}{2} + \ldots + \frac{x}{m-1} + \frac{1}{m} = 0.$$

On considère l'équation aux inverses.

4. *Appliquer le théorème de Rolle à l'équation*

$$\frac{1 + ax}{x - a} + \frac{1 + bx}{x - b} + \frac{1 + cx}{x - c} = 0. \quad (a < b < c)$$

On doit observer que la fonction est discontinue pour les valeurs a, b, c de la variable x et appliquer la remarque du paragraphe 480.

On voit alors que a, b, c, séparent deux des racines.

5. *Une équation, du degré m,*

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

dont les trois premiers coefficients vérifient l'inégalité

$$(1) \quad (m-1) A_1^2 - 2m A_0 A_2 < 0,$$

a des racines imaginaires.

On prend la dérivée d'ordre $(m-2)$

$$f^{(m-2)}(x) = m(m-1)\ldots 3 A_0 x^2 + (m-1)\ldots 2 A_1 x + (m-2)\ldots 1 A_2.$$

Cette équation a ses racines réelles si l'on suppose que l'équation proposée a toutes ses racines réelles (§ 472), on a donc

$$[(m-1)\ldots 3 A_1]^2 - [m(m-1)\ldots 3 . A_0][(m-2)\ldots 1] A_2 > 0$$

et, par suite, l'inégalité (1) est impossible.

6. *Lorsqu'une équation du troisième degré*

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0,$$

a ses racines réelles, on a

$$p^2 - q > 0 \quad \text{et} \quad q^2 - pr > 0.$$

On applique le théorème précédent à l'équation proposée, et à l'équation aux inverses.

7. *Si $U = 0$, représente une équation ayant toutes ses racines réelles, les équations suivantes*

$$f_1 = U + (x-a) U' = 0$$
$$f_2 = U + 3(x-a)U' + (x-a)^2 U'' = 0$$
$$f_3 = U + 7(x-a)U' + 6(x-a)^2 U'' + (x-a)^3 U''' = 0$$

. . . .

ont, aussi, toutes leurs racines réelles.

Chercher l'expression générale de f_n, et montrer qu'en posant

$$f_n = A_n^0 U + A_n^1 (x-a) U' + A_n^2 (x-a)^2 U'' + \ldots + (x-a)^n U_n$$

on a

$$A_n^0 = 1$$

$$A_n^1 = \frac{2^n - 1}{1}$$

$$A_n^2 = \frac{3^n - 2 \cdot 2^n + 1}{1 \cdot 2}$$

. . . .

$$A_n^{h-1} = \frac{h^n - \frac{h-1}{1}(h-1)^n + \frac{(h-1)(h-2)}{1 \cdot 2}(h-2)^n + \ldots + (-1)^{h-1}}{(h-1)!}.$$

On démontre cette dernière formule en remarquant que les coefficients vérifient la loi de récurrence suivante :

$$A_n^h = A_{n-1}^{h-1} + (h+1) A_{n-1}^h.$$

La fonction f_z est formée en prenant la dérivée de $(x-a)f_{z-1}$.

8. *Appliquer le théorème de Rolle à l'équation trinôme*

$$x^m + px^n + q = 0. \qquad (m \text{ et } n \text{ impairs})$$

On trouve que l'équation a une ou trois racines réelles, suivant que la quantité

$$\left(\frac{nq}{m-n}\right)^{m-n} + \left(\frac{np}{m}\right)^m,$$

est positive ou négative. Si l'on suppose, en particulier, $m=3$, $n=1$, on a la condition connue

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0.$$

pour exprimer que l'équation $x^3+px+q=0$ a ses trois racines réelles.

9. *Appliquer le théorème de Rolle à l'équation*

$$(1) \quad f(x) = x^3 + x^2 + \lambda x - 1 = 0,$$

et séparer ses racines.

On considère l'équation

$$(2) \quad \varphi(x) = 0,$$

obtenue en posant

$$\varphi(x) = x^2 + x + \lambda - \frac{1}{x}.$$

On a

$$\varphi'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2};$$

$\varphi(x)$ est une fonction continue pour toutes les valeurs de x, excepté pour $x = 0$, et toute racine de l'équation (2) est aussi racine de l'équation proposée (1). On remarque aussi que l'on a

$$\varphi'(x) = \frac{(x+1)(2x^2 - x + 1)}{x^2}$$

et en faisant varier x, 1° de $-\infty$ à $-\varepsilon$; 2° de $+\varepsilon$ à $+\infty$, on trouve le résultat suivant :

$1 + \lambda < 0$; 3 racines réelles séparées par $-\infty$, -1, 0, $+\infty$.
$1 + \lambda = 0$; 2 racines égales à -1, la troisième égale à $+1$.
$1 + \lambda > 0$; une seule racine réelle, comprise entre 0 et $+\infty$.

TRENTE-SIXIÈME LEÇON

THÉORÈME DE DESCARTES.

Le théorème de Descartes, et les corollaires nombreux qu'on en peut déduire, permettent, dans un grand nombre de cas, de reconnaître la présence des racines imaginaires, dans une équation donnée. La démonstration de ce théorème important repose sur le Lemne suivant.

481. Lemne. *Lorsqu'on multiplie un polynôme $f(x)$ par $(x-a)$, a étant positif, le produit obtenu renferme $2k+1$ variations de plus que, $f(x)$.*

Nous poserons

$$f(x) = A_0 x^m + \ldots + A x^{q+1} - B_0 x^n \ldots - B x^{p+1} + C_0 x^p + \ldots + \ldots$$
$$+ K x^{t+1} - L_0 x^t - \alpha x^{t-1} \ldots - \lambda x^s.$$

Cette notation exige quelques explications.

1° Le polynôme est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x.

2° Le premier terme A_0 est positif, et $B_0 x^n$ est le premier terme négatif, après $A_0 x^m$.

3° $C_0 x^p$ est le premier terme positif après $B_0 x^n$; et ainsi de suite.

4° Enfin le polynôme $f(x)$ se termine par un groupe de termes et, pour fixer les idées, nous avons supposé ces termes négatifs. Ce groupe possède un premier terme, $-L_0 x^t$; lequel est, selon les exemples, suivi, ou non, d'autres termes. Dans le cas où le dernier groupe renferme plusieurs termes, $-\lambda x^s$ désigne le dernier d'entre eux.

En résumé, et d'après ces conventions: 1° les signes des coefficients sont en évidence; 2° les lettres A, B, ... K; α, ... λ désignent des coefficients qui, suivant les cas, sont nuls, ou différents de zéro; *mais les lettres* A_0, B_0, ... T_0, *désignent des nombres positifs ;* 3° quand les coefficients α, ... λ, ne sont pas tous nuls, on suppose $\lambda \gtrless o$.

Ces explications étant données, soit posé

$$\varphi(x) = (x - a) f(x).$$

On a donc

$$\varphi(x) = A_0 x^{m+1} \ldots \begin{array}{l|} - B_0 \\ - aA \end{array} \, x^{n+1} \ldots \begin{array}{l|} + C_0 \\ + aB \end{array} \, x^{p+1} + \ldots + \ldots$$
$$\begin{array}{l|} - L_0 \\ - Ka \end{array} \, x^{b+1} \begin{array}{l|} + aL_0 \\ - \alpha \end{array} \, x^{t} \ldots + \lambda a x^{s}.$$

Comparons maintenant les polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$.

Entre les termes $A_0 x^m$ et $- B_0 x^n$, il y a, par hypothèse, une variation dans $f(x)$: entre les termes $A_0 x^{m+1}$, $- (B_0 + Aa) x^{n+1}$, il y a dans $\varphi(x)$ une variation, au moins ; et cette conclusion peut être formulée, également bien, en supposant $A = o$, ou $A \gtrless o$.

Le raisonnement précédent peut se répéter dans les polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$, pour les groupes qui se correspondent, deux à deux, jusqu'à ce qu'on arrive aux derniers groupes qui exigent un examen particulier.

La comparaison que nous venons de faire de $f(x)$ et de $\varphi(x)$ prouve que, jusques et y compris les termes,

$$- L_0 x^t, \quad \text{dans} \quad f(x) ; \quad - (L_0 + Ka) x^{t+1}, \quad \text{dans} \quad \varphi(x).$$

il y a, au moins, autant de variations dans $\varphi(x)$, que dans $f(x)$. D'autre part, si tous les coefficients α, .. λ sont nuls, il y a dans $\varphi(x)$ une variation qui n'existait certainement pas dans $f(x)$, savoir celle des deux termes

$$- (L_0 + Ka) x^{t+1}, \quad + aL_0 x^t.$$

Si, au contraire, tous les coefficients $\alpha, \ldots \lambda$, ne sont pas nuls, on a, notamment, $\lambda \gtrless 0$; et la comparaison des deux derniers groupes

$$-L_0x^t - \alpha x^{t-1} \ldots - \lambda x^s, \quad \text{de } f(x)$$
$$-(L_0+Ka)x^{t+1} \ldots + \lambda a x^s, \quad \text{de } \varphi(x)$$

prouve que le premier n'a *aucune* variation, mais que l'autre en possède *une* au moins. Ainsi, dans tous les cas, il y a plus de variations dans $\varphi(x)$, que dans $f(x)$.

Il est d'ailleurs facile de voir que cette différence est un nombre impair.

En effet, si le dernier terme de $f(x)$ est négatif, le dernier terme de $\varphi(x)$ est positif, ou inversement. Si l'on compte successivement les variations de ces deux polynômes on trouvera donc deux nombres de parités différentes; en d'autres termes, leur différence est un nombre impair.

482. Théorème de Descartes. *Le nombre des racines positives d'une équation $f(x) = 0$, est inférieur, ou tout au plus égal, au nombre des variations que présente le polynôme ordonné $f(x)$.*

La proposition est évidente d'elle-même, s'il n'y a aucune racine positive. Supposons donc que l'équation admette des racines positives que nous désignerons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$; et posons

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_p) U,$$

U désignant une constante, ou un polynôme entier dont le premier et le dernier terme ont, nécessairement, le même signe. En effet s'il en était autrement, l'équation $U = 0$ admettrait une racine entre zéro et $+\infty$.

Le polynôme U n'a donc pas de variation, ou en renferme un nombre pair. Nous désignerons ce nombre par $2k$, k pouvant être nul.

La multiplication successive par les binômes $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2$, $x - \alpha_p$, introduit des variations, savoir:

$$2k_1 + 1, \quad 2k_2 + 1, \ldots 2k_p + 1.$$

Le nombre total des variations est donc donné par la formule

$$V = 2(k+k_1+k_2+\dots+k_p)+P.$$

$k_1\, k_2 \dots k_p$; désignant des nombres positifs, ou nuls. On a donc, finalement,

$$V - P = 2K,$$

K étant un nombre positif ou nul. C'est cette égalité qui constitue le théorème de Descartes.

Il est visible que si l'on applique ce théorème, à l'équation $f(-x) = 0$; N désignant le nombre des racines négatives de l'équation $f(x) = 0$, et V′ le nombre des variations de la transformée en $-x$, on a

$$V' - N = 2K',$$

K′ désignant un nombre positif, ou nul.

COROLLAIRES DU THÉORÈME DE DESCARTES

483. Corollaire I. *La différence* $(m - V - V')$ *est égale à zéro, ou à un nombre pair.*

Nous conserverons les notations adoptées précédemment (§ 370). Le théorème de Descartes donne les deux égalités

$$V - P = 2K$$
$$V' - N = 2K'.$$

On sait d'ailleurs que l'on a

$$I = 2K''.$$

Il en résulte,

$$P + N + I - V - V' = 2K'' - 2K' - 2K$$

ou

$$m - (V + V') = 2(K'' - K' - K).$$

Le nombre $V + V'$ est égal ou inférieur à m (§ 371), par suite $K'' - K' - K$ est un nombre positif, ou nul. Nous pouvons donc poser

$$m - V - V' = 2\mu; \quad (\mu \geqslant 0).$$

484. Corollaire II. *Lorsque la différence* $(m - V - V')$ *n'est pas nulle, mais égale à* 2μ*; il y a, au moins,* 2μ *racines imaginaires dans l'équation proposée.*

Les égalités

$$V - P = 2K$$
$$V' - N = 2K'$$
$$m - V - V' = 2\mu,$$

donnent

$$m - P - N = 2(K + K' + \mu),$$

ou

$$I = 2(K + K' + \mu),$$

ou, enfin,

$$I \geqslant 2\mu.$$

485. Corollaire III. *Lorsqu'une équation a toutes ses racines réelles, on a* 1° $V = P$, 2° $V' = N$.

Les égalités

$$V - P = 2K$$
$$V' - N = 2K'$$
$$P + N = m,$$

donnent

$$V + V' = 2K + 2K' + m;$$

ou

$$(m - V - V') + 2K + 2K' = 0.$$

La différence $m - V - V'$ est positive, ou nulle (§ 483); l'é-

galité précédente ne peut avoir lieu que si l'on suppose, simultanément :

$$V + V' = m,$$
$$K = 0,$$
$$K' = 0.$$

Puisque K et K′ sont nuls, on a donc

$$V = P, \quad \text{et} \quad V' = N.$$

486. Corollaire IV. *Si la différence* (V — P) *n'est pas nulle, mais égale à* 2K *; il y a, au moins,* 2K *racines imaginaires, dans l'équation proposée.*

En effet, on a

$$I = m - P - N,$$

ou

$$I = (V - P) + (V' - N) + (m - V - V').$$

D'ailleurs $(V' - N)$, et $(m - V - V')$, sont des quantités positives, ou nulles ; on a donc

$$I \geqslant 2K.$$

487. Corollaire V. (Règle de Sturm). *Si, en multipliant* $f(x)$, *par* $x - a$, *on introduit* $2k + 1$ *variations ; il y a, au moins,* $2k$ *racines imaginaires dans l'équation* $f(x) = 0$.

Posons

$$\varphi(x) = (x - a) f(x),$$

et considérons l'équation

$$(1) \quad \varphi(x) = 0.$$

Si l'on désigne par V le nombre des variations du polynôme $f(x)$, l'équation (1) admet $V + 2k + 1$ variations, et $P + 1$ racines positives. La différence de ces deux nombres est

$$(V - P) + 2k ;$$

et comme (V — P) est un nombre positif, ou nul, il y a donc, (§ 486), $2k$ racines imaginaires, au moins, dans l'équation

$$(x - a) f(x) = 0,$$

et, par conséquent, dans l'équation proposée $f(x) = 0$.

488. Corollaire VI. (Théorème des lacunes.) *Lorsqu'une équation présente une lacune, elle admet, au moins, autant de racines imaginaires qu'il en existe dans l'équation obtenue en égalant à zéro l'ensemble des deux termes qui constituent la lacune considérée.*

Soit

$$(1) \quad f(x) = \overbrace{Ax^m + \ldots +}^{1} \overbrace{Hx^{p+q+1} +}^{2} \overbrace{H'x^p + \ldots + L}^{3} = 0$$

une équation présentant une lacune de q termes entre Hx^{p+q+1} et $H'x^p$. Nous allons compter les variations qui peuvent exister dans les parties 1, 2 et 3 ; et dans les parties correspondantes 1′, 2′, 3′ ; de la transformée en $(-x)$.

1° Dans (1), si l'on met x^{p+q+1} en facteur, on obtient un polynôme d'un degré égal à $m - p - q - 1$: le nombre total des variations des parties 1 et 1′ est donc égal, ou inférieur, à $(m - p - q - 1)$.

2° La même remarque, appliquée aux parties 3 et 3′, donne pour ces deux régions, un nombre total de variations, qui est tout au plus égal à p.

3° Étudions maintenant les variations qui peuvent exister dans les parties 2 et 2′, et distinguons deux cas, suivant que la lacune est paire ou impaire.

L'équation obtenue en égalant à zéro l'ensemble des deux termes qui constituent la lacune est, abstraction faite du facteur x^p,

$$(2) \quad Hx^{q+1} + H' = 0.$$

Si q est un nombre pair, cette équation binôme admet une

seule racine réelle. On voit aussi que dans les parties 2 et 2' il y a une variation.

Dans cette hypothèse, le nombre total des variations de $f(x)$ et de $f(-x)$ est, donné par l'égalité,

$$V + V' = (m - p - q - 1) + p + 1 = m - q.$$

Il y a donc, dans l'équation proposée, au moins q racines imaginaires. D'ailleurs l'équation (2) n'ayant qu'une racine réelle, admet q racines imaginaires aussi, et ceci vérifie la proposition, dans le cas de la lacune paire.

Prenons maintenant le second cas, celui où la lacune est impaire. Si H et H' ont le même signe, il y a zéro racine réelle dans l'équation (2), et zéro variation dans 2 et 2'. Le nombre total des variations est alors $(m-p-q-1)+p$, ou $m-q-1$. Il y a donc, au moins $(q+1)$ racines imaginaires dans l'équation donnée, et il y en a aussi $(q+1)$ dans l'équation (2). Enfin, si H et H' ont des signes contraires, il y a deux variations dans les parties 2 *et* 2' ; il y a aussi deux racines réelles, et par conséquent $(q-1)$ racines imaginaires, dans l'équation (2). Le nombre total des variations est alors $(m-p-q-1) + p + 2$ ou $m-q+1$. Par suite il y a $(q-1)$ racines imaginaires, au moins, dans l'équation proposée : il y en a aussi $(q-1)$ dans l'équation (2). Le théorème des lacunes se trouve ainsi établi dans tous les cas.

Lorsqu'une équation présente plusieurs lacunes, il est bien entendu qu'on doit appliquer le théorème précédent à chacune des lacunes.

489. Parmi les conséquences qu'on peut tirer immédiatement de ce théorème, nous citerons les deux suivantes qui sont fréquemment invoquées :

1° *S'il manque un terme, entre deux termes de même signe, il y a des racines imaginaires.*

2° *S'il manque deux termes consécutifs, il y a aussi des racines imaginaires.*

Mais, le plus souvent, le théorème des lacunes est appliqué d'une manière indirecte et nous allons montrer cette applica-

tion indirecte, sur des exemples divers. Ces corollaires reposent sur une idée très simple, que l'on peut formuler ainsi: *lorsqu'en multipliant $f(x)$, par $\varphi(x)$, le produit étant effectué, on obtient une lacune qui révèle la présence de racines imaginaires dans l'équation*

$$[f(x) \cdot \varphi(x)] = 0 ;$$

il existe certainement des racines imaginaires, dans l'équation $f(x) = 0$, s'il n'y en a pas dans l'équation $\varphi(x) = 0$.

Le théorème suivant est une application de ce principe général.

490. Théorème. *Si q coefficients consécutifs*

$$a_p, a_{p+1}, \dots a_{p+q-1},$$

d'une équation $f(x) = 0$,

$$f(x) \equiv c_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m,$$

vérifient, pour deux valeurs consécutives de p, la relation

$$\alpha_1 a_p + \alpha_2 a_{p+1} + \dots + \alpha_q a_{p+q-1} = 0 ;$$

et si l'équation $\varphi(x) = 0$,

$$\varphi(x) \equiv \alpha_q x^{q-1} + \alpha_{q-1} x^{q-2} + \dots + \alpha_2 x + \alpha_1$$

n'a que des racines réelles, l'équation $f(x) = 0$, a des racines imaginaires (1).

En effet, dans le produit effectué $[f(x) . \varphi(x)]$, le coefficient du terme en x^{m-p} est

$$\alpha_q a_{p+q-1} + \dots + \alpha_2 a_{p+1} + \alpha_1 a_p ;$$

1. Journal de mathématiques spéciales, 1883, p. 25. (Note sur le théorème de Descartes, par M. Walecki.)

et celui de x^{m-p-1}

$$\alpha_q a_{p+q} + \dots + \alpha_2 a_{p+2} + \alpha_1 a_{p+1}.$$

Ces deux coefficients sont nuls, par hypothèse. D'après la propriété que nous avons établie, tout à l'heure (§ 489), il y a donc des racines imaginaires, dans l'équation proposée.

491. Corollaires. Du théorème précédent découlent diverses conséquences ; nous indiquerons seulement les deux propriétés suivantes :

1° *Si trois termes consécutifs sont en progression géométrique, il y a des racines imaginaires (théorème de M. Hermite).*

En désignant par t la raison de la progression, on multiplie $f(x)$, par $(1 - tx)$.

2° *Si quatre termes consécutifs sont en progression arithmétique, il y a des racines imaginaires.*

Dans ce cas, le facteur $\varphi(x)$ est égal à $(1 - 2x + x^2)$.

492. Théorème de Budan. *Étant donnée une équation $f(x) = 0$, du degré m, qui a toutes ses racines réelles, si dans la suite*

$$\text{(A)} \qquad f(x), \quad f'(x), \dots f^{(m-1)}(x), \ \dots f^{(m)}(x);$$

on substitue successivement à x, les nombres α et *β, $(\alpha < \beta)$; il existe, dans l'intervalle (α, β), autant de racines réelles, qu'il y a de variations perdues dans cette suite, quand on compare les résultats des deux substitutions* [1].

Posons

$$x = X + \lambda,$$

1. Le théorème donné par Budan et par Fourier est plus général que celui que nous venons d'énoncer. Budan et Fourier ont montré que le nombre des variations perdues était supérieur, ou égal, au nombre des racines réelles comprises dans l'intervalle considéré. Le théorème de Sturm ne laisse plus guère d'intérêt, qu'au cas particulier qui nous occupe ici.

L'équation transformée est

$$f(X+\lambda)=f(\lambda)+Xf'(\lambda)+\frac{X^2}{1.2}f''(\lambda)+\ldots+\frac{X^m}{m!}f^{(m)}(\lambda)=0.$$

Cette équation a toutes ses racines réelles; par suite, elle admet autant de racines positives qu'il y a de variations dans la suite

$$f(\lambda),\quad f'(\lambda),\ldots f^{(m)}(\lambda).$$

En désignant par z_α le nombre des variations de la suite (A), pour $x=\alpha$, on voit donc que le nombre des racines supérieures à α est égal à z_α. En appliquant cette remarque à la valeur β, donnée à x, on voit, finalement, que les racines comprises entre α et β sont comptées par les unités de la différence $(z_\alpha - z_\beta)$.

493. Remarque de Jacobi. Nous ferons ici une dernière remarque, laquelle a pour but, comme le théorème précédent, de rechercher le nombre des racines comprises dans un intervalle donné (α, β), lorsque l'équation considérée a toutes ses racines réelles.

Soit $f(x)=0$, l'équation proposée; et soit posé

$$y=\frac{x-\alpha}{\beta-x}.$$

L'équation transformée $\varphi(y)=0$ a toutes ses racines réelles. Si elle présente θ variations, par conséquent, si elle a θ racines positives, la formule de transformation indique qu'il y a θ racines de l'équation $f(x)=0$, dans l'intervalle (α, β).

EXERCICES

1. *Appliquer le théorème des lacunes à l'équation*

$$(m+1)x^m+mx^{m-1}+\ldots+2x+1=0.$$

On multiplie les deux membres par x^2-2x+1.

2. ***Lorsque** les trois premiers coefficients d'une équation, du degré m, sont :* $1, m, \frac{m(m-1)}{2}$ *cette équation a des racines imaginaires.*

On remarque que l'équation proposée peut être écrite sous la forme

$$(x+1)^m + \varphi(x) = 0,$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière du degré $(m-3)$, tout au plus. En posant $x+1=y$, le théorème des lacunes révèle la présence des racines imaginaires.

3. *Si quatre coefficients consécutifs sont A, B, A, B : l'équation proposée admet des racines imaginaires.*

On multiplie par (x^2-1).

4. *Si 3A, —A, —A, 3A désignent quatre coefficients consécutifs d'une équation, celle-ci possède des racines imaginaires.*

On multiplie par x^2+2x+1.

5. *Lorsqu'une équation a toutes ses racines réelles, si l'on désigne par P, Q, R trois coefficients consécutifs quelconques, on a toujours*

$$Q^2 - PR > 0.$$

(De Gua).

Cette proposition se vérifie facilement pour les trois premiers coefficients. On a, en effet,

$$(A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots)(x-\lambda) = A_0x^{m+1} + (A_1 - A_0\lambda)x^m + (A_2 - A_1\lambda)x^{m-1} + \ldots$$

Prenons $\lambda = \frac{A_1}{A_0}$, le coefficient de x^{m-1} est alors $A_2 - \frac{A_1^2}{A_0}$ et comme dans l'équation proposée $f(x)=0$ il n'y a pas de racines imaginaires, l'équation $(x-\lambda)f(x)=0$ jouit, elle aussi, de cette propriété. La lacune qui provient de la disparition du terme en x^m doit donc se produire entre deux termes ayant des signes contraires. On a donc

$$A_0\left(A_2 - \frac{A_1^2}{A_0}\right) < 0,$$

ou

$$A_1^2 - A_0A_2 > 0.$$

Cette remarque étant faite, on considère quatre coefficients consécutifs A, B, C, D. Soit

$$f(x) = \ldots Ax^p + Bx^{p-1} + Cx^{p-2} + Dx^{p-3} + \ldots$$

on a

$$(x-\lambda)f(x)=\ldots(\mathrm{B}-\mathrm{A}\lambda)x^p+(\mathrm{C}-\mathrm{B}\lambda)x^{p-1}+(\mathrm{D}-\mathrm{C}\lambda)x^{p-2}+\ldots$$

L'équation

$$(x-\lambda)f(x)=0$$

a toutes ses racines réelles si λ est réel, on voit donc que trois coefficients consécutifs ne peuvent pas être en progression géométrique. (Théorème de M. Hermite.) L'équation

$$(\mathrm{C}-\mathrm{B}\lambda)^2=(\mathrm{B}-\mathrm{A}\lambda)(\mathrm{D}-\mathrm{C}\lambda)$$

ou

$$\lambda^2(\mathrm{B}^2-\mathrm{AC})-\lambda(\mathrm{BC}-\mathrm{AD})+\mathrm{C}^2-\mathrm{BD}=0$$

a donc ses racines imaginaires. Les deux nombres $\mathrm{C}^2-\mathrm{BD}$, et $\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}$, ont donc le même signe. Le théorème de de Gua découle de cette remarque.

On voit aussi, comme l'a remarqué M. Catalan, *que quatre coefficients consécutifs quelconques* A, B, C, D; *d'une équation, n'ayant que des racines réelles, vérifient toujours la relation*

$$(\mathrm{BC}-\mathrm{AD})^2-4(\mathrm{B}^2-\mathrm{AC})(\mathrm{C}^2-\mathrm{BD})<0.$$

6. *Si quatre coefficients consécutifs sont quatre termes consécutifs de la suite de Lamé, l'équation a des racines imaginaires.*

Les coefficients considérés sont p, q, $p+q$, $p+2q$; et, pour démontrer la proposition, on multiplie par x^2-x-1.

7. *Si quatre coefficients consécutifs sont* $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, B, A, $\mathrm{B}-\mathrm{A}$: *l'équation a des racines imaginaires.*

Il suffit de multiplier par x^2+x-1.

8. *Si neuf coefficients consécutifs sont* A, B, C: A, B, C: A, B, C: *l'équation a 4 racines imaginaires, au moins.*

On multiplie par x^3-1; on produit ainsi une lacune de 6 termes et comme l'on a introduit deux racines imaginaires seulement il y en avait donc 4, au moins, dans l'équation proposée.

On peut facilement généraliser cette propriété.

9. *L'équation* $f(x)=0$

$$f(x)=\mathrm{U}+\mathrm{A}x^p+\mathrm{B}x^{p-1}-\mathrm{A}x^{p-2}+\mathrm{C}x^{p-3}+\mathrm{A}x^{p-4}+\mathrm{V},$$

si l'on suppose que U *et* V *n'offrent que des permanences, et que* A, B, C *soient des nombres positifs, a des racines imaginaires.*

On remarque que $(x^2+1)f(x)$ n'a que des permanences. L'équation $f(x)=0$ n'a donc pas de racines positives et comme elle offre deux variations, on a $\mathrm{V}-\mathrm{P}=2$.

10. *Lorsque les trois premiers coefficients d'une équation sont* 1, p, $\frac{p(p+1)}{2}$ *elle a des racines imaginaires, si l'on suppose* $p(p+m) > 0$.

On remarque que l'équation proposée peut s'écrire

$$\left(x+\frac{p}{m}\right)^m + \frac{p(p+m)}{2m}x^{m-2} + \ldots + \quad = 0.$$

On pose alors $x+\frac{p}{m} = y$ et il se produit, dans l'équation transformée, une lacune entre deux termes de même signe. Dans le cas de $p = -m$ on retrouve l'exercice (2), avec une légère modification.

11. *Si cinq coefficients consécutifs sont*

$$A,\ B,\ C,\ (2B - A),\ (2C - B)\ ;$$

l'équation a des racines imaginaires.

On emploie le multiplicateur $x^3 - 2x + 1$; on remarque d'ailleurs que l'équation

$$x^3 - 2x + 1 = 0,$$

a toutes ses racines réelles, car l'on a

$$(x^3 - 2x + 1) = (x - 1)(x^2 + x - 1).$$

12. *Si cinq coefficients consécutifs* A, B, C, D, E *vérifient la relation*

$$(BE - CD)^2 = (B^2 - AC)[(BD - AE) + AC - B^2],$$

l'équation a des racines imaginaires.

On multiplie par

$$x^3 - (\alpha^2 + 1)x + \alpha,$$

en remarquant que l'on a

$$x^3 - (\alpha^2 + 1)x + \alpha = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x - 1).$$

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON

THÉORÈME DE STURM.

Les différents théorèmes que nous avons exposés jusqu'ici, indiquent bien, dans certains cas particuliers, la présence des racines imaginaires dans une équation donnée, mais aucun d'eux ne résout complètement le problème fondamental de la résolution des équations numériques, celui qui se propose de *donner le nombre des racines réelles comprises dans un intervalle donné*. « L'Agèbre offrait ainsi une lacune regrettable, mais cette lacune se trouva comblée de la manière la plus heureuse par le fameux théorème de Sturm. Ce grand géomètre communiqua à l'Académie des Sciences, en 1829, la démonstration de son théorème qui constitue l'une des plus brillantes découvertes dont se soit enrichie l'analyse mathématique [1]. »

494. Définition des fonctions de Sturm. Soit $V = 0$, une équation qui n'a que des racines simples; désignons par V_1 la dérivée du polynôme V.

En divisant V par V_1, on obtient un quotient Q_1, et un reste que nous désignerons par V_2, *après l'avoir changé de signe*. On a, d'après cela,

$$V = V_1 Q_1 - V_2.$$

Divisons maintenant V_1 par V_2; soit Q_2 le quotient, et V_3 *le reste changé de signe*; on a encore.

$$V_1 = V_2 Q_2 - V_3.$$

1. Serret, *Algèbre supérieure*.

Si l'on poursuit ces opérations, qui ne sont autre chose que celles que l'on fait pour chercher le plus grand commun diviseur des polynômes V et V_1, on aboutit à un reste numérique, puisque V et V_1 sont des polynômes premiers entre eux. En désignant par V_h le dernier reste, *changé de signe*, on a l'identité finale

$$V_{h-2} = V_{h-1}Q_{h-1} - V_h.$$

Les polynômes

$$V, V_1, V_2, \dots V_{h-1}, V_h,$$

ainsi définis, constituent la suite des fonctions de Sturm.

On voit, en particulier, que la première des fonctions de Sturm est le premier membre de l'équation proposée ; la deuxième est la dérivée de la première fonction ; enfin la dernière est une quantité numérique, autre que zéro.

495. Théorème de Sturm. *Si dans la suite de Sturm on substitue à x, successivement les nombres α et β ($\alpha < \beta$) ; le nombre ζ_β des variations obtenues, dans cette suite, par la seconde substitution est égal, ou supérieur, au nombre ζ_α des variations qui correspondent à α. Dans le premier cas ($\zeta_\beta - \zeta_\alpha = 0$), il n'y a aucune racine réelle dans l'intervalle (α, β) ; dans le second cas ($\zeta_\beta - \zeta_\alpha = k$), il y a k racines réelles dans l'intervalle (α, β).*

La démonstration de ce théorème remarquable repose sur diverses propriétés que nous établirons successivement.

Première propriété. *Deux fonctions consécutives de la suite de Sturm ne peuvent pas s'annuler, pour une même valeur de x.*

Cette propriété est évidente pour les deux dernières fonctions V_{h-1}, V_h ; puisque celle-ci est un nombre différent de zéro : elle se vérifie aussi pour les deux premières fonctions V et V_1, parce que l'équation $V = 0$ n'a que des racines simples. Il reste à la démontrer pour deux fonctions

$$V_i, V_{i+1}$$

V_i n'étant pas la première, et V_{i+1} la dernière, des fonctions de Sturm.

On a, dans cette hypothèse,

$$V_i = V_{i+1}Q_{i+1} - V_{i+2}.$$

Cette identité prouve que si V_i et V_{i+1}, s'annulent pour $x = \alpha$, V_{i+2} s'annule aussi pour cette même valeur de x. D'après cette remarque toutes les fonctions de Sturm qui suivent V_i s'annulent donc pour $x = \alpha$: cette conclusion ne peut être acceptée, puisque l'on a $V_h \neq 0$.

Autrement. On peut encore raisonner ainsi : V_i n'étant pas la première fonction de Sturm, on a

$$(1) \quad V_{i-1} = V_iQ_i - V_{i+1}$$

Par suite V_{i-1}, et toutes les fonctions de Sturm qui précèdent V_i, en particulier, les deux premières fonctions V et V_1, s'annuleraient donc pour $x = \alpha$: α serait une racine multiple de l'équation $V = 0$; ceci est en contradiction avec l'hypothèse.

Deuxième propriété. *Lorsqu'une fonction de Sturm, qui n'est ni la première, ni la dernière, s'annule pour $x = \alpha$; le nombre des variations de la suite est le même, un peu avant le passage par α, et un peu après.*

Remarquons d'abord que la dernière fonction de Sturm est une quantité numérique différente de zéro; elle n'est donc jamais nulle. Nous nous réservons d'examiner tout à l'heure le cas où la première fonction V, passe par zéro; et, pour le moment nous voulons seulement observer le passage par zéro, d'une fonction V_i, qui n'est ni la première, ni la dernière.

Dans cette hypothèse, on a

$$V_{i-1} = V_iQ_i - V_{i+1}.$$

Soit α une racine réelle de l'équation $V_i = 0$. Ce nombre α

n'est pas racine de l'équation $V_{i-1} = 0$, ni de l'équation $V_{i+1} = 0$ (*première propriété*). Lorsque x varie dans l'intervalle $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, les fonctions V_{i-1} et V_{i+1} conservent donc le signe qu'elles possèdent au moment du passage de x, par la valeur α.

Or, l'identité (1) montre que, pour $x = \alpha$, V_{i-1} et V_{i+1} ont des valeurs égales et de signes contraires. Ceci prouve qu'un peu avant, et un peu après le passage, V_{i-1} et V_{i+1} ont des valeurs de signes contraires.

Si, avant le passage, les fonctions V_{i-1}, V_i, V_{i+1} donnent lieu au tableau suivant :

$$\begin{matrix} V_{i-1} & V_i & V_{i+1}; \\ + & + & - \end{matrix}$$

un peu après le passage, on aura

$$+ \quad - \quad -.$$

ou

$$+ \quad + \quad -$$

suivant que V_i s'est annulé en changeant, ou en ne changeant pas, de signe. Dans tous les cas, les trois fonctions V_{i-1}, V_i, V_{i+1} présentent le même nombre de variations, un peu avant, et un peu après, le passage de x par une racine de l'équation $V_i = 0$. Le seul effet produit dans les variations, par ce passage, est le déplacement de l'une d'elles ; encore faut-il que V_i s'annule, en changeant de signe ; dans cette hypothèse la variation se déplace, de la droite vers la gauche ; le nombre total des variations n'étant d'ailleurs nullement modifié.

Troisième propriété. *Toutes les fois que la variable x, passe par une racine de l'équation $V = 0$, il y a perte d'une variation dans la suite de Sturm.*

Nous savons en effet (§ 467), que V et V_1 ont des signes contraires, avant le passage de x par une racine de l'équation

$V = 0$; et qu'elles ont le même signe, après ce passage. Il y a donc perte d'une variation dans la suite de Sturm, toutes les fois que la variable x passe par une racine de l'équation proposée.

Conclusion. Le théorème de Sturm est la conséquence immédiate, et évidente, des remarques qui précèdent. Imaginons que x varie dans l'intervalle (α, β), α étant plus petit que β. La suite de Sturm perd autant de variations qu'il y a de racines réelles dans cet intervalle. S'il y a le même nombre de variations, pour $x = \alpha$, et pour $x = \beta$, on peut affirmer qu'il n'y a aucune racine de l'équation $V = 0$, entre α et β ; sinon, le nombre des variations perdues indique, exactement, le nombre des racines réelles renfermées dans l'intervalle considéré.

496. Second énoncé du théorème de Sturm; les limites étant $-\infty$ et $+\infty$. *Le nombre des couples des racines imaginaires de l'équation* $V = 0$, *est égal au nombre des variations de la suite formée par les premiers coefficients des fonctions de Sturm.*

Soient $1, m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ les premiers coefficients des fonctions de Sturm et considérons les deux suites :

$$\text{(A)} \quad 1, -m, +\alpha_1, \ldots +(-1)^m \alpha_{m-1},$$

$$\text{(B)} \quad 1, +m, +\alpha_1, \ldots +\alpha_{m-1}.$$

Soit z le nombre des variations de la suite (A); z' celui des termes de la suite (B). Si dans les fonctions de Sturm on substitue d'abord $-\infty$, on obtient z variations ; en substituant $+\infty$ on en a z'; par suite le nombre R, des racines réelles, est donné par la formule

$$(1) \quad R = z - z'.$$

D'autre part l'examen des suites (A) et (B) prouve que deux termes consécutifs présentent une variation soit dans (A), soit dans (B), et une seule. On a, d'après cette remarque, et en observant qu'il y a $(m + 1)$ termes, dans chacune de ces suites,

$$(2) \quad z + z' = m.$$

Les relations (1) et (2) donnent,

$$m - R = I = 2z'.$$

Il y a donc autant de couples de racines imaginaires que d'unités, dans le nombre z'.

497. Corollaire I. *Pour qu'une équation ait toutes ses racines réelles, il est nécessaire et suffisant que les premiers coefficients des fonctions de Sturm soient positifs.*

La formule $I = 2z'$, que nous venons d'établir, prouve : 1° que si l'on a $z' = 0$, on a aussi $I = 0$: la condition est donc suffisante ; 2° qu'en supposant $I = 0$, on a pareillement $z' = 0$: la condition est donc nécessaire.

498. Remarque. La méthode de Sturm conduit aux $(m-1)$ conditions suivantes

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \ldots \quad \alpha_{m-1} > 0.$$

Ces inégalités, lorsqu'elles sont vérifiées, expriment que l'équation $V = 0$ a toutes ses racines réelles ; les nombres α étant, nous le rappelons, les premiers coefficients des fonctions de Sturm. Ces conditions ne sont pas nécessairement distinctes, et nous le montrerons tout à l'heure, en appliquant la méthode de Sturm à l'équation générale du troisième degré. Il y a même, toujours, entre ces nombres α, une sorte de dépendance de laquelle il résulte qu'il n'est pas possible d'écrire les inégalités

$$\alpha_1 \gtrless 0, \quad \alpha_2 \gtrless 0, \quad \ldots \quad \alpha_{m-1} \gtrless 0,$$

dans un sens arbitraire. Par exemple on ne peut pas avoir

$$\alpha_1 < 0, \; \alpha_2 > 0, \; \ldots \; \alpha_{2h+1} < 0, \; \alpha_{2h} > 0, \text{ etc...}$$

En effet le nombre z' des variations de la suite (A) serait alors égal à m, et l'on aurait $I = 2m$; résultat évidemment impossible. Pourtant cette remarque sur la dépendance des nombres α, n'entraîne pas, avec elle, cette conclusion que les

conditions trouvées par la méthode de Sturm rentrent, nécessairement, les unes dans les autres. Le cas de l'équation bicarrée, que nous examinons plus loin, met ce point hors de doute.

499. Corollaire II. *Lorsque l'équation obtenue en égalant à zéro une des fonctions de Sturm a $2k$ racines imaginaires; ou encore, soit $2k$, soit $2k+1$ racines égales; l'équation proposée admet, au moins, $2k$ racines imaginaires.*

Considérons trois fonctions de Sturm

$$V_{i-1}, \quad V_i, \quad V_{i+1};$$

et reportons-nous à la démonstration donnée plus haut. On doit observer que si l'équation $V = 0$ a toutes ses racines réelles il est nécessaire, non seulement que les $(m-i)$ racines de l'équation $V_i = 0$ soient réelles et distinctes, mais encore que V_i s'annule, en changeant de signe, et de telle sorte que la variation que présente les fonctions V_{i-1}, V_i, V_{i+1} *se déplace de la droite vers la gauche*. Si pour un motif, ou pour un autre, cette condition essentielle ne se trouve pas réalisée, si notamment l'équation $V_i = 0$ a $2k$ racines imaginaires, ou, dans d'autres cas, soit $2k$, soit $(2k+1)$ racines égales; la fonction V_i ne laisse passer que $m-i-2k$ variations, au lieu de $m-i$. Il y a donc, certainement, $2k$ racines imaginaires dans l'équation proposée.

500. Examen du cas des racines égales. Nous allons maintenant montrer que, sauf une réserve essentielle, et que nous formulerons plus loin, la méthode de Sturm s'applique encore au cas où l'équation $V = 0$ a des racines égales.

Supposons donc que V, et sa dérivée V_1, admettent un plus grand commun diviseur D. Le calcul qui donne ce polynôme D fournit les identités suivantes

$$(1) \quad \begin{aligned} V &= V_1Q_1 - W_2 \\ V_1 &= W_2Q_2 - W_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_{t-2} &= W_{t-1}Q_{t-1} - W_t \end{aligned}$$

W_2, W_3, ... W_t désignant, bien entendu, non les restes des divisions successives, *mais les restes changés de signe.* On remarquera aussi que si W_t représente, comme nous le supposons, le reste de la division qui précède celle qui se fait exactement, nous avons

$$W_t = D.$$

Nous pouvons aussi observer que D divisant V et V_1, divise exactement W_2, par suite W_3 et, en général, tous les polynômes de la suite

$$V,\ V_1,\ W_2,\ W_3,\ \dots\ W_{t-1},\ W_t.$$

Posons donc

$$v = \left(\frac{V}{D}\right),\ v_1 = \left(\frac{V_1}{D}\right),\ v_2 = \left(\frac{W_2}{D}\right), \dots\ v_t = \left(\frac{W_t}{D}\right);$$

les termes de la suite

$$v,\ v_1,\ v_2,\ \dots\ v_t;$$

seront des polynômes entiers et le dernier d'entre eux v_t, est égal à l'unité Ces polynômes vérifient, d'ailleurs, les identités suivantes

$$(2)\qquad \begin{array}{l} v = v_1 Q_1 - v_2 \\ v_1 = v_2 Q_2 - v_3 \\ \dots\dots\dots \\ v_{t-2} = v_{t-1} Q_{t-1} - v_t \end{array} \qquad (v_t = 1)$$

relations qui découlent des identités (1), en divisant par D, les deux membres de chacune d'elles.

Ces fonctions v, v_1, ... v_t donnent lieu aux remarques suivantes.

1° *Le rapport* $\left(\frac{v}{v_1}\right)$ *passe du négatif au positif, quand la variable x passe par une racine de l'équation $v = 0$.*

On a, effet

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\left(\frac{V}{D}\right)}{\left(\frac{V_1}{D}\right)}.$$

Le rapport $\frac{V}{V_1}$ passe du négatif au positif quand x passe par une racine de l'équation $V = 0$; d'ailleurs, abstraction faite de la multiplicité des racines, les équations $v = 0$ et $V = 0$ ont les mêmes racines, les rapports $\frac{v}{v_1}$ et $\frac{V}{V_1}$ ayant, à chaque instant, des valeurs égales, la remarque énoncée est donc vérifiée.

Les deux propriétés qui suivent résultent des identités (2); leur démonstration est toute semblable à celle que nous avons donnée plus haut, pour établir les propriétés semblables, dans les fonctions de Sturm. Il nous suffit donc de les énoncer.

2° *Lorsque la variable x passe par une racine d'une des équations $v_1 = 0, \ldots v_{t-1} = 0$, la suite*

$$(3) \quad v, v_1, \ldots v_t$$

ne perd aucune variation.

3° *Lorsque, au contraire, x passe par une racine de l'équation $v = 0$, il y a, dans la suite précédente, perte d'une variation.*

De ces trois propriétés des fonctions v on conclut qu'en substituant successivement α et β, dans la suite (3), le nombre des variations perdues indique, exactement, le nombre des racines réelles comprises dans l'intervalle (α, β).

On doit, d'ailleurs, remarquer ici qu'il n'est pas nécessaire de calculer les fonctions (3) et qu'on peut leur substituer la suite

$$(4) \quad V, V_1, W_2, \ldots W_t;$$

fonctions qui sont fournies par la méthode ordinaire de Sturm.

Ceci tient à ce que les suites (3) et (4) ne différant que par un facteur commun D (positif ou négatif, il n'importe), elles présentent le même nombre de variations, pour une valeur donnée de x.

En résumé, on pourra donc appliquer la méthode de Sturm à une équation ayant des racines égales, mais avec cette restriction importante, que le nombre des variations perdues, pour $x = \alpha$, et pour $x = \beta$, indique seulement *le nombre des racines distinctes comprises dans l'intervalle* (α, β); *abstraction faite de leur degré de multiplicité*.

501. Généralisation du théorème de Sturm. Nous avons remarqué, dans le paragraphe précédent, que la méthode de Sturm s'applique à des fonctions qui ne sont pas celles qui constituent ordinairement la suite de Sturm, mais qui jouissent, pourtant, de ce qu'on peut nommer les propriétés essentielles des polynômes de Sturm; ces propriétés étant celles qui sont indispensables à la démonstration que nous avons donnée, plus haut, pour établir le théorème de Sturm. Il résulte, de là, une généralisation de ce théorème qui, ainsi étendu, peut s'énoncer dans la forme suivante :

Soit

$$(A) \qquad U, \quad U_1, \quad U_2, \ \dots \ U_k;$$

une suite de polynômes entiers remplissant les conditions suivantes :

1° $\dfrac{U}{U_1}$ *est négatif avant le passage de x par une racine de l'équation* $U = 0$; *il est positif après le passage.*

2° U_k *conserve le même signe, quand x varie entre α et β.*

3° *Trois fonctions* U *consécutives, quelconques, vérifient l'identité*

$$U_{i-1} = U_i Q_i - U_{i+1} :$$

alors l'équation $U = 0$, *a autant de racines réelles dans l'intervalle* (α, β) *qu'il y a de variations perdues dans la suite* (A) *quand on y substitue à x, successivement, les valeurs α et β.*

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE STURM.

502. Équation du troisième degré. 1° *Forme réduite.* Considérons d'abord l'équation

$$x^3+px+q=0.$$

Le tableau des fonctions de Sturm est alors

$$V=x^3+px+q$$
$$\frac{1}{3}V_1=x^2+\frac{p}{3}$$
$$V_2=-\frac{2}{3}px-q$$
$$V_3=-\frac{4p^3+27q^2}{12p^2}.$$

Elles sont obtenues par le calcul suivant :

	x	$-\frac{3}{2p}x-\frac{9q}{4p^2}$
x^3+px+q	$x^2+\frac{p}{3}$	$-\frac{2}{3p}x-q$
$\frac{2p}{3}x+q$	$-\frac{3q}{2p}x+\frac{p}{3}$	
	$\frac{9q^2}{4p^2}+\frac{p}{3}$	

Les conditions nécessaires et suffisantes, pour établir la réalité des racines de l'équation $V=0$, sont donc

$$p<0 \quad 4p^3+27q^2<0$$

qui rentrent l'une dans l'autre; elles se réduisent, en effet, à la condition unique

$$4p^3+27q^2<0.$$

2° *Forme générale.* Considérons maintenant l'équation générale du troisième degré

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

Les fonctions de Sturm sont alors :

$$V = x^3 + px^2 + qx + r$$

$$\frac{1}{3}V_1 = x^2 + \frac{2p}{3}x + \frac{q}{3}$$

$$9V_2 = 2(p^2 - 3q)x + pq - 9r$$

$$2(p^2 - 3q)^2 V_3 = -\left\{(pq - 9r)^2 - 2\frac{p}{3}(p^2 - 3q)(pq - 9r) + 4\frac{q}{3}(p^2 - 3q)^2\right\}.$$

Ces fonctions sont données par les calculs suivants :

Calcul de V_2.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + px^2 + qx + r & x^2 + \frac{2p}{3}x + \frac{q}{3} \\ \cline{2-2} \frac{p}{3}x^2 + \frac{2q}{3}x + r & x + \frac{p}{3} \\ \left(\frac{2q}{3} - \frac{2p^2}{9}\right)x + r - \frac{pq}{9} & \end{array}$$

$$9V_2 = 2(p^2 - 3q)x + pq - 9r.$$

Calcul de V_3.

$(p^2 - 3q \neq 0)$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + \frac{2p}{3}x + \frac{q}{3} & 2(p^2 - 3q)x + pq - 9r \\ \cline{2-2} x\left(\frac{2p}{3} - \frac{pq - 9r}{2(p^2 - 3q)}\right) + \frac{q}{3} & \frac{x}{2(p^2 - 3q)} + \frac{\frac{2p}{3} - \frac{pq - 9r}{2(p^2 - 3q)}}{2(p^2 - 3q)} \end{array}$$

$$V_3 = -\frac{q}{3} + \frac{(pq - 9r)}{2(p^2 - 3q)}\left(2\frac{p}{3} - \frac{pq - 9r}{2(p^2 - 3q)}\right)$$

$$12(p^2 - 3q)^2 V_3 = -4\frac{q}{3}(p^2 - 3q)^2 + 4\frac{p}{3}(p^2 - 3q)(pq - 9r) - (pq - 9r)^2.$$

On trouve ainsi, pour exprimer la réalité des trois racines de l'équation, les deux inégalités,

$$\text{(A)} \quad p^2 - 3q > 0$$

$$\text{(B)} \quad (pq - 9r)^2 - 4\frac{p}{3}(p^2 - 3q)(pq - 9r) + 4\frac{q}{3}(p^2 - 3q)^2 < 0.$$

Ces conditions rentrent d'ailleurs l'une dans l'autre. (**Ex. 4.**)

508. Équation bicarrée. Considérons, enfin, l'équation

$$x^4 + px^2 + q = 0.$$

On a, dans ce cas,

$$\begin{aligned} V &= x^4 + px^2 + q \\ \frac{1}{4}V_1 &= x^3 + \frac{p}{2}x \\ V_2 &= -\frac{p}{2}x^2 - q \\ V_3 &= \frac{4q - p^2}{2p}x \\ V_4 &= q. \end{aligned}$$

Ces fonctions sont données par les calculs développés ci-dessous.

Calcul de V_2.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + px^2 + q & x^3 + \frac{p}{2}x \\ \hline \frac{px^2}{2} + q & x \end{array}.$$

Calcul de V_3.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + \frac{px}{2} & -\frac{px^2}{2} - q \\ \hline \left(\frac{p}{2} - \frac{2q}{p}\right)x & -\frac{2x}{p} \end{array}.$$

Calcul de V_4.

$$\begin{array}{r|l} -\frac{px^2}{2} - q & \frac{4q - p^2}{2p}x \\ \hline -q & -\frac{p^2}{4q - p^2}x \end{array}.$$

Les conditions, pour la réalité des quatre racines de l'équation $V = 0$, sont donc

$$p < 0, \quad p(p^2 - 4q) < 0, \quad q > 0$$

ou

$$p < 0, \quad p^2 - 4q > 0, \quad q > 0.$$

Ces conditions ne rentrent pas les unes dans les autres.

Nous ferons remarquer ici que si les conditions, en nombre $(m - 1)$, fournies par la méthode de Sturm, ne se réduisent pas *d'elles-mêmes, et dans tous les cas,* à un nombre moindre, rien ne prouve qu'il ne soit pas possible, par une combinaison convenablement faite sur elles, de les remplacer par des conditions qui sont suffisantes pour exprimer que les m racines de l'équation proposée sont réelles ; le nombre de ces relations étant inférieur à $(m - 1)$. C'est ainsi que, dans le cas de l'équation bicarrée, les trois conditions que nous avons trouvées

$$p < 0, \quad p^2 - 4q > 0, \quad q > 0;$$

peuvent être remplacées par les deux inégalités

$$p < 0 \quad q(p^2 - 4q) > 0.$$

En effet, le produit $q(p^2 - 4q)$ ne peut être positif que si les deux facteurs ont le même signe. Mais on ne peut avoir, simultanément

$$q < 0 \quad \text{et} \quad p^2 - 4q < 0.$$

On a donc, nécessairement,

$$q > 0 \quad \text{et} \quad p^2 - 4q > 0.$$

504. Remarque. En appliquant la méthode de Sturm à une équation $V = 0$, il faut bien noter que les dividendes ou diviseurs peuvent être multipliés par des facteurs numériques, *mais non par des facteurs algébriques,* dont le signe ne serait pas constant, et connu.

EXERCICES

1. *Soit* $V = 0$, *une équation ayant toutes ses racines réelles et distinctes. On sait* (§ 499) *que l'équation* $V_i = 0$, V_i *étant un des polynômes de Sturm, a toutes ses racines réelles. Démontrer que ces nombres séparent les racines de l'équation* $V_{i+1} = 0$.

2. *Ayant posé*

$$V_n = x^n + \frac{1}{x^n}$$

et

$$x + \frac{1}{x} = y$$

on sait que $V_n = 0$ *est une équation du degré n en y* (§ 146). *Démontrer que les n racines de cette équation sont réelles, distinctes, et comprises entre* $+2$ *et* -2.

On considère la suite

$$V_n, \quad V_{n-1}, \ldots V_1, \quad V_0. \quad (V_0 = 2)$$

Trois termes consécutifs de cette suite vérifient l'identité

$$V_i = V_{i-1} - V_{i-2}.$$

Il en résulte que la suite ne peut perdre de variation que si y passe par une racine de $V_n = 0$. On remarque d'ailleurs que pour $y = -2$, on a

$$V_0 = +2, \quad V_1 = -2, \quad V_2 = +2, \text{ etc..}$$

et, pour $y = +2$,

$$V_0 = 2, \quad V_1 = 2, \quad V_2 = 2, \text{ etc...}$$

Il y a donc n variations perdues;

3. *Les notations de l'exercice précédent étant conservées, démontrer que si l'on pose*

$$U_n = V_n + V_{n-1} + \ldots + V_1 + 1$$

l'équation

$$U_n = 0$$

a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre $+2$ *et* -2.

Des relations

$$V_n = yV_{n-1} - V_{n-2}$$
$$V_{n-1} = yV_{n-2} - V_{n-3}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$V_2 = yV_1 - 2,$$

on déduit

$$U_n - V_1 - 1 = y(U_{n-1} - 1) - U_{n-2} - 1,$$

ou

$$U_n = yU_{n-1} - U_{n-2}.$$

On substitue successivement -2 et $+2$ dans la suite:

$$U_0,\quad U_1,\ \dots\ U_{n-1},\ U_n.\quad (U_0 = 0)$$

On trouve, d'abord,

$$+1,\quad -1,\quad +1,\ \text{etc...}$$

puis,

$$1,\quad 3,\quad 5,\ \text{etc...}$$

4. *Reconnaître que les deux conditions trouvées* (§ 502), *rentrent l'une dans l'autre.*

Le premier membre de l'inégalité (B) peut être considéré comme un trinôme du second degré par rapport à $(pq - 9r)$. En cherchant à décomposer ce trinôme en facteurs, on trouve que la quantité soumise au radical est $\frac{4}{9}(p^2 - 3q)^3$. Si l'on avait $p^2 - 3q < 0$, la décomposition serait impossible et le trinôme considéré aurait constamment le signe de son premier terme, c'est-à-dire le signe $+$.

TRENTE-HUITIÈME LEÇON

MÉTHODES D'APPROXIMATION. — MÉTHODE DE NEWTON.

505. Le problème qui va nous occuper dans cette leçon peut être défini dans les termes suivants :

Étant donné un nombre α_1, représentant une valeur approchée d'une racine incommensurable x' de l'équation $f(x) = 0$; l'intervalle (α_1, x') ne renfermant aucune racine de cette équation ; trouver des nombres $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ donnant des valeurs de plus en plus approchées de x', valeurs telles que l'on ait : lim $(\alpha_n - x') = 0$, pour $n = \infty$.

On peut résoudre ce problème par trois méthodes principales; la *méthode de Newton,* celle des *parties proportionnelles ;* enfin par la *méthode de Lagrange.*

Nous exposerons successivement ces trois méthodes; mais elles reposent toutes sur un problème que nous devons préalablement traiter : nous voulons parler de la séparation des racines.

506. Séparation des racines. On dit qu'une racine x', de l'équation $f(x) = 0$, est séparée par l'intervalle (α, β) lorsqu'il n'y a aucune autre racine de l'équation, dans cet intervalle. Si l'on suppose $\alpha < \beta$, α est une valeur approchée par défaut, β une valeur approchée par excès, de la racine x'.

La méthode de Sturm permet de séparer les racines d'une équation donnée.

Substituons, en effet, les nombres α et β dans la suite de

Sturm : s'il y a perte d'une variation, on sait qu'il existe une seule racine de l'équation dans l'intervalle (α, β); cette racine est donc séparée. Supposons maintenant qu'il y ait perte de deux variations; ceci indique la présence de deux racines dans l'intervalle (α, β), et il faut alors séparer ces racines.

A cet effet, on pourra substituer les nombres

$$(1) \quad \alpha, \quad \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \beta.$$

S'il y a perte d'une variation dans l'intervalle $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, les deux racines sont séparées; l'une est située dans cet intervalle; l'autre est comprise entre $\frac{\alpha+\beta}{2}$ et β.

Si, au contraire, il y a perte de deux variations entre deux termes α_1 et β_1 de la suite (1) on pourra considérer la nouvelle suite

$$\alpha_1, \quad \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \quad \beta_1$$

et substituer ces nombres dans la suite de Sturm.

En remarquant que

$$\alpha_1 - \beta_1 = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

l'on voit, qu'au bout de n opérations de ce genre, on aura

$$\alpha_n - \beta_n = \frac{\alpha-\beta}{2^n}.$$

Cette égalité prouve que la différence $(\alpha_n - \beta_n)$ tend vers zéro, quand n croît indéfiniment.

On peut donc dire que la méthode précédente, abstraction faite de la longueur des calculs, conduit, avec certitude, à la séparation des racines.

507. Formule de correction de Newton. Soit α, une valeur approchée, et donnée, d'une racine inconnue x', de

l'équation $f(x) = 0$. Soit h la correction, positive ou négative, qu'il faut ajouter à α pour avoir x'; de telle sorte que

$$x' = \alpha + h.$$

On a d'ailleurs $f(\alpha + h) = 0$, et l'identité connue

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + \frac{h}{1} f'(\alpha) + \frac{h^2}{1.2} f''(\alpha) + \dots + \frac{h^m}{1.2\dots m} f^m(\alpha),$$

donne

$$0 = f(\alpha) + hf'(\alpha) + \dots + \frac{h^m}{1.2\dots m} f^m(\alpha).$$

La méthode de Newton consiste à négliger, dans le second membre, tous les termes qui suivent $hf'(\alpha)$, et à faire subir au nombre α, une correction h_1, donnée par la formule

$$\text{(A)} \quad h_1 = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)};$$

C'est la formule que nous voulions établir.

508. Interprétation géométrique de la formule de correction de Newton. Construisons la courbe dont l'équation est

$$y = f(x);$$

et soit $OA = \alpha$; l'ordonnée correspondante $A'A$, est égale à $f(\alpha)$.

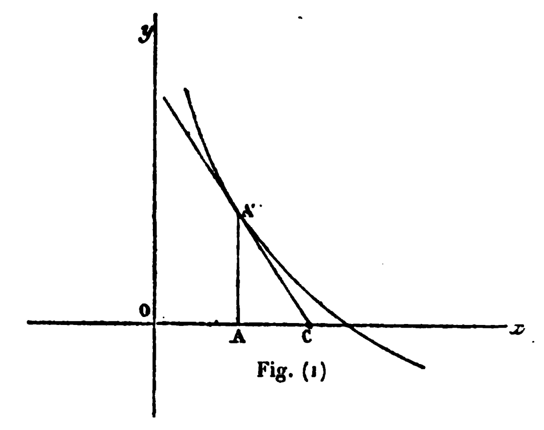


Fig. (1)

Le triangle rectangle A'AC, donne

$$AA' = AC \operatorname{tg} ACA'.$$

D'ailleurs $A'Cx$ est un angle dont la tangente trigonométrique est égale à $f'(x)$. On a donc

$$\operatorname{tg} ACA' = -f'(x),$$

et, par suite,

$$AC = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On a donc $AC = h_1$, et l'on voit ainsi que la méthode de Newton revient, au fond, à chercher l'intersection de la tangente à la courbe, au point considéré, avec l'axe ox.

Cette interprétation géométrique prouve que la formule de correction de Newton peut, suivant les cas, être bonne ou mauvaise; qu'elle peut donner, tantôt une expression plus approchée de la racine et tantôt, au contraire, une valeur qui s'en écartera beaucoup plus que le nombre approché, donné. Dans la figure (1), la méthode de Newton s'appliquerait avec

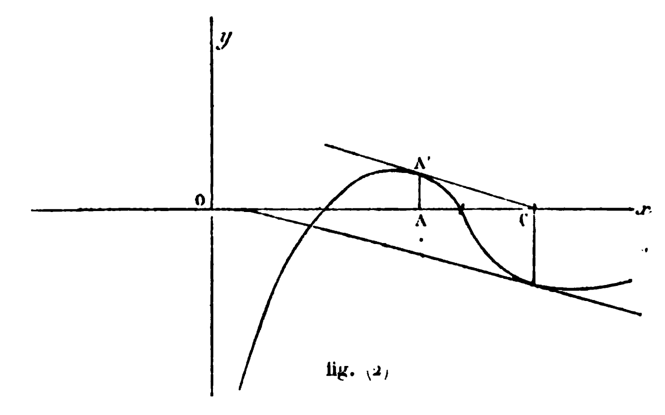


fig. (2)

succès; mais la figure (2) donne un exemple où cette méthode serait absolument en défaut.

Puisque, d'après ces explications, la formule de correction de Newton ne donne pas nécessairement une approximation préférable à la valeur donnée, nous devons, avant d'aller plus loin, rechercher dans quelles conditions il convient de se placer, pour appliquer, avec certitude, la méthode que nous exposons.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, qu'avant tout autre calcul, on ait pu déterminer, par la méthode de Sturm, ou par un autre procédé, deux nombres α et β remplissant les conditions suivantes :

1° *Entre α et β il y a une seule racine de l'équation proposée* $f(x) = 0$.

2° *Dans ce même intervalle, il n'y a aucune racine des équations* $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$.

509. Théorème. *Lorsque $f(\alpha)$ et $f''(\alpha)$ ont le même signe, on peut appliquer la méthode de Newton, avec certitude, au nombre α.*

En effet l'identité établie précédemment (§ 297),

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + \frac{h}{1} f'(\alpha) + \frac{h^2}{2} f''(\alpha+\theta h),$$

donne

$$0 = f(\alpha) + \frac{h}{1} f'(\alpha) + \frac{h^2}{2} f''(\alpha+\theta h).$$

On en tire

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{h^2}{2} \frac{f''(\alpha+\theta h)}{f'(\alpha)},$$

ou bien, puisque $h_1 = -\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$,

$$h = h_1 + h_2;$$

en posant

$$h_2 = -\frac{h^2}{2} \frac{f''(\alpha+\theta h)}{f'(\alpha)}.$$

On a donc

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{h^2}{2} \frac{f''(\alpha + \theta h)}{f(\alpha)}.$$

Nous supposons d'ailleurs : 1° que $f''(\alpha)$ a le même signe que $f(\alpha)$; 2° que $f''(x)$ conserve le même signe, quand x varie entre α et β. En supposant $\beta > \alpha$, pour fixer les idées, on a

$$h < \beta - \alpha,$$

et, *à fortiori*, puisque θ est compris entre zéro et l'unité,

$$\theta h < \beta - \alpha,$$

ou

$$\alpha + \theta h < \beta.$$

Il résulte de cette remarque que le rapport

$$\frac{f''(\alpha + \theta h)}{f(\alpha)}$$

est positif et que, par suite les deux corrections h_1 et h_2 sont *de même sens;* la correction h_1 donne donc une valeur $\alpha + h_1$ qui est comprise entre α, et la racine x'.

510. Théorème. *Lorsque deux nombres α et β, 1° ne comprennent aucune racine des équations $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ 2° sont tels, qu'une seule racine de l'équation $f(x) = 0$ soit comprise dans l'intervalle (α, β); la méthode de Newton s'applique, avec certitude, à l'un de ces nombres, mais à un seul.*

Considérons, en effet, les deux rapports

$$u = \frac{f(\alpha)}{f''(\alpha)}, \quad v = \frac{f(\beta)}{f''(\beta)}.$$

Les numérateurs ont des signes contraires, mais les dénominateurs ont le même signe. L'un des nombres, u ou v, est donc nécessairement positif; au contraire, l'autre est négatif. Si l'on

suppose, par exemple, $u > 0$; la méthode de Newton s'appliquera, avec certitude, au nombre α. Elle peut aussi être appliquée au nombre β; mais, dans ce cas, on ne peut plus affirmer que la valeur corrigée soit plus approchée que la valeur donnée.

511. Théorème. *Si la méthode de Newton a été appliquée, avec certitude, à la valeur α, et si elle a donné une nouvelle valeur α_1, cette méthode s'applique aussi, avec certitude, à α_1.*

Nous avons vu tout à l'heure qu'en prenant la valeur $x = \alpha$, valeur qui rend positif le rapport $\frac{f(x)}{f''(x)}$, la formule de Newton donnait une correction h_1, dans le sens voulu, mais insuffisante pour que $\alpha + h_1$ puisse atteindre, ou dépasser, la racine x'. Ainsi α_1 est compris entre α et x'. D'après cela $f(\alpha)$ et $f(\alpha_1)$ et par suite, les rapports,

$$\frac{f(\alpha)}{f''(\alpha)}, \quad \frac{f(\alpha_1)}{f''(\alpha_1)},$$

ont le même signe, puisque $f''(x)$ conserve un signe constant, quand x varie de α à β. La méthode de Newton s'appliquant à α, avec certitude, on a $\frac{f(\alpha)}{f''(\alpha)} > 0$; par conséquent $\frac{f(\alpha_1)}{f''(\alpha_1)}$ est positif, et la méthode de Newton s'applique aussi, avec certitude, à la valeur approchée α_1.

512. Théorème. *La méthode de Newton, appliquée comme il vient d'être dit, conduit à une limite; cette limite est la racine cherchée x'.*

Supposons, pour plus de précision, que α désigne celle des deux limites α, β à laquelle s'applique la méthode, avec certitude, et soit $\alpha < \beta$.

La formule de correction permet de calculer des nombres

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots \alpha_n;$$

toujours croissants et toujours inférieurs à x'. Ils ont donc

une limite : mais il faut montrer que cette limite est précisément x'.

Je dis d'abord que l'on a

$$(1) \quad \text{Lim}\,(x_n - x_{n-1}) = 0, \text{ (pour } n = \infty).$$

Supposons en effet que cette limite, limite qui existe nécessairement puisque, d'une part, le nombre variable $(x_n - x_{n-1})$ est supérieur à zéro, et qu'il est, d'autre part, inférieur à $(\beta - x)$, soit un nombre k, différent de zéro. En prenant dans l'intervalle $(0, k)$, un nombre fixe k', on aurait, à partir d'un certain moment,

$$x_{i+1} - x_i > k'$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n - x_{n-1} > k'$$

et, par conséquent,

$$x_n - x_i > (n - i)\,k'.$$

En donnant à n une valeur suffisamment grande, le second membre de cette inégalité dépasse toute limite, tandis que le premier membre, quel que soit n, conserve une valeur inférieure à $(\beta - x)$. Ces deux conclusions sont contradictoires, et l'on doit admettre l'égalité (1).

Ceci posé, comme l'on a

$$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

et, aussi,

$$h_n = x_n - x_{n-1};$$

on a donc

$$\text{Lim}\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 0.$$

D'ailleurs $f'(x)$ a une valeur finie, quelle que soit la limite de x_n.

limite qui est elle-même une quantité finie, on a, finalement

$$\lim f(\alpha_n) = 0,$$

ou

$$\lim (\alpha_n) = x',$$

puisqu'il n'y a qu'une seule racine de l'équation $f(x) = 0$, entre α et β.

513. Remarque. La propriété que nous avons établie tout à l'heure (§ 509) et qui est fondamentale dans l'exposition de la méthode de Newton, peut se reconnaître aussi par les considérations géométriques suivantes.

Les hypothèses que nous avons faites précédemment étant maintenues, on voit facilement qu'entre $x = \alpha$ et $x = \beta$, la forme de la courbe $y = f(x)$ est l'une ou l'autre de celles que nous représentons ici.

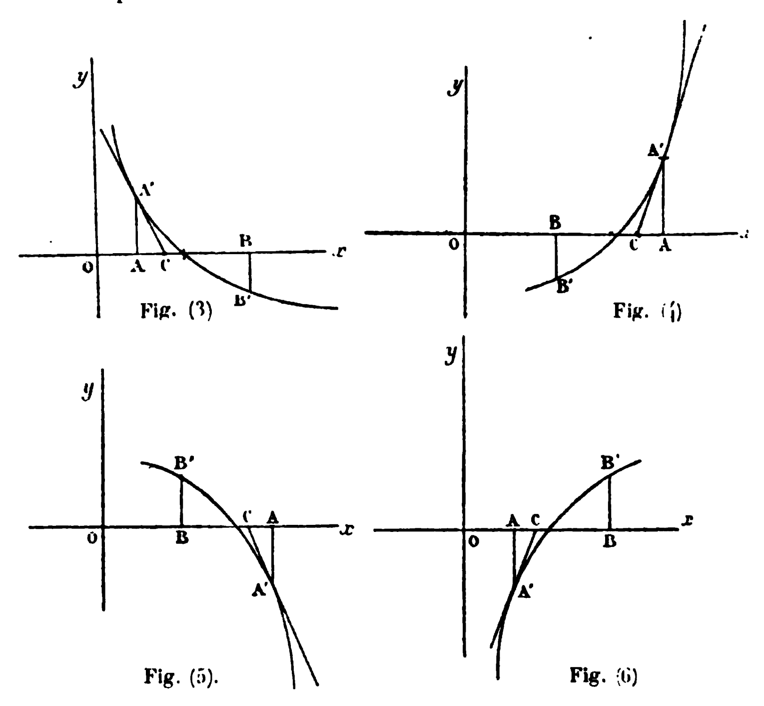


Fig. (3)
Fig. (4)
Fig. (5).
Fig. (6)

Examinons la disposition donnée par la figure (3). La méthode de Newton s'applique avec certitude au point A'. Quand x croît, au delà de α, l'angle A'Cx augmente ; la tangente trigonométrique de cet angle obtus diminue, en valeur absolue, mais augmente, en réalité, puisqu'elle est négative. La fonction $f'(x)$ allant en croissant, sa dérivée $f''(x)$ est positive, pour $x=\alpha$. D'ailleurs, AA' ou $f(\alpha)$ est une ordonnée positive ; ainsi le rapport $\frac{f(x)}{f''(x)}$ prend une valeur positive pour celle des deux limites données à laquelle la méthode de Newton s'applique avec certitude ; du moins lorsque la courbe présente la disposition qu'indique la figure (3). Mais en appliquant cette façon de raisonner aux autres figures on reconnait que la conclusion précédente s'applique à tous les cas.

514. Méthode par les parties proportionnelles. Cette méthode a pour but de calculer une valeur β_1 plus approchée que β; β désignant celui des deux nombres donnés auquel la méthode de Newton ne s'applique pas avec certitude.

Menons la corde A'B' ; les triangles semblables AA'D, BB'D

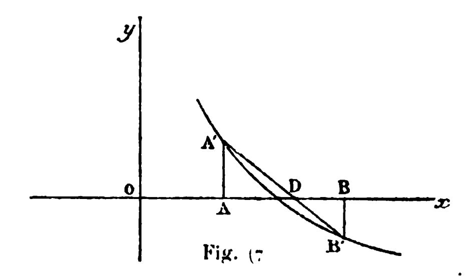


Fig. (7

donnent la proportion

$$\frac{BD}{AD}=\frac{B'B}{A'A},$$

ou

$$\frac{BD}{BD+AD}=\frac{B'B}{B'B+A'A}.$$

Cette égalité a lieu pour les valeurs absolues des lignes qui y figurent.

L'ordonnée BB' est négative, et elle est égale à $f(\beta)$: on doit donc remplacer BB' par $-f(\beta)$. Il vient alors

$$\frac{\mathrm{BD}}{\beta - \alpha} = \frac{-f(\beta)}{-f(\beta) + f(\alpha)}.$$

En désignant par H_1 la correction que l'on peut faire avec cette formule, on a donc

$$\mathrm{H}_1 = (\beta - \alpha)\frac{f(\beta)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

La nouvelle valeur β_1 est

$$\beta_1 = \beta - (\beta - \alpha)\frac{f(\beta)}{f(\beta) - f(\alpha)},$$

ou

$$\beta_1 = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

On peut vérifier que cette formule convient aux différents cas qui peuvent se présenter et qui correspondent aux figures (4), (5) et (6).

On peut aussi reconnaître que les nombres β_1, β_2, ... β_n forment une suite décroissante ; et que l'on a lim $(\beta_n) = x'$. La démonstration de cette propriété est semblable à celle que nous avons donnée plus haut, pour les nombres α.

L'emploi simultané des deux méthodes, permet d'évaluer à chaque instant une limite de l'erreur commise. On a en effet, en posant $\varepsilon_1 = x' - \alpha_1$,

$$\varepsilon_1 < \beta_1 - \alpha_1 ;$$

et, généralement,

$$\varepsilon_n < \beta_n - \alpha_n.$$

515. Méthode de Lagrange. La méthode d'approximation de Lagrange est une application des fractions continues.

Supposons d'abord que les deux nombres entiers consécutifs α et $\alpha+1$, séparent une seule racine de l'équation $f(x)=0$. Ayant posé $x=\alpha+\frac{1}{y}$, la transformée en y,

$$f\left(\alpha+\frac{1}{y}\right)=0,$$

n'admet qu'une seule racine supérieure à l'unité. En effet, si cette équation admettait deux racines y_1 et y_2 plus grandes, l'une et l'autre, que l'unité, on aurait, pour l'équation proposée, deux racines dans l'intervalle $\alpha, \alpha+1$; ce qu'on ne suppose pas.

L'équation en y est

$$f(\alpha)+\frac{1}{y}f'(\alpha)+\frac{1}{y^2}\frac{f''(\alpha)}{1.2}+\ldots+\frac{1}{y^m}\frac{f^m(\alpha)}{m!}=0,$$

ou

$$y^m f(\alpha)+y^{m-1}f'(\alpha)+\frac{y^{m-2}}{1.2}f''(\alpha)+\ldots+\frac{f^m(\alpha)}{m!}=0.$$

En substituant, successivement, 1, 2, 3, ... on trouvera deux nombres consécutifs β, $\beta+1$, donnant des résultats de signes contraires. Nous poserons alors

$$y=\beta+\frac{1}{z}.$$

L'équation transformée en z, pour la raison déjà donnée, n'admettra qu'une seule racine supérieure à l'unité.

En poursuivant ces calculs, malheureusement pénibles, on obtiendra le développement de la racine cherchée, en fraction continue.

Il nous reste à examiner le cas où plusieurs racines de l'é-

quation $f(x) = 0$ sont comprises entre deux nombres entiers, consécutifs, a et $a + 1$.

Si cette circonstance se présente, on remarque qu'en multipliant deux nombres incommensurables, par une puissance de 10, on peut toujours obtenir deux nouveaux nombres, n'ayant pas la même partie entière. On opérera donc sur l'équation

$$f\left(\frac{x}{10}\right) = \varphi(x) = 0,$$

et l'on verra si les nombres

$$10a, \quad 10a + 1, \ \ldots \ 10a + 9$$

séparent les racines de cette équation. Si l'on trouve encore qu'il existe plusieurs racines, dans l'un de ces intervalles, on considérera l'équation $\varphi\left(\frac{x}{10}\right) = 0$, sur laquelle on opérera comme il vient d'être dit. Ainsi, du moins à un point de vue théorique, on peut toujours, en appliquant la méthode de Lagrange, obtenir le développement d'une racine incommensurable d'une équation numérique donnée, en fraction continue.

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON

LES FRACTIONS RATIONNELLES

PARTIE THÉORIQUE.

516. Définitions. On appelle *fraction rationnelle* le rapport $\frac{U}{V}$, de deux fonctions entières U et V, de la lettre x. Parmi les fractions rationnelles, on distingue particulièrement celles dans lesquelles U désigne une constante, et V la puissance entière d'un binôme $mx + n$; et aussi celles qui ont pour numérateur un binôme de cette forme, et pour dénominateur une puissance entière d'un trinôme du second degré $x^2 + px + q$, ce trinôme n'étant pas décomposable en facteurs réels du premier degré.

Nous nommerons *fractions simples* ces fractions rationnelles particulières, et nous supposerons formellement que les coefficients m, n, p, q sont réels.

Décomposer une fraction rationnelle $\frac{U}{V}$, en fractions simples, c'est trouver l'identité suivante $\frac{U}{V} = W$; W, désignant une somme de fractions simples. L'identité

$$\frac{5 - 3x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-3},$$

donne un exemple particulier, et facile à vérifier, du problème que nous allons traiter.

Il sera entendu que les polynômes considérés ont des coeffi-

cients réels, et que $\frac{U}{V}$ est *une fraction proprement dite ;* c'est-à-dire que nous supposerons formellement, dans les développements qui suivent, le degré de V supérieur à celui de U. S'il en était autrement on devrait, avant tout autre calcul, effectuer la division de U par V, et après avoir établi l'identité,

$$U = VQ + R,$$

ou

$$\frac{U}{V} = Q + \frac{R}{V},$$

on appliquerait les procédés de décomposition, que nous allons exposer, à la fraction proprement dite $\frac{R}{V}$. Enfin, la fraction considérée sera suposée *irréductible.* Si les polynômes U et V n'étaient pas premiers entre eux, on devrait simplifier la fraction proposée, en divisant ses deux termes par leur plus grand commun diviseur.

517. Décomposition des fractions de la forme $\frac{U}{(x-a)^\alpha}$. Soit $U = f(x)$, $f(x)$ désignant un polynôme du degré p. Conformément à ce que nous venons de dire, nous supposons : 1° $f(a) \neq 0$, 2° $p < \alpha$.

On a

$$f(x) = f[a + (x-a)]$$

et, par suite,

$$U = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^p}{p!} f^p(a).$$

On en déduit

$$(1) \quad \frac{U}{(x-a)^\alpha} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_p}{(x-a)^{\alpha-p}},$$

en posant

$$(1') \quad A_1 = f(x), \quad A_2 = \frac{f'(x)}{1}, \dots A_p = \frac{f^p(x)}{p!}.$$

La formule (1) donne donc la décomposition, en fractions simples, de la fraction rationnelle proposée ; nous allons montrer que *cette décomposition n'est possible que d'une seule façon.*

On reconnait, en effet, sans difficulté :

1° que toute décomposition en fractions simples de l'expression $\frac{U}{(x-a)^\alpha}$, ne peut être faite qu'avec des fractions dont les dénominateurs sont des puissances de $(x-a)$;

2° que l'exposant du dénominateur de la première fraction ne peut être différent de α ;

3° que le numérateur de cette fraction est égal à A_1 ;

4° que les numérateurs des fractions suivantes sont respectivement $A_2, \dots A_p$.

518. Décomposition des fractions de la forme $\frac{U}{(x^2+px+q)^h}$. Nous supposons, dans cet exemple, que U désigne un polynôme d'un degré inférieur à $2h$, et que l'équation $T = 0$,

$$T = x^2 + px + q ;$$

a ses racines imaginaires.

On peut, par des divisions successives, former le tableau suivant :

$$\begin{aligned} U &= TU_1 + P_1x + Q_1 \\ U_1 &= TU_2 + P_2x + Q_2 \\ &\dots\dots\dots \\ U_{h-2} &= TU_{h-1} + P_{h-1}x + Q_{h-1}. \end{aligned}$$

En multipliant ces identités, respectivement, par

$$\frac{1}{T^h}, \quad \frac{1}{T^{h-1}}, \dots \frac{1}{T^2} ;$$

on a

$$(2)\ \frac{U}{(x^2+px+q)^h}=\frac{P_1x+Q_1}{T^h}+\frac{P_2x+Q_2}{T^{h-1}}+\ldots+\frac{P_{h-1}x+Q_{h-1}}{T^2}+\frac{U_{h-1}}{T}.$$

Si l'on obsérve que:

U est tout au plus du degré $2h-1$,
U_1 . . . . $2h-3$,
. . . .
U_{h-1} . . . . $2h-(2h-1)=1$:

on voit donc que l'identité (2) donne la décomposition cherchée.

Je dis maintenant que *cette décomposition n'est possible que d'une seule façon.*

Il est facile de reconnaître d'abord que cette décomposition ne peut être faite avec des fractions simples qui renfermeraient un dénominateur non identique à $T^{h'}$.

On voit aussi, très aisément, que l'exposant h' doit être égal à h. Il reste à montrer que les numérateurs des fractions simples obtenues dans les deux décompositions considérées sont, deux à deux, identiques.

Supposons donc que nous ayons

$$\frac{P_1x+Q_1}{T^h}+\ldots=\frac{p_1x+q_1}{T^h}+\ldots:$$

si nous chassons le dénominateur commun T^h, nous avons

$$P_1x+Q_1+T\varphi(x)=p_1x+q_1+T\psi(x).$$

Soit $\alpha+\beta i$, l'une des racines de l'équation $T=0$; l'identité précédente prouve que l'équation du premier degré

$$(P_1-p_1)x+(Q_1-q_1)=0$$

admet les deux racines $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$. Ceci ne peut avoir lieu que si l'équation précédente est une identité. On a donc :

$$P_1 = p_1, \quad Q_1 = q_1.$$

On prouve ainsi, de proche en proche, que les numérateurs des fractions simples sont, deux à deux, identiques.

519. Théorème fondamental. *Soit* $\frac{U}{VW}$, *une fraction rationnelle proprement dite ; si* V *et* W *désignent deux polynômes premiers entre eux, on peut toujours trouver deux polynômes entiers* P *et* Q, *tels que l'on ait*

$$\frac{U}{VW} = \frac{P}{V} + \frac{Q}{W};$$

$\frac{P}{V}$ *et* $\frac{Q}{W}$, *étant des fractions proprement dites, et irréductibles. Cette décomposition n'est possible que d'une seule façon.*

Nous diviserons cette démonstration en deux parties.

1° *La décomposition est possible.* En effet les polynômes V et W étant premiers entre eux, nous avons montré (§ 397) qu'il existait deux polynômes entiers P et Q, vérifiant l'identité

$$PW + QV = 1.$$

Nous avons donc

$$\frac{U}{VW} = \frac{UP}{V} + \frac{QU}{W}.$$

Les fractions $\frac{UP}{V}$, $\frac{UQ}{W}$ peuvent être supposées irréductibles ; car, s'il n'en était pas ainsi, nous pourrions, sans troubler l'identité, opérer cette réduction.

Si ces fractions sont proprement dites, le théorème en question se trouve établi. Si non, effectuons la division du numérateur par le dénominateur et nous aurons

$$\frac{UP}{V} = f_1(x) + \frac{P_1}{V},$$

$$\frac{UQ}{W} = F_1(x) + \frac{R_1}{W};$$

par conséquent,

$$\frac{U}{VW} = [f_1(x) + F_1(x)] + \frac{P_1}{V} + \frac{R_1}{W};$$

$\frac{P_1}{V}$ et $\frac{R_1}{W}$ désignant des fractions proprement dites. Dans cette identité donnons à x des valeurs croissant au delà de toute limite : le premier membre et les fractions $\frac{P_1}{V}$ $\frac{R_1}{W}$ tendent vers zéro. Nous pouvons donc dire que $f_1(x) + F_1(x)$ est une fonction entière qui tend vers zéro quand x croit au delà de toute limite. Ceci n'est admissible que si nous supposons

$$f_1(x) + F_1(x) = 0.$$

Nous avons donc

$$\frac{V}{VW} = \frac{P_1}{V} + \frac{R_1}{W};$$

c'est l'identité annoncée.

2° *La décomposition précédente n'est possible que d'une seule façon.*

Supposons que, par deux procédés différents, nous ayions trouvé

$$(A) \quad \frac{U}{VW} = \frac{P}{V} + \frac{Q}{W}$$

et

$$(B) \quad \frac{U}{VW} = \frac{P'}{V} + \frac{Q'}{W};$$

les fractions $\frac{P}{V}$, $\frac{P'}{V}$; $\frac{Q}{W}$, $\frac{Q'}{W}$ étant, d'ailleurs, proprement dites et irréductibles. Nous allons reconnaitre que nous avons nécessairement

$$P = P' \quad \text{et} \quad Q = Q'.$$

En effet les identités (A) et (B) donnent

$$\frac{P}{V}+\frac{Q}{W}=\frac{P'}{V}+\frac{Q'}{W},$$

ou

$$P-P'=V.\frac{Q'-Q}{W}.$$

Toute racine α de l'équation $V=0$ annule le second membre, puisque V et W sont des polynômes premiers entre eux. Mais P et P′ désignent des polynômes d'un degré inférieur à celui de V ; or il est impossible que les racines de l'équation $V=0$ appartiennent, avec leur degré de multiplicité, à l'équation $P-P'=0$, à moins qu'on ne suppose $P-P'=0$. On a alors $Q-Q'=0$, et ceci montre que la décomposition n'est possible que d'une seule façon.

520. Théorème. *Une fraction rationnelle est toujours décomposable en fractions simples ; cette décomposition n'est possible que d'une seule façon.*

Soit $\frac{U}{V}$ la fraction proposée. D'apres le théorème de d'Alembert (§ 358), si l'on désigne par $a_1, a_2, \ldots a_p$ les racines réelles de l'équation $V=0$, et, par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, respectivement leurs degrés de multiplicité, on a

$$X=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p}V_1;$$

l'équation $V_1=0$, n'ayant que des racines imaginaires. Nous savons d'ailleurs que le polynôme V_1 est décomposable identiquement en facteurs réels du second degré, $T_1, T_2, \ldots T_q$ affectés d'exposants $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$. Si nous posons

$$\begin{aligned}T_1&=x^2+m_1x+n_1,\\T_2&=x^2+m_2x+n_2,\\&\ldots\ldots\\T_q&=x^2+m_qx+n_q;\end{aligned}$$

nous avons

$$V_1 = T_1^{\beta_1} T_2^{\beta_2} \dots T_q^{\beta_q},$$

et, par suite,

$$V = (x-a_1)^{\alpha_1} (x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_p)^{\alpha_p} T_1^{\beta_1} T_2^{\beta_2} \dots T_q^{\beta_q}.$$

Cette remarque étant faite, soit

$$V = (x-a_1)^{\alpha_1} W,$$

les polynômes $(x-a_1)^{\alpha_1}$ et W sont premiers entre eux. On a donc (§ 517)

$$\frac{U}{V} = \frac{f_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{U_1}{W}.$$

D'autre part, on a, (§ 517)

$$\frac{f_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}} = \frac{A_1^1}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^1}{(x-a)}.$$

On peut observer ici que le coefficient A_1^1 étant égal à $f_1(a_1)$, on a $A_1^1 \neq 0$; mais les autres coefficients $A_2^1, \dots A_{\alpha_1}^2$ peuvent, suivant les exemples, être nuls, ou différents de zéro.

En appliquant ce raisonnement, successivement, aux binômes $(x-a_1)^{\alpha_1}$, $(x-a_2)^{\alpha_2}$, ... $(x-a_p)^{\alpha_p}$, on aboutit à l'identité suivante :

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{U}{V} = {} & \frac{A_1^1}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^1}{x-a_1} \\ & + \frac{A_1^2}{(x-a_2)^{\alpha_2}} + \dots + \frac{A_{\alpha_2}^2}{x-a_2} \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{A_1^p}{(x-a_p)^{\alpha_p}} + \dots + \frac{A_{\alpha_p}^p}{x-a_p} \\ & + \frac{u}{V_1}. \end{aligned}$$

Ce premier résultat étant obtenu, soit $V_1 = T_1^{\beta_1} V_2$. Les polynômes $T_1^{\beta_1}$ et V_2 étant premiers entre eux, on peut poser, (§ 519)

$$\frac{u}{V_1} = \frac{\varphi_1(x)}{T_1^{\beta_1}} + \frac{u_1}{V_2}.$$

On a, d'ailleurs, (§ 518)

$$\frac{\varphi_1(x)}{T_1^{\beta_1}} = \frac{P_1^1 x + Q_1^1}{T_1^{\beta_1}} + \dots + \frac{P_{\beta_1}^1 x + Q_{\beta_1}^1}{T_1}:$$

et l'on doit observer ici que les coefficients P_1, Q_1 ne sont pas nuls à la fois. En effet, si cette circonstance se produisait, l'identité précédente, après avoir chassé le dénominateur commun $T_1^{\beta_1}$, s'écrirait

$$\varphi_1(x) = T_1 \psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant une fonction entière. Il résulterait de là, que $\varphi_1(x)$ serait exactement divisible par T_1, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse, la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{T_1^{\beta_1}}$ étant irréductible.

En répétant ce calcul, successivement, sur les trinômes T_2, ... T_q, on a ce second résultat :

$$(2)\quad \frac{u}{V_1} = \frac{P_1^1 x + Q_1^1}{T_1^{\beta_1}} + \dots + \frac{P_{\beta_1}^1 x + Q_{\beta_1}^1}{T_1}$$
$$+ \frac{P_1^2 x + Q_1^2}{T_2^{\beta_2}} + \dots + \frac{P_{\beta_2}^2 x + Q_{\beta_2}^2}{T_2}$$
$$+ \dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{P_1^q x + Q_1^q}{T_q^{\beta_q}} + \dots + \frac{P_{\beta_q}^q x + Q_{\beta_q}^q}{T_q}.$$

En ajoutant les identités (1) et (2), on obtient la décomposition de $\frac{U}{V}$ en fractions simples et on peut remarquer, pour les raisons données plus haut, que les fractions écrites dans la première colonne de ces identités ne sont pas nulles.

521. Théorème. *On peut toujours décomposer une fraction rationnelle, en fractions simples du genre* $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, *si l'on admet que* a *et* A *peuvent représenter des expressions imaginaires.*

Soit $\frac{U}{V}$ la fraction proposée et soit a une racine imaginaire. de multiplicité t, de l'équation $V=0$. Posons

$$V=(x-a)^t\varphi(x), \text{ et } U=f(x);$$

nous avons

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{(x-a)^t}+\left\{\frac{U}{(x-a)^t\varphi(x)}-\frac{A}{(x-a)^t}\right\}$$

ou, encore,

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{(x-a)^t}+\frac{f(x)-A\varphi(x)}{(x-a)^t\varphi(x)}.$$

Disposons maintenant du paramètre A, de façon que l'on ait

$$f(a)-A\varphi(a)=0.$$

Cette relation donne pour A, une valeur bien déterminée et qui n'est ni nulle, ni infinie, puisque nous supposons $f(a)\neq 0$, et aussi $\varphi(a)\neq 0$. Pour cette valeur de A, valeur que nous désignerons par $\alpha_1+\beta_1 i$, la fonction $f(x)-A\varphi(x)$ est divisible par $(x-a)$, et nous obtenons, en posant, $f(x)-A\varphi(x)=(x-a)f_1(x)$,

$$\frac{U}{V}=\frac{\alpha_1+\beta_1 i}{(x-a)^t}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{t-1}\varphi(x)}.$$

En opérant, de même, sur la fraction $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{t-1}\varphi(x)}$, nous obtiendrons la décomposition de la fraction $\frac{U}{V}$, par la formule

$$\frac{U}{V}=\Sigma\left[\frac{\alpha_1+\beta_1 i}{(x-a)^t}+\ldots+\frac{\alpha_t+\beta_t i}{x-a}\right].$$

Il est peut-être bon de noter la marche que nous avons suivie, pour la démonstration du théorème qui nous occupe; parce que le procédé de calcul, que nous venons d'exposer, rentre dans une méthode générale de l'analyse, méthode que nous avons signalée au début de ce livre (§ 10), et que l'on nomme *méthode des coefficients indéterminés.*

PARTIE PRATIQUE.

Calcul des coefficients. — Applications.

Les calculs que nous avons exposés, dans la première partie de cette leçon, pour établir la possibilité d'effectuer la décomposition, en fractions simples, d'une fraction rationnelle donnée, constituent, évidemment, une première méthode pour calculer les différents coefficients inconnus, qui entrent dans les numérateurs des fractions simples cherchés. Mais nous allons indiquer d'autres procédés de calcul donnant ces coefficients par des voies qui sont, ordinairement, plus courtes.

Nous distinguerons quatre cas, suivant la forme algébrique du dénominateur V.

522. Premier cas. *L'équation* $V=0$ *n'a que des racines simples et distinctes.*

Soit $\frac{U}{V}$ la fraction proposée.

Posons

$$U=f(x),$$

et

$$V=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_p).$$

En désignant par A_1, A_2, ... A_p, des coefficients indéterminés, on sait que pour des valeurs convenablement choisies pour ces coefficients, on a

$$\frac{U}{V} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_p}{x - a_p}.$$

On déduit de cette identité,

$$f(x) = \Sigma A_1 (x - a_2) \ldots (x - a_p).$$

En remplaçant, successivement, x par a_1, a_2, ... a_p; on a

$$A_1 = \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_2) \ldots (a_1 - a_p)}, \ \ldots ; A_p = \frac{f(a_p)}{(a_p - a_1) \ldots (a_p - a_{p-1})}.$$

523. Remarque d'Euler. On doit à Euler, sur le sujet qui nous occupe, une remarque intéressante et qui simplifie souvent le calcul des coefficients A.

De l'identité

$$V = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_p),$$

on déduit

$$V' = \Sigma (x - a_2) \ldots (x - a_p),$$

et, en remplaçant x par a_1, il vient

$$V'_1 = (a_1 - a_2) \ldots (a_1 - a_p).$$

On a donc

$$A_1 = \frac{U_1}{V'_1},$$

et, de même,

$$A_2 = \frac{U_2}{V'_2}, \ \ldots A_p = \frac{U_p}{V'_p}.$$

On peut donc dire que les coefficients A s'obtiennent en

prenant le rapport $\frac{U}{V'}$, et en y remplaçant, successivement, la lettre x par $a_1, a_2, \ldots a_p$. C'est cette observation qui constitue la remarque d'Euler.

524. Deuxième cas. *L'équation* $V=0$ *admet une racine réelle de multiplicité* α ; $(\alpha > 1)$.

Désignons toujours par $\frac{U}{V}$ la fraction donnée et posons

$$U = f(x) \quad \text{et} \quad V = (x-a)^\alpha \varphi(x).$$

En développant, par la formule de Taylor, les expressions

$$f[a+(x-a)], \quad \text{et } \varphi[a+(x-a)],$$

nous avons

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots}{\varphi(a) + \frac{x-a}{1} \varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} \varphi''(a) + \ldots}.$$

Posons maintenant $x - a = X$ (1) et divisons, l'un par l'autre, les deux polynômes P, Q,

$$P = f(a) + X\frac{f'(a)}{1} + X^2\frac{f''(a)}{1.2} + \ldots$$

$$Q = \varphi(a) + X\frac{\varphi'(a)}{1} + X^2\frac{\varphi''(a)}{1.2} + \ldots$$

On sait (note A, § 5) que l'on peut pousser aussi loin que l'on veut la division de ces polynômes ordonnés par rapport aux puissances croissantes de X. Nous arrêterons l'opération après avoir obtenu, au quotient, le terme en $X^{\alpha-1}$. On sait aussi

1. Ce changement de notation est adopté ici, pour donner plus de clarté à l'exposition de la méthode. Évidemment, il n'est pas nécessaire de s'y soumettre, dans la pratique ; il suffit de considérer $(x-a)$ comme représentant une lettre.

(note A, § 5) que le reste obtenu, à cet instant, est de la forme $X^\alpha R$, R représentant une fonction entière de X. En désignant par A_1, A_2, ... A_α, les coefficients du quotient, on a donc

$$P = Q(A_1 + A_2X + \dots + A_\alpha X^{\alpha-1}) + X^\alpha R,$$

et, par conséquent,

$$\frac{P}{X^\alpha Q} = \frac{A_1}{X^\alpha} + \frac{A_2}{X^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{X} + \frac{R}{Q},$$

ou enfin

$$\frac{U}{V} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{R}{Q}.$$

Dans ce développement, il faut observer que $\frac{R}{Q}$ est une fraction proprement dite. On peut reconnaître ceci par des moyens divers et, notamment, en supposant que x croît au delà de toute limite.

525. Troisième cas. *L'équation* $V = 0$ *admet une racine imaginaire simple.*

Supposons maintenant que l'on ait

$$V = T \cdot \varphi(x),$$

T désignant un trinôme du second degré qui, égalé à zéro, donne une équation dont les racines sont imaginaires et n'annulent pas le polynôme $\varphi(x)$. D'après ce que nous avons vu plus haut (§ 519), on a

$$\frac{U}{V} = \frac{f(x)}{T \cdot \varphi(x)} = \frac{Ax + B}{T.} + \frac{f_1(x)}{\varphi(x)};$$

Et il faut déterminer A, B; puis $f_1(x)$.

L'identité précédente peut être écrite ainsi :

$$(1) \quad f(x) = (Ax + B)\varphi(x) + Tf_1(x).$$

Soit $\alpha + \beta i$ une des racines de l'équation $T = 0$, et soit posé

$$\frac{f'(\alpha + \beta i)}{\varphi(\alpha + \beta i)} = m + ni.$$

En remplaçant, dans (1), x par $\alpha + \beta i$ il vient

$$m + ni = A\alpha + B + A\beta i,$$

et, par conséquent,

$$(2) \quad m = A\alpha + B,$$
$$(3) \quad n = A\beta.$$

Il faut d'ailleurs remarquer ici que les paramètres m et n ne sont ni infinis, ni nuls simultanément : ceci résulte de ce que l'on a $\varphi(\alpha + \beta i) \neq 0$, et aussi $f(\alpha + \beta i) \neq 0$.

Les égalités (2) et (3) déterminent A et B. En effet β étant différent de zéro, on a, d'abord,

$$A = \frac{n}{\beta},$$

puis,

$$B = m - \frac{n\alpha}{\beta}.$$

Quant à la troisième inconnue, la fonction $f_1(x)$, elle se détermine, après le calcul des coefficients A et B, au moyen de l'identité

$$f_1(x) = \frac{f(x) - (Ax + B)\varphi(x)}{T}.$$

La division, indiquée dans le second membre, doit se faire exactement; et cette opération peut, précisément, servir de preuve aux calculs qui ont été faits pour déterminer les valeurs de A, et de B.

526. Quatrième cas. *L'équation* $V = 0$ *admet une racine imaginaire multiple.*

Dans ce cas, la méthode des coefficients indéterminés est, dans le plus grand nombre des cas, celle qui conduit au but par la voie la plus sûre et la plus directe.

D'ailleurs nous indiquons plus loin d'autres méthodes de calcul qui s'appliquent avantageusement à certains exemples.

527. Exemples divers de décomposition de fractions rationnelles.

1er Cas. — *Décomposer la fraction*

$$y = \frac{1 \cdot 2 \ldots p}{(x-1)(x-2)\ldots(x-p)}.$$

Soit posé

$$F(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-p);$$

on en déduit

$$F'(x) = \Sigma (x-2)\ldots(x-p);$$

et, par suite

$$\begin{aligned}
F'(1) &= (-1)^{p-1} \cdot 1 \cdot 2 \ldots (p-1) \\
F'(2) &= 1 \cdot (-1)^{p-2} \cdot 1 \cdot 2 \ldots (p-2) \\
F'(3) &= 1 \cdot 2 (-1)^{p-3} \cdot 1 \cdot 2 \ldots (p-3) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F'(p) &= 1 \cdot 2 \ldots (p-1).
\end{aligned}$$

La remarque d'Euler (§ 523), donne le résultat suivant,

$$\frac{1 \cdot 2 \ldots p}{(x-1)(x-2)\ldots(x-p)} = (-1)^{p-1} \frac{p}{x-1} + (-1)^{p-2} \frac{p(p-1)}{1} \frac{1}{x-2} + (-1)^{p-3} \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{x-3} + \ldots + \frac{p}{x-p}.$$

2e Cas. *Décomposer la fraction*

$$y = \frac{1}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}}.$$

On peut trouver le développement de y, en fractions simples, en suivant la méthode indiquée plus haut; mais nous voulons mettre à profit cet exercice pour faire connaître une manière, souvent utile, d'appliquer la méthode des coefficients indéterminés.

Posons

$$\frac{1}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \dots + \frac{B_\beta}{x-b},$$

et

$$U = \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \dots + \frac{B_\beta}{x-b};$$

nous avons

$$(1)\quad (x-b)^{-\beta} = A_1 + A_2(x-a) + \dots + A_\alpha(x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^\alpha U.$$

Si, dans cette identité, nous faisons $x=a$, nous obtenons d'abord A_1,

$$A_1 = (a-b)^{-\beta}.$$

Prenons maintenant les dérivées des deux membres de l'identité (1), nous trouvons

$$(2)\quad -\beta(x-b)^{-\beta-1} = A_2 + 2A_3(x-a) + \dots + (\alpha-1)A_\alpha(x-a)^{\alpha-2} + (x-a)^{\alpha-1}U_1,$$

en posant

$$U_1 = \alpha U + (x-a)U'.$$

Faisons $x=a$, dans l'identité (2), nous obtenons

$$-\beta(a-b)^{-\beta-1} = A_2.$$

Si nous calculons ainsi successivement les dérivées, nous avons finalement :

$$A_1 = \frac{1}{(a-b)^\beta}, \quad A_2 = -\frac{\beta}{1}\,\frac{1}{(a-b)^{\beta+1}},$$

$$A_3 = \frac{\beta(\beta+1)}{1\,.\,2}\,\frac{1}{(a-b)^{\beta+2}}, \text{ etc.}\ldots$$

Quant aux coefficients B, ils se déduisent, de ceux-ci, par la permutation des lettres a et b, d'une part ; α et β, d'autre part.

3me et 4me cas. Supposons, enfin, que le dénominateur V de la fraction rationnelle donne une équation $V = 0$, ayant des racines imaginaires. Une des méthodes les plus simples que l'on puisse adopter pour effectuer la décomposition est celle que nous avons indiquée plus haut, dans la partie théorique de cette leçon.

Soit, par exemple,

$$y = \frac{x^4 + 2}{(x^2 - x + 1)^n}.$$

Nous avons

$$x^4 + 2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x) - x + 2,$$
$$x^2 + x = (x^2 - x + 1)\,.\,1 + (2x - 1).$$

Multiplions la première par

$$\frac{1}{(x^2 - x + 1)^n},$$

la deuxième par

$$\frac{1}{(x^2 - x + 1)^{n-1}},$$

et nous obtenons le résultat demandé :

$$\frac{x^4 + 2}{(x^2-x+1)^n} = \frac{-x+2}{(x^2 - x + 1)^n} + \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^{n-1}} + \frac{1}{(x^2-x+1)^{n-2}}.$$

528. Applications de la décomposition des fractions

rationnelles. La décomposition des fractions rationnelles en fractions simples est, comme on l'a vu, un problème dont la solution est élémentaire; mais les applications de cette décomposition ressortent principalement de l'analyse supérieure. Les exemples qui suivent, choisis parmi les plus simples, ont pour but de montrer le caractère ordinaire de ces applications.

1er Exemple. *Trouver la dérivée 7me de la fonction y,*

$$y = \frac{x^8 - 3x^7 + x^6 + 3x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)}.$$

On a, évidemment,

$$y = \varphi(x) + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière du degré 6; il importe de faire cette remarque, pour pouvoir conclure que la dérivée 7me de y, ne renferme pas trace de la fonction $\varphi(x)$. Il est donc inutile de la calculer, si l'on peut déterminer les coefficients A et B, sans connaître $\varphi(y)$. Or ce calcul est possible, comme il est facile de le vérifier. On a, en effet,

$$x^8 - 3x^7 + x^6 + 3x^5 - 2x^4 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x-2)\varphi(x)$$
$$+ A(x-2) + B(x-1).$$

En faisant $x = 1$, puis $x = 2$; on trouve

$$A = 1, \quad \text{et} \quad B = 1.$$

On a donc

$$y = \varphi(x) + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

ou

$$y = \varphi(x) + (x-1)^{-1} + (x-2)^{-1}$$

et, par conséquent,

$$-y^{(7)} = 7!\,\frac{(x-2)^8 + (x-1)^8}{(x^2 - 3x + 2)^8}.$$

2ᵉ Exemple. *Trouver la dérivée d'ordre n, de la fonction*

$$y = \text{arc tg } x.$$

On a, d'abord,

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Décomposons le second membre en fractions simples, ayant des coefficients imaginaires ; nous avons

$$y' = \frac{1}{2i}\Big[(x - i)^{-1} - (x + i)^{-1} \Big],$$

et, par conséquent,

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{(x-i)^n - (x+i)^n}{2i\,(x^2+1)^n}.$$

On peut ensuite, si l'on veut, développer les expressions $(x-1)^n$ et $(x+1)^n$, par la formule du binôme ; l'imaginaire i disparaît alors de l'expression trouvée.

3ᵉ Exemple. *Trouver la fonction primitive* [1] *de* y',

$$y' = \frac{1 - (1 - x)^n}{x\,(1 - x)^n}.$$

Si l'on observe : 1° que la primitive de la fonction $\dfrac{u'}{(u-a)^m}$ est égale à $\dfrac{1}{(1-m)(u-a)^{m-1}}$, quand on suppose $m \neq 1$; 2° que la primitive de $\dfrac{u'}{u-a}$ est $L(u-a)$; on voit tout le parti que l'on peut tirer de la décomposition d'une fraction rationnelle, en fractions simples, pour la recherche des primitives des fractions rationnelles.

Dans l'exemple que nous avons choisi, la décomposition de

1. La primitive d'une fonction $f(x)$, est une fonction $F(x)$, telle que l'on ait $F'(x) = f(x)$.

y' en fractions simples se fait, immédiatement, en remarquant que l'on a

$$y' = \frac{\frac{1}{(1-x)^n} - 1}{(1-x)\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)}.$$

En effectuant la division indiquée, on trouve

$$y' = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \dots + \frac{1}{(1-x)^n}.$$

La primitive demandée est donc,

$$y = k - \mathrm{L}(1-x) + \frac{1}{1-x} + \dots + \frac{1}{(n-1)(1-x)^{n-1}}.$$

EXERCICES

1. *Démontrer que si l'on pose*

$$\mathrm{F}(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l),$$

on a

$$\frac{1}{\mathrm{F}'(a)} + \frac{1}{\mathrm{F}'(b)} + \dots + \frac{1}{\mathrm{F}'(l)} = 0.$$

En décomposant $\frac{1}{\mathrm{F}(x)}$ en fractions simples, on trouve

$$\frac{1}{\mathrm{F}(x)} = \frac{\frac{1}{\mathrm{F}'(a)}}{x-a} + \dots + \frac{\frac{1}{\mathrm{F}'(l)}}{x-l},$$

ou

$$1 = \Sigma \frac{1}{\mathrm{F}'(a)}(x-b)\dots(x-l).$$

De cette identité on déduit l'égalité proposée, et beaucoup d'autres.

2. *Soit $f(x)$ un polynôme du degré $m-2$, ou d'un degré inférieur: $a, b, \ldots l$ désignant m nombres différents, démontrer que l'on a*

$$\sum \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots a-l)} = 0.$$

On peut résoudre cet exercice en considérant la fraction rationnelle

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)},$$

et en raisonnant comme nous l'avons indiqué dans l'exercice précédent.

3. *Décomposer, en fractions simples, l'expression*

$$y = \frac{x^p + x^q - 1}{(x-1)^3(x^2+1)}.$$

On posera

$$y = \varphi(x) + \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1},$$

on trouve

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{p+q-1}{2}, \quad A_3 = \frac{p^2+q^2-3p-3q+1}{4}.$$

Enfin M et N se déterminant par l'égalité

$$i^p + i^q - 1 = Mi + N,$$

et l'on doit distinguer différents cas, suivant la parité des nombres entiers p et q.

4. *Démontrer que si $U=0$, désigne une équation du troisième degré, ayant ses racines distinctes, on a*

$$\frac{f(x)}{U^n} = \frac{P_1}{U^n} + \frac{P_2}{U^{n-1}} + \ldots + \frac{P_n}{U}$$

$\frac{f(x)}{U^n}$ *étant une fraction proprement dite, et $P_1, P_2, \ldots P_n$ représentant des trinômes du second degré.*

On peut observer que l'on a

$$\frac{f(x)}{U^n} = \frac{f(x)-P}{U^n} + \frac{P}{U^n}$$

en posant

$$P = ax^2 + bx + c.$$

On dispose des paramètres a, b, c, de façon que l'on ait

$$\begin{aligned} a\alpha^2 + b\alpha + c &= f(\alpha) \\ a\beta^2 + b\beta + c &= f(\beta) \\ a\gamma^2 + b\gamma + c &= f(\gamma) \end{aligned}$$

α, β, γ étant les trois racines de l'équation $U = 0$. Ces racines étant distinctes, on a, d'ailleurs,

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

5. *Décomposer, en fractions simples, la fraction rationnelle*

$$y = \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}.$$

On remarque d'abord que l'on a

$$x^6 + 1 \equiv (x^2 + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1),$$

et l'on pose

$$y = \frac{Px + Q}{x^2 + 1} + \frac{P'x + Q'}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} + \frac{P''x + Q''}{x^2 - x\sqrt{3} + 1}.$$

En chassant le dénominateur et en faisant $x = i$, on trouve d'abord

$$P = 0, \quad Q = \frac{2}{3}.$$

On obtient alors, après simplification, l'identité

$$\frac{x^2 + 1}{3} \equiv (P'x + Q')(x^2 - x\sqrt{3} + 1) + (P''x + Q')(x^2 + x\sqrt{3} + 1).$$

Il serait peu commode de substituer, dans cette identité, à la place de x, les racines des équations

$$\begin{aligned} x^2 - x\sqrt{3} + 1 &= 0 \\ x^2 + x\sqrt{3} + 1 &= 0, \end{aligned}$$

et il parait préférable d'écrire que les coefficients des diverses puissances de x sont nuls. On trouve ainsi

$$P' = 0 \quad P'' = 0 \quad Q' = Q'' = \frac{1}{6}.$$

6. *Décomposer, en fractions simples, les fractions suivantes :*

$$\frac{x^n}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2}, \quad \frac{x^n}{x^4 + 1}, \quad \frac{x^n}{(x^p - 1)(x^q - 1)}.$$

Dans cette dernière fraction, on supposera p et q, premiers entre eux.

QUARANTIÈME LEÇON

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ.

L'idée qui nous sert de point de départ, dans la résolution algébrique des équations du troisième degré, est naturelle; elle peut être appliquée dans plusieurs autres cas. Soit (1) $f(x) = 0$, l'équation proposée. Supposons qu'elle soit du degré m et qu'on puisse l'écrire, identiquement, sous la forme

$$(2) \quad P^m - Q^m = 0,$$

P et Q désignant des fonctions entières de x, du premier ou du second degré, tout au plus. La résolution algébrique de l'équation donnée se trouve ainsi ramenée à celle de l'équation binôme $z^m - 1 = 0$, en posant $z = \frac{P}{Q}$.

Cette idée, en définitive, est celle qui a servi à résoudre les équations du second degré, quand on a utilisé l'identité,

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2.$$

C'est aussi celle qui préside à la résolution de l'équation du quatrième degré, comme nous le verrons plus loin, en exposant la méthode de Ferrari. Il peut paraître naturel de l'appliquer au cas du troisième degré et, de cette façon, la résolution algébrique des équations, dans le cas où elle est possible [1], se trouve découler d'un seul et même principe.

1. La résolution algébrique des équations n'est possible que pour les équations dont le degré est inférieur à 5; du moins dans le cas général.

529. Recherche de la résolvante (1). Soit

$$(3) \quad x^3 + px + q = 0$$

l'équation proposée. Nous allons chercher à l'identifier avec l'équation

$$(\alpha + \beta x)^3 - (x + \lambda)^3 = 0,$$

laquelle peut s'écrire

$$(4) \quad x^3(\beta^3 - 1) + 3(\beta^2\alpha - \lambda)x^2 + 3(\alpha^2\beta - \lambda^2)x + \alpha^3 - \lambda^3 = 0.$$

Pour identifier (3) et (4), il faut supposer β différent de l'unité, et poser

$$(5) \quad \beta^2\alpha = \lambda,$$

$$(6) \quad \frac{p}{3}(\beta^3 - 1) = \alpha^2\beta - \lambda^2,$$

$$(7) \quad q(\beta^3 - 1) = \alpha^3 - \lambda^3.$$

Ces égalités forment un système de trois équations, à trois inconnues : p et q sont les nombres donnés ; α, β et λ, les inconnues.

De (5), tirons α ; cette valeur substituée dans (6), et dans (7), donne d'abord

$$(8) \quad -\frac{p}{3}\beta^3 = \lambda^2,$$

et

$$(9) \quad -q\beta^6 = \lambda^3(\beta^3 + 1) ;$$

puis, en éliminant β^3 entre ces deux relations,

$$(A) \quad 3\lambda^2 p - 9q\lambda - p^2 = 0.$$

C'est la résolvante ; elle est du second degré. Les équations (6) et (8) donnent, d'autre part,

$$(10) \quad \alpha^2\beta = -\frac{p}{3}.$$

1. Ce théorème remarquable est dû à Galois (V. *Algèbre supérieure* de M. Serret, t. II, p. 637).

On a donc, par combinaison des équations (5) et (10)

$$(B)\quad p\beta + 3\alpha\lambda = 0\,;$$

et, aussi,

$$(C)\quad \alpha^3 = \frac{p^3}{9\lambda}.$$

Ainsi la résolution de l'équation proposée se trouve réalisée par celles : 1° d'une équation du second degré (A) ; 2° d'une équation du premier degré (B) ; 3° d'une équation binôme du troisième degré (C).

En désignant par j l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité (§ 442), les racines x_1, x_2, x_3 sont données par les formules :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta x_1 &= x_1 + \lambda \\ \alpha + \beta x_2 &= j(x_2 + \lambda) \\ \alpha + \beta x_3 &= j^2(x_3 + \lambda). \end{aligned}$$

Remplaçons λ par $\beta^2\alpha$, on trouve, facilement, en tenant compte de l'hypothèse $j^3 = 1$,

$$\left.\begin{aligned} &(11)\quad x_1 = \alpha(\beta + 1) \\ &(12)\quad x_2 = \alpha j^2(\beta j^2 + 1) \\ &(13)\quad x_3 = \alpha j(\beta j + 1). \end{aligned}\right\}\ (D)$$

530. Discussion. Soit λ' l'une des racines de la résolvante (A) ; à cette racine, et d'après la formule (C), correspondent pour α, trois valeurs qu'on peut représenter par α, αj, αj^2. D'ailleurs la relation (B) prouve que si l'on change α, en αj, ou αj^2, β prend les valeurs correspondantes βj, ou βj^2. Par suite, les formules (D) ne peuvent donner que trois valeurs pour x. Mais il faut observer que la résolvante admet deux racines λ', λ'' et la discussion qui va suivre a pour but de montrer que la deuxième racine λ'' donne les mêmes valeurs pour x.

Pour établir ce point, remarquons d'abord que l'on a

$$\lambda'\lambda'' = -\frac{p}{3}.$$

D'autre part, à la racine λ'' correspond un nombre α' déterminé par la relation

$$\alpha'^3 = \frac{p^2}{9\lambda''}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\alpha^3 = \frac{p^2}{9\lambda'},$$

et, par suite,

$$\alpha^3\alpha'^3 = \frac{p^4}{81}\cdot\frac{1}{\lambda'\lambda''}$$

ou

$$\alpha^3\alpha'^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

On trouve donc, successivement,

$$\alpha\alpha' = -\frac{p}{3}, \quad \alpha\alpha' = -\frac{p}{3}j, \text{ et } \alpha\alpha' = -\frac{p}{3}j^2.$$

La formule (11), en tenant compte de la relation (10), donne

$$x_1 = \alpha - \frac{p}{3\alpha}.$$

Cette expression ne change pas quand on substitue, à α, $-\frac{p}{3\alpha}$. Si l'on remplace maintenant α, par $-\frac{pj}{3\alpha}$, on obtient

$$X_1 = -\frac{pj}{3\alpha} + \frac{p}{3}\cdot\frac{3\alpha}{pj},$$

ou

$$X_1 = \frac{\alpha}{j} - \frac{pj}{3\alpha}.$$

En remarquant que $j^3 = 1$, cette valeur peut s'écrire

$$X_1 = \alpha j^2 - \frac{p}{3\alpha j^2}.$$

Mais on a

$$x_2 = \alpha j^2 + \alpha\beta j^4,$$

ou, d'après (10),

$$x_2 = \alpha j^2 - \frac{pj}{3\alpha} = \alpha j^2 - \frac{p}{3\alpha j^2}.$$

On voit donc que $X_1 = x_2$. On reconnait, de même, qu'en remplaçant α, par $-\frac{pj}{3\alpha}$, la formule (11) donne la valeur de x_3.

Le même raisonnement, appliqué aux deux autres formules (12) et (13) du groupe (D), prouve que l'on retrouve toujours les nombres x_1, x_2, x_3; il n'y a donc pas, pour l'équation proposée, d'autre solution que ces trois racines.

531. Formule de résolution. Ces racines sont données par la formule

$$x = \theta\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3}} + \frac{p}{3\theta\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

dans laquelle on donne successivement à θ les valeurs 1, j et j^2.

En effet, la résolvante (A), écrite sous la forme

$$p^2\frac{1}{\lambda^2} + 9q\frac{1}{\lambda} - 3p = 0,$$

donne

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{-9q \pm \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{2p^2}.$$

Nous avons montré, tout à l'heure, qu'on pouvait prendre indifféremment, dans cette formule, le signe + ou le signe — : nous ferons choix du signe +, et nous aurons alors, pour $\frac{1}{\lambda}$, une valeur bien déterminée, savoir celle qui correspond à la formule

$$\frac{p^2}{9\lambda} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

La formule (C) donne aussi,

$$z = \theta\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

θ ayant successivement, dans cette expression, les valeurs $1, j, j^2$. L'inconnue x étant donnée par la relation

$$x = z - \frac{p}{3z},$$

on a donc, enfin,

$$\text{(A)} \quad \begin{aligned} x = {} & \theta\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ & + \frac{p}{3\theta\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}} \end{aligned}$$

$$\theta = (1, j, j^2).$$

582. Formule de Cardan. La formule de Cardan ne diffère que par la forme de la précédente ; on peut, ou la déduire de celle-ci, ou l'établir directement, comme nous allons le montrer.

Soit toujours

$$x^3 + px + q = 0,$$

l'équation donnée, et soit posé

$$x = y + z.$$

On a

$$(y+z)^3+p(y+z)+q=0,$$

ou

$$y^3+z^3+(y+z)(3yz+p)+q=0,$$

et cette relation est vérifiée, si les nombres y et z satisfont aux conditions suivantes :

$$yz=-\frac{p}{3},$$
$$y^3+z^3=-q.$$

La première donne

$$y^3z^3=-\frac{p^3}{27},$$

et l'on peut considérer y^3 et z^3 comme étant les deux racines de l'équation

$$U^2+qU-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0.$$

On a donc, d'après cela,

$$U=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

et, par suite,

$$y^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{V},\quad z^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{V};$$

en posant

$$V=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

L'inconnue x est donnée, finalement, par l'égalité

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{V}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{V}}.$$

C'est la formule de Cardan, formule que l'on peut encore écrire

$$(A') \quad x = \theta \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{V}} + \theta^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{V}} \quad (\theta = 1, j, j^2).$$

Ce dernier point résulte soit d'une discussion directe, que l'on peut faire sur cette égalité, soit de la formule (A), précédemment établie et discutée.

533. Discussion de l'équation générale du troisième degré. Une équation du troisième degré peut avoir, suivant les cas qui se présentent : 1° trois racines réelles, distinctes ; 2° trois racines réelles, non distinctes ; 3° deux racines imaginaires. La distinction de ces différents cas constitue la discussion de l'équation, et cette discussion repose sur le signe et la valeur d'une fonction des coefficients, fonction que nous avons déjà signalée (§ 502) ; mais que nous nous proposons de trouver directement.

Soit

$$(1) \quad f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

l'équation proposée. Elle admet, certainement, une racine réelle α, et l'on peut écrire

$$f(x) \equiv (x - \alpha)\varphi(x),$$

en posant

$$\varphi(x) \equiv x^2 + (A + \alpha)x + \alpha^2 + A\alpha + B.$$

Pour que $f(x) = 0$, ait ses trois racines réelles, il est nécessaire et suffisant que l'équation $\varphi(x) = 0$ ait, elle aussi, ses racines réelles. On doit donc avoir

$$(A + \alpha)^2 - 4(\alpha^2 + A\alpha + B) > 0,$$

ou

$$3\alpha^2 + 2A\alpha + 4B - A^2 < 0.$$

Posons

$$(2) \quad 3\alpha^2 + 2A\alpha + 4B - A^2 - z = 0,$$

il résulte de ce que nous venons de dire que la condition nécessaire et suffisante, pour établir la réalité des racines de l'équation (1), est $z < 0$.

Remarquons, maintenant, que nous avons

$$(3) \quad \alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$$

et que, des relations (1) et (2), nous déduisons, par combinaison,

$$(4) \quad A\alpha^2 + (A^2 - B + z)\alpha + 3C = 0.$$

Si nous éliminons α entre les égalités (2) et (4), nous obtenons, pour déterminer z, l'équation

$$(5) \quad [9C - A(4B - A^2 - z)]^2 = [3(A^2 - B + z) - 2A^2] \\ [6AC - (A^2 - B + z)(4B - A^2 - z)].$$

Telle est cette équation en z; elle est du troisième degré, ce point est évident *à priori*. On doit aussi observer qu'elle ne peut admettre une racine négative, sans avoir, par cela même, ses trois racines négatives. En effet si l'une des racines de l'équation (5), est négative, $f(x) = 0$ a nécessairement ses trois racines réelles; l'identité $f(x) \equiv (x - \alpha)\varphi(x)$, peut alors être réalisée de trois façons différentes; et, pour chacune de ces formes, le facteur correspondant $\varphi(x)$ égalé à zéro, doit constituer une équation, ayant ses racines réelles. Les trois valeurs de z qui correspondent à ces différentes formes, et qui sont données par l'équation (5), sont donc négatives.

Si l'on développe cette équation (5), on a

$$3z^3 + \lambda z^2 + \mu z + \theta = 0,$$

en posant

$$\theta = (A^2 - 3B)[6AC + (A^2 - B)(A^2 - 4B)] - [9C + A(A^2 - 4B)]^2.$$

Pour que l'équation proposée ait ses trois racines réelles,

il est nécessaire et suffisant que la relation $\theta > 0$, soit vérifiée. En développant les calculs indiqués, on trouve

$$(\alpha) \quad 4A^3C - A^2B^2 - 18ABC + (4B^3 + 27C^2) < 0.$$

Le raisonnement qui nous a conduit à ce résultat prouve encore que, si θ est nul, l'équation proposée a une racine double. Cette condition est, d'ailleurs, nécessaire et suffisante.

534. Discussion de quelques équations remarquables. L'inégalité (α) que nous avions déjà établie (§478 et 502), peut être difficilement retenue, et sa démonstration exige un certain effort. Il est donc utile de signaler quelques exemples, où l'on peut discuter l'équation du troisième degré, sans avoir recours à cette relation compliquée.

1° *L'équation est* $x^3 + px + q = 0$.

Cette forme qui constitue le type normal de l'équation du troisième degré réduite, se discute, comme on l'a vu (§ 502), au moyen de la fonction θ,

$$\theta = 4p^3 + 27q^2,$$

qui est celle que l'on retient ordinairement. La discussion de l'équation proposée se fait, comme nous l'indiquons ici :

$4p^3 + 27q^2 < 0$ } *Trois racines réelles et distinctes.*

$4p^3 + 27q^2 = 0$ { *Deux racines égales à* $-\frac{3q}{2p}$, *la troisième racine égale à* $\frac{3q}{p}$.

$4p^3 + 27q^2 > 0$ } *Une racine réelle, les deux autres imaginaires.*

Ces propriétés étant rappelées, nous allons maintenant montrer comment on peut, dans quelques cas, ramener la discussion d'une équation du troisième degré, à celle qui est résumée dans le tableau précédent.

2° *L'équation est* $x^3 + px^2 + q = 0$.

En prenant l'équation aux inverses, l'équation transformée est

$$y^3 + \frac{p}{q}\,y + \frac{1}{q} = 0.$$

On a donc ici,

$$\theta = \frac{4p^3}{q^3} + \frac{27}{q^2} = \frac{q\,(4p^3 + 27q)}{q^4},$$

et la discussion porte sur la fonction $4p^3q + 27q^2$.

3° *L'équation est*

$$x(x - \alpha)^2 + \beta = 0.$$

Posons $x - \alpha = \frac{1}{y}$; l'équation transformée est

$$\left(\alpha + \frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2} + \beta = 0.$$

La discussion proposée est alors ramenée à celle de l'équation

$$y^3 + \frac{\alpha}{\beta}y + \frac{1}{\beta} = 0.$$

4° *L'équation est*

$$\alpha x^3 + (x - \beta)^2 = 0.$$

Nous poserons ici

$$\frac{x}{x - \beta} = y;$$

d'où

$$x = \frac{\beta y}{y - 1}.$$

L'équation transformée est alors

$$y^3 + \frac{1}{\alpha\beta}\,y - \frac{1}{\alpha\beta} = 0.$$

5° *L'équation peut se mettre sous la forme*

$$(\alpha x+\beta)^3+x=0.$$

On transforme cette équation en posant

$$\alpha x+\beta=y;$$

le résultat est

$$y^3+\frac{y}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}=0.$$

6° *L'équation peut se mettre sous la forme*

$$(\alpha x+\beta)^3+x^2=0.$$

Posons

$$\frac{\alpha x+\beta}{x}=y; \quad \text{d'où } x=\frac{\beta}{y-\alpha}.$$

L'équation proposée devient alors

$$\left(\frac{\alpha\beta}{y-\alpha}+\beta\right)y^2+1=0,$$

ou

$$y^3+\frac{1}{\beta}y-\frac{\alpha}{\beta}=0.$$

535. Applications de la formule de Cardan.

Nous nous proposons de montrer, d'abord, quelques exemples dans lesquels la formule de Cardan s'applique avec avantage.

Premier exemple. *Résoudre l'équation*

$$x^3-6x+6=0.$$

On a ici

$$\theta=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=-8+9=1;$$

la formule de Cardan donne donc, pour la racine réelle,

$$x = \sqrt[3]{-3+1} + \sqrt[3]{-3-1},$$

ou

$$x = -\sqrt[3]{2}(1+\sqrt[3]{2}).$$

La racine cubique de 2, à $\frac{1}{100}$ près, est égale à 1,26 ; on a donc

$$x = -1,26 + 2,26,$$

ou

$$x = -2,84 \ldots$$

Cette valeur est approchée à $\frac{1}{100}$ près, car l'on peut vérifier que la racine cherchée est comprise entre $-2,84$ et $-2,85$.

Deuxième exemple. *Résoudre l'équation*

$$x^3 + 3\alpha\beta x + \alpha\beta(\beta - \alpha) = 0.$$

On trouve

$$\theta = \alpha^3\beta^3 + \frac{\alpha^2\beta^2}{4}(\beta-\alpha)^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{4}(\beta+\alpha)^2,$$

par suite,

$$x = \sqrt[3]{\alpha^2\beta} - \sqrt[3]{\beta^2\alpha}.$$

Troisième exemple. *Résoudre l'équation*

$$x^3 - 3\alpha\beta x + \alpha^3 + \beta^3 = 0.$$

Dans ce cas on a

$$\theta = -\alpha^3\beta^3 + \frac{(\alpha^3+\beta^3)^2}{4} = \left(\frac{\alpha^3-\beta^3}{2}\right)^2.$$

La racine réelle est donc donnée par la formule

$$x = \sqrt[3]{-\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} + \frac{\alpha^3-\beta^3}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} - \frac{\alpha^3-\beta^3}{2}}$$

ou

$$x = -(\alpha + \beta).$$

536. Inconvénients de la formule de Cardan. On voit, par ces exemples, que la formule de Cardan peut, quelquefois, s'employer avantageusement dans le calcul des racines d'une équation du troisième degré : il nous reste à montrer les inconvénients graves que présente l'emploi de cette formule, dans un grand nombre de cas.

Considérons l'équation

$$x^3 - x - 6 = 0;$$

la formule de Cardan donne

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{\frac{242}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{\frac{242}{27}}}.$$

L'équation proposée a une seule racine réelle $x = 2$. La formule de Cardan donne ce nombre simple, sous une forme arithmétique, assurément exacte, mais qui est compliquée d'expressions irrationnelles. Nous rencontrons là un premier inconvénient de cette formule ; elle en présente un autre, plus grave encore, et que nous allons mettre en évidence, en examinant maintenant le cas qu'on a nommé *cas irréductible.*

537. Cas irréductible. Lorsque l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

a ses trois racines réelles, et distinctes, on sait que l'on a

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Dans ce cas la formule de Cardan donne les racines de cette équation par une formule qui est compliquée d'expressions imaginaires. Mais ces imaginaires ne sont qu'apparentes, et il est naturel de chercher à dégager la formule de ces symboles, qui déguisent la valeur de l'inconnue.

Pour opérer cette transformation il est nécessaire d'extraire la racine cubique d'une expression imaginaire. Nous allons montrer, à ce propos, qu'en cherchant à résoudre ce problème, on rencontre une difficulté identique à celle que l'on cherchait à vaincre.

Soit $\alpha + \beta i$ une expression imaginaire; $x + yi$ sa racine cubique. On a, par définition,

$$\alpha + \beta i = (x + yi)^3;$$

et, par suite,

$$\alpha = x^3 - 3xy^2,$$
$$\beta = -y^3 + 3x^2y.$$

Telles sont les deux équations simultanées qui déterminent x et y. On peut remplacer l'une d'elles par la combinaison suivante :

$$\alpha(3x^2y - y^3) = \beta(x^3 - 3xy^2);$$

ou, en posant $\frac{y}{x} = t$, et $\frac{\beta}{\alpha} = m$, par l'équation

$$t^3 - 3mt^2 - 3t + m = 0.$$

Pour résoudre cette équation, et lui appliquer la formule de Cardan, il est nécessaire de faire disparaître le second terme. Posons, par conséquent,

$$t \quad m = z.$$

L'équation qui détermine z est, alors

$$z^3 - 3(m^2 + 1)z - 2m(m^2 + 1) = 0.$$

En posant,

$$\theta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

on a

$$\theta = -(m^2 + 1) + m^2(m^2 + 1)^2,$$

ou

$$\theta = -(m^2 + 1)^2$$

Ainsi l'équation en z a ses trois racines réelles et la formule de Cardan ne peut donner l'inconnue, que sous une forme compliquée d'imaginaires apparentes.

Cette impossibilité de sortir de la difficulté imposée par la formule de Cardan, dans le cas des trois racines réelles, constitue le cas irréductible de la résolution des équations du troisième degré.

588. Résolution de l'équation du quatrième degré. Il existe de nombreuses méthodes pour ramener la résolution d'une équation du quatrième degré, à celle d'équations d'un degré moindre. Nous signalerons d'abord celle qui est une application de l'étude que nous avons faite des formes quadratiques.

Soit :

$$(1) \quad x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

l'équation proposée. Posons

$$(2) \quad x^2 = y,$$

et considérons (1) et (2), comme des équations simultanées. On peut d'abord remplacer l'une d'elles par la combinaison suivante :

$$(3) \quad y^2 + pxy + qy + rx + s = 0.$$

Cette dernière équation peut elle-même être remplacée par celle-ci :

$$y^2 + pxy + qy + rx + s + \lambda(x^2 - y) = 0.$$

En remplaçant x par $\frac{x}{z}$, et y par $\frac{y}{z}$, on a

$$(4) \quad \lambda x^2 + y^2 + sz^2 + (q - \lambda) yz + rxz + pxy = 0.$$

Écrivons maintenant que le discriminant de cette forme quadratique est nul, et déterminons λ par la relation

$$\lambda s + \frac{pr(q-\lambda)}{4} - \lambda \frac{(q-\lambda)^2}{4} - \frac{r^2}{4} - \frac{p^2 s}{4} = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\lambda^3 - 2q\lambda^2 + \lambda(q^2 + pr - 4s) + r^2 + p^2 s - pqr = 0.$$

Si l'on peut trouver une racine λ' de cette résolvante, en remplaçant λ par λ' dans (4), cette équation se décompose en un produit de deux facteurs du premier degré, réels ou imaginaires.

En désignant ces facteurs par U et V, on est ainsi ramené à la résolution des deux systèmes :

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ U = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - y = 0. \\ V = 0. \end{cases}$$

En résumé, la résolution de l'équation du quatrième degré se trouve effectuée par celles : 1° d'une équation du troisième degré ; 2° de deux équations du second degré.

539. Méthode de Ferrari. Cette méthode est celle à laquelle nous avons fait allusion, au début de cette leçon.

Soit :

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

l'équation donnée, et, pour plus de commodité, écrivons-la sous la forme :

$$(1) \quad 4x^4 + 4px^3 + 4qx^2 + 4rx + 4s = 0.$$

On peut alors considérer ses deux premiers termes comme provenant du développement de $(2x^2 + px + \lambda)^2$. Cette remarque sert de base à la méthode de Ferrari.

Ecrivons l'équation (1), de la manière suivante :

$$(2x^2 + px + \lambda)^2 - (4\lambda + p^2 - 4q)x^2 + 2(2r - p\lambda)x - (\lambda^2 - 4s) = 0.$$

Si nous disposons du paramètre λ, de façon que la relation :

$$(2) \quad (2r - p\lambda)^2 = (4\lambda + p^2 - 4q)(\lambda^2 - 4s),$$

soit vérifiée, l'équation (1) se présente, pour cette valeur par-

ticulière de λ, sous la forme d'une différence de deux carrés, et sa résolution est ainsi ramenée à celle de deux équations du second degré. Si l'on observe enfin que la résolvante de l'équation donnée, l'équation (2), est seulement du troisième degré, on voit donc que la méthode de Ferrari, comme celle que nous avons exposée tout à l'heure, permet de résoudre l'équation du quatrième degré, en considérant : 1° une équation du troisième degré ; 2° deux équations du second degré.

EXERCICES

1. *Résoudre l'équation du quatrième degré :*

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

en l'identifiant avec l'équation suivante :

$$(\alpha + \beta x)^2 - \left(x^2 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = 0.$$

On trouve pour la résolvante :

$$\lambda^3 - p\lambda^2 - 4r\lambda + 4pr - q^2 = 0.$$

2. *Démontrer que l'équation du sixième degré, débarrassée de son second terme,*

$$x^6 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0,$$

peut être décomposée en deux équations du troisième degré, lorsque l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & p & q \\ p & 2r & s \\ q & s & 2t \end{vmatrix} = 0.$$

On pose $x^3 = y$, et l'on remarque que Δ est le discriminant de la forme quadratique

$$y^2 + pxy + qyz + rx^2 + sxz + tz^2.$$

3. *Résoudre un triangle connaissant le périmètre $2p$, le rayon r du cercle inscrit et le rayon R du cercle circonscrit.*

(*Concours général*, 1824).

En appelant x, y, z les trois côtés du triangle on trouve, en s'appuyant sur les formules connues :

$$S = pr = \frac{abc}{4R},$$

les relations suivantes :

$$x + y + z = 2p,$$
$$xyz = 4prR,$$
$$xy + xz + yz = p^2 + r^2 + 4Rr.$$

D'où l'équation :

$$X^3 - 2pX^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)X - 4prR = 0.$$

En posant $X = X' + \frac{2p}{3}$, on a :

$$(1) \quad X'^3 - \left(\frac{p^2}{3} - 4Rr - r^2\right)X' + \frac{2p}{3}\left(\frac{p^2}{9} - 2Rr + r^2\right) = 0.$$

On demandait aussi dans quel cas le triangle était équilatéral, isocèle ou rectangle : et, enfin, on proposait de résoudre l'équation dans le cas où l'on avait :

$$(2) \quad p = 12, \quad r = 2, \quad R = 5.$$

L'équation (1) permet de répondre facilement à ces questions diverses. Le triangle qui correspond aux hypothèses (2) est un triangle rectangle, dont les côtés sont 6, 8 et 10.

4. *Inscrire dans un cercle un polygone régulier de 30 côtés.*

Soit $AB = x$ un des côtés de ce polygone, l'angle au centre $AOB = 12°$. On a donc $\frac{x}{2} = \sin 6°$. En remarquant que $5.6 = 30$, et que :

$$\sin 5a = 5 \sin a - 20 \sin^3 a + 16 \sin^5 a,$$

on a, pour déterminer x, l'équation :

$$x^5 - 5x^3 + 5x - 1 = 0,$$

ou, abstraction faite de la solution $x = 1$,

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

La méthode de Ferrari donne pour résolvante :

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 8\lambda \quad 33 = 0$$

$\lambda = -3$ est une racine de cette équation.

5. *Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de l'équation :*

$$f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0,$$

démontrer qu'en posant :

$$y = \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4},$$

la transformée en y, résolvante de l'équation, est :

$$Hy^3 + Iy^2 + Jy + K = 0 ;$$

les coefficients H, I, J, K *étant donnés par les formules :*

$$\begin{aligned} H &= 8A^2D - 4ABC + B^3 \\ I &= 16A^2E + 2ABD + B^2C - 4AC^2 \\ J &= 8ABE + B^2D - 4ACD \\ K &= B^2E - AD^2. \end{aligned}$$

6. *On considère l'équation du quatrième degré, débarrassée de son second terme,*

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

trouver les résolvantes qui correspondent aux formules suivantes:

$$\begin{aligned} &(A) \quad y = x_1x_2 + x_3x_4 \\ &(B) \quad z = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ &(C) \quad t = \frac{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{x_1x_2 - x_3x_4}. \end{aligned}$$

La première formule correspond à la méthode de Ferrari, elle donne pour résolvante, l'équation

$$(A') \quad y^3 - py^2 - 4ry + 4pr - q^2 = 0.$$

La formule (B) est celle qui correspond à la méthode qu'a indiquée Lagrange ; elle donne pour résolvante :

$$(B') \quad z^3 + 8pz^2 + 16(p^2 + 4r)z - 64q^2 = 0.$$

Enfin, la formule (C) donne :

$$(C') \quad 8qt^3 + 4(4r - p^2)t^2 - 4pqt - q^2 = 0.$$

7. *Démontrer, par des transformations homographiques, que les résolvantes trouvées dans l'exercice précédent rentrent les unes dans les autres.*

On pose d'abord :

$$\theta = \frac{2pt + q}{2t},$$

et on vérifie que (C′) devient (A′). La transformation :

$$tz = 2q .$$

prouve, d'autre part, que (C′) n'est autre chose que (B′).

8. *Reconnaître que si α, β, γ désignent les trois racines de la résolvante* (C′), *les racines x_1, x_2, x_3, x_4 de l'équation :*

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

sont données par les formules :

$$x_1 = \sqrt{bc} + \sqrt{ac} - \sqrt{ab}$$
$$x_2 = \sqrt{bc} + \sqrt{ab} - \sqrt{ac}$$
$$x_3 = \sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{bc}$$
$$x_4 = \sqrt{ab} - \sqrt{ac} - \sqrt{bc}.$$

Appliquer cette méthode à l'équation :

$$x^4 + 42x^2 - 160x + 441 = 0.$$

NOTE A

LA DIVISION ALGÉBRIQUE.

1. Définition des divisions exactes. *Étant donné un polynôme entier* U, *qu'on suppose avoir été obtenu en multipliant un polynôme connu* V *par un polynôme inconnu* Q, *on propose de trouver celui-ci.*

L'opération que cette recherche nécessite se nomme la *division* : U est le *dividende*, V est le *diviseur ;* l'inconnue Q est le *quotient.*

Théorème. *Le problème, ainsi défini, ne comporte qu'une solution.*

Nous admettons que le problème a une solution, et nous voulons montrer qu'il n'en a qu'une. En effet, soient Q et Q′ deux solutions; les identités

$$U \equiv VQ,$$
$$V \equiv VQ',$$

donnent l'identité

$$VQ \equiv VQ';$$

mais alors, les deux membres prenant la même valeur *quel que soit x*, il faut aussi que les polynômes Q et Q′ soient égaux, quel que soit x ; on a donc, finalement,

$$Q \equiv Q'.$$

2. Recherche du quotient. I. *Détermination du premier terme.*

Soit posé

$$U = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p,$$
$$V = B_0x^q + B_1x^{q-1} + \dots + B_q,$$
$$Q = C_0x^r + C_1x^{r-1} + \dots + C_r.$$

On a, par définition,

$$(1) \quad \begin{cases} A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p \\ \quad = (B_0x^q + B_1x^{q-1} + \dots + B_q)(C_0x^r + C_1x^{r-1} + \dots + C_r). \end{cases}$$

Le calcul effectué dans le second membre donne un terme $B_0C_0x^{q+r}$ qui n'est réductible avec aucun autre terme ; on a donc, d'après la définition même des identités,

$$A_0x^p = B_0C_0x^{q+r}.$$

Celle-ci entraine les égalités suivantes :

$$A_0 = B_0C_0,$$

et,

$$p = q + r.$$

Les nombres p, q, r étant positifs, ces égalités prouvent :

1° *Que le degré du dividende est toujours supérieur à celui du diviseur.*

2° *Que le degré du quotient est égal à l'excès de ces deux nombres.*

3° *Que le premier coefficient du quotient est égal au quotient du premier coefficient du dividende par le premier coefficient du diviseur.*

II. *Détermination du second terme et des termes successifs.*

Les inconnues C_0 et r étant déterminées, on peut écrire (1) sous la forme :

$$A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p - C_0x^r(B_0x^q + \dots + B_q)$$
$$= (B_0x + \dots + B_q)(C_1x^{r-1} + \dots + C_r).$$

Dans le premier membre, les coefficients sont connus ;

désignons ce polynôme par R_1 ; R_1 est dit *le premier reste*. Les termes A_0x^p, et $- B_0C_0x^{r+q}$, qui sont identiques, disparaissent, et l'on a :

$$(2) \quad R_1 = (B_0x^q + \ldots + B_q)(C_1x^{r-1} + \ldots + C_r),$$

R_1 est un polynôme entier, tout au plus de degré $(p - 1)$; il se calcule, comme on le voit, en retranchant, du dividende donné, le produit du diviseur par le premier terme du quotient. L'identité précédente prouve d'ailleurs que R_1 est un polynôme qui a été obtenu en multipliant un polynôme donné V par un polynôme inconnu, qu'il reste à déterminer. Le premier terme de celui-ci s'obtient donc par la règle précédente. Les termes du quotient se déterminent ainsi, successivement ; il y a pourtant, dans ce calcul, un cas singulier que nous devons signaler.

Quand on commence la division de U par V, on suppose, explicitement, que le premier coefficient A_0 n'est pas nul. Mais il peut arriver que, dans (2), le premier terme de R_1 ne soit pas du degré $(p - 1)$. Cette exception donne lieu à la simple observation suivante : Puisque, l'égalité (2) est une identité, le terme en x^{p-1} qui n'existe pas à gauche du signe $=$, ne doit pas non plus figurer dans le second membre ; et cela exige que l'on ait $B_0C_1x^{q+r-1} = 0$, ou $B_0C_1 = 0$. Comme B_0 n'est pas nul, on a donc $C_1 = 0$.

3. Remarque. Lorsqu'on a déterminé un certain nombre de termes du quotient

$$C_0x^r + C_1x^{r-1} + C_2x^{r-2} + \ldots + C_{k-1}x^{r-k+1},$$

le reste R_k, qui sert à la détermination du terme C_kx^{r-k}, est obtenu en multipliant *successivement* le diviseur V par les termes

$$C_0x^r, \quad C_1x^{r-1}, \ldots C_{k-1}x^{r-k-1},$$

et en retranchant *successivement* ces produits du dividende U.

On a donc

$$R_k = U - V(C_0x^r + C_1x^{r-1} + \ldots + C_{k-1}x^{r-k-1}),$$

ou,

$$U \equiv V(C_0x^r + C_1x^{r-1} + \ldots + C_{k-1}x^{r-k-1}) + R_k.$$

On peut donc dire, et c'est l'objet de la remarque que nous avions en vue : *Si, dans la division, on veut arrêter l'opération à un moment quelconque ; le dividende est toujours identiquement égal au produit du diviseur par la partie trouvée au quotient, ce produit étant augmenté du reste obtenu à l'instant où l'on interrompt le calcul.*

4. Division de deux polynômes entiers quelconques; définition générale de la division. *Étant donnés deux polynômes quelconques* U *et* V, *respectivement de degrés p et q* (*p étant plus grand que q*), *diviser* U *par* V, *c'est trouver un polynôme* Q *et un polynôme* R *d'un degré inférieur à q, tel que l'on ait*

$$U \equiv VQ + R.$$

Les polynômes U, V, Q, R se nomment, respectivement, *dividende, diviseur, quotient* et *reste.*

Ce problème comporte donc la détermination de deux inconnues, Q et R; mais il est facile de reconnaître, avant d'aller plus loin, que *le problème n'admet qu'une solution, au plus.*

Imaginons, en effet, deux solutions : Q et R ; Q′ et R′. Nous aurons donc :

$$U \equiv VQ + R,$$
$$U \equiv VQ' + R' ;$$

et, par suite,

$$V(Q - Q') \equiv R - R'.$$

Supposons, du moins pour un moment, que Q et Q′ ne soient pas identiques ; alors, V(Q — Q′) représente une fonction entière, d'un degré *au moins égal à celui de* V. Cette hypothèse n'est pas admissible, car R et R′ étant, l'un et l'autre, des polynômes d'un degré moindre que *q*, leur différence ne peut pas être un polynôme identiquement égal à celui du pre-

mier membre. Il y a donc contradiction, si l'on ne suppose pas $Q = Q'$; mais, alors, on a aussi $R = R'$.

La recherche des polynômes Q et R résulte d'ailleurs de la solution donnée plus haut pour trouver Q, quand on suppose $R = 0$.

Imaginons, en effet, deux polynômes quelconques U et V ; on peut se demander si ces polynômes ne sont pas exactement divisibles l'un par l'autre, et l'on peut toujours leur appliquer la règle établie pour ce cas particulier. Rien n'empêche d'ailleurs, *quels que soient* U *et* V, de poursuivre l'opération jusqu'à ce qu'elle conduise soit à un reste nul, soit, ce qui est le cas général, à un reste de degré plus faible que celui de V. Si l'on désigne par Q le quotient et par R le reste, trouvés à cet instant, nous avons remarqué que l'on avait :

$$U = VQ + R.$$

Le problème ne comportant qu'une solution, les polynômes Q et R, ainsi trouvés, constituent cette solution unique.

5. Division des polynômes ordonnés par rapport aux puissances croissantes de x. Deux cas sont à distinguer, suivant que la division proposée comporte un reste ; ou n'en comporte pas.

Dans ce dernier cas, le théorème que nous avons exposé pour les divisions, dites divisions exactes, se répète avec des modifications insignifiantes, inutiles à signaler ici. On détermine d'abord le terme constant, puis le terme en x, etc., on trouve ainsi le quotient demandé, ordonné suivant les puissances croissantes de x.

Mais prenons le cas des divisions dites inexactes ; quelques faits nouveaux vont se produire qui méritent d'être signalés.

Nous ferons remarquer d'abord que *le problème est indéterminé*, et que l'on peut établir d'une *infinité de façons* l'identité

$$U = VQ + R.$$

En effet, le premier terme du diviseur étant une constante,

le premier terme d'un reste quelconque sera toujours divisible, *dans le sens algébrique de ce mot,* par cette constante; l'opération ne peut donc pas s'arrêter d'elle-même puisque, par hypothèse, on n'arrive jamais à un reste nul.

Une seconde remarque porte *sur le degré du reste.* Ce polynôme entier R, est de la forme $x^{k+1} R_1$; R_1 étant aussi un polynôme entier.

Cette loi se vérifie pour les premiers restes; il est alors très simple de remarquer qu'en l'acceptant pour le reste R_n, elle est encore vraie pour le reste suivant, R_{n+1}.

6. Théorème. *Étant donnés deux polynômes* U *et* V, *qui ne sont pas exactement divisibles l'un par l'autre, on peut toujours déterminer deux autres polynômes entiers* Q *et* R, *tels que l'on ait l'identité*

$$U = VQ + x^{n+1}R,$$

n étant un nombre entier, et positif, quelconque; cette détermination n'est possible que d'une seule manière, lorsque Q *est de degré égal, ou inférieur, à n.*

L'identité que nous voulons démontrer est la suivante :

$$A_p + A_{p-1}x + \dots + A_0x^p = (B_q + B_{q-1}x + \dots + B_0x^q)Q + x^{n+1}R,$$

R et Q étant des polynômes entiers, et ce dernier ayant un degré égal à n. Posons

$$Q = x_0 + x_1x + \dots + x_nx^n;$$

les inconnues sont ici $x_0, x_1, \dots, x_n$. La première est déterminée par l'égalité

$$A_p = B_qx_0.$$

Les coefficients A_p et B_q, étant différents de zéro, cette égalité donne pour x_0 une valeur unique, qui n'est ni nulle, ni infinie. Égalons maintenant les coefficients de x, dans les deux membres; nous obtenons une relation du premier degré entre x_0 et x_1; le coefficient de x_1 étant B_q, nombre différent de zéro,

et α_0 étant connu, on obtient donc pour α_1 une valeur qui est *bien déterminée*. Continuant ainsi à égaler, deux à deux, et successivement, les coefficients de x^2, de x^3,... on voit que chacune des inconnues α_0, α_1, ... α_n, a une valeur *bien déterminée*. On remarquera que les coefficients de R n'entrent pas dans les équations qui déterminent les coefficients α, puisque, pour cette détermination, on égale seulement les coefficients des puissances de x, d'un degré inférieur à $n+1$.

Ainsi Q est déterminé, et a une valeur unique; il en résulte que le polynôme $x^{n+1}R$, a, lui aussi, une valeur unique : savoir celle de $U - VQ$.

7. Théorème. *Lorsqu'une forme entière, homogène, du degré m, en x et y, à coefficients entiers, est exactement divisible par la forme linéaire $\alpha x + \beta y$, α et β désignant des nombres entiers premiers entre eux, le quotient a des coefficients qui sont, eux aussi, des nombres entiers.*

Soit U, la forme homogène proposée.

$$U = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + A_2 x^{m-2} y^2 + \dots + A_m y^m.$$

Si l'on effectue la division de ce polynôme ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, la règle ordinaire, sur la division de deux polynômes entiers, prouve que les coefficients du quotient sont :

$$\frac{A_0}{\alpha}, \frac{A_1}{\alpha} - \frac{\beta A_0}{\alpha^2}, \text{ etc} \dots ;$$

et si ces nombres ne sont pas entiers, ils représentent des fractions dont les dénominateurs sont α, α^2, etc ...

Supposons maintenant que l'on fasse la division du polynôme U, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de y par $\beta y + \alpha x$. Les coefficients du quotient sont alors

$$\frac{A_m}{\beta}, \frac{A_{m-1}}{\beta} - \frac{\alpha A_m}{\beta^2}, \text{ etc} \dots$$

On peut encore remarquer que, si ces coefficients ne sont pas entiers, ils représentent des fractions dont les dénominateurs sont β, β^2, etc.

Les deux divisions que nous venons d'imaginer doivent, l'une et l'autre, conduire au polynôme Q, quotient exact de U par $\alpha x + \beta y$. Les deux quotients, Q′ et Q″ obtenus ainsi, par ces deux opérations successives, étant identiques à Q, il est impossible, α et β étant deux nombres entiers premiers entre eux, que les coefficients de Q′ soient des fractions de la forme $\frac{H}{\alpha^p}$; et ceux de Q″, des fractions de la forme $\frac{K}{\beta^q}$, H et K désignant des nombres entiers. Il faut donc admettre que Q désigne un polynôme, à coefficients entiers.

EXERCICES

1. *Reconnaître que la division*

$$\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2},$$

se fait exactement.

On trouve

$$Q = nx^n + (n-1)x^{n+1} + \ldots + x.$$

2. *Diviser*

$$A = n^3x^{n+4} - (3n^3 + 3n^2 - 3n + 1)x^{n+3}$$
$$+ (3n^3 + 6n^2 - 4)x^{n+2} - (n+1)^3x^{n+1} + x^3 + 4x^2 + x,$$

par

$$B = (x-1)^4.$$

Le quotient est égal à

$$n^3x^n + (n-1)^3x^{n-1} + \ldots + 2^3x^2 + 1^3x.$$

3. *Diviser*

$$A = nx^{n+1} - (1+np)x^n + (p-1)x^{n-1} + (p-1)x^{n-2} + \ldots$$
$$+ (p-1)x + p,$$

par

$$B = x^2 - (p+1)x + p.$$

Résultat :

$$Q = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 2x + 1.$$

4. *Diviser*

$$A = n(n+1)x^{n+1} - n(np+p+2)x^n$$
$$+ 2[n(p-1)+1]x^{n-1} + 2[n(p-1)+2-p]x^{n-2}$$
$$+ 2[n(p-1)+3-2p]x^{n-3} + \dots + (2p-1)2x + 2p,$$

par

$$B = x^2 - (p+1)x + p.$$

Résultat :

$$Q = (n+1)nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)x^{n-3}$$
$$+ \dots + 3.2x + 2.$$

5. *Démontrer que*

$$A = n(n+1)(n+2)x^n$$
$$-6.n.1x^{n-1} - 6.(n-1).2x^{n-2} \dots - 6.2.(n-1)x - 6.n,$$

est divisible par $(x-1)^2$.

Résultat :

$$Q = n(n+1)(n+2)x^{n-1} + n(n-1)(n+4)x^{n-2}$$
$$+(n-1)(n-2)(n+6)x^{n-3} + \dots$$
$$+(n-h+1)(n-h)(n+2h+2)x^{n-h-1} + \dots + 6n.$$

6. *Démontrer que*

$$A = n(n+1)(n+2)x^{n+1} - n(n^2+3n+8)x - 6(n-2)x^{n-1}$$
$$-6(n-4)x^{n-2} - \dots - 6(n-2h)x^{n-h} + \dots + 6n,$$

est divisible par $(x-1)^2$.

Même résultat que pour l'exercice précédent.

7. *k désignant un nombre pair, démontrer que le produit de k nombres entiers consécutifs, diminué du produit de k autres nombres entiers consécutifs, est toujours divisible par le nombre qu'on obtient en ajoutant le plus petit et le plus grand des nombres considérés.*

Il suffit de remarquer que dans l'expression

$$V = p(p+1)\dots(p+k-1) - q(q+1)\dots(q+k-1),$$

où l'on suppose $p > q$, q est le plus petit, et $(p+k-1)$ le plus grand, des nombres : pour démontrer que V est divisible par $p+k-1+q$, il suffit de remplacer q par $-(p+k-1)$.

8. ***On propose de reconnaître, n étant un nombre entier et positif, que le polynôme*** **U,**

$$U = n^2x^{n+3} - (2n^2+2n-1)x^{n+2} + (n+1)^2x^{n+1} - x^2 - x$$

est exactement divisible par le polynôme **V,**

$$V = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

En effectuant la division on fera voir que le reste d'ordre k, R_k, est donné par la formule :

$$R_k = (n-k)^2x^{n-k+3} + [-2n^2 + (2k-1)n - 2k^2 + 2k + 1]x^{n-k+2}$$
$$+ (n-k+1)^2x^{n-k+1} - x^2 - x.$$

Le quotient Q est égal à :

$$n^2x^n + (n-1)^2x^{n-1} + \dots + (n-k)^2x^{n-k} + \dots + 1^2x.$$

NOTE B

DIVISIBILITÉ ALGÉBRIQUE

1. En algèbre, le problème de la divisibilité peut être posé dans les termes suivants : *étant donnés deux polynômes* U *et* V, *trouver les conditions que doivent vérifier leurs coefficients pour que l'un de ces polynômes soit exactement divisible par l'autre.*

Nous indiquerons d'abord la méthode la plus générale que l'on puisse suivre pour rechercher ces conditions.

Ayant ordonné, par rapport à une même lettre, les deux expressions proposées U et V, on poursuivra aussi loin que possible, c'est-à-dire jusqu'au point où la règle est en défaut, et ne permet plus la continuation du calcul, la division de ces polynômes. Si l'opération donne un reste nul, il est, par cela même, démontré que U est divisible par V.

Soit proposé, par exemple, de vérifier la divisibilité de $U = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, par $V = a + b + c$; on fera la division suivante :

$$
\begin{array}{l|l}
a^3 - 3abc + b^3 + c^3 & a + b + c \\
\hline
R_1 = -a^2(b+c) - 3abc + b^3 + c^3 & a^2 - a(b+c) + b^2 + c^2 - bc. \\
R_2 = \quad a(b^2 + c^2 - bc) + b^3 + c^3 & \\
R_3 = 0 &
\end{array}
$$

On conclut de ce calcul, que U est exactement divisible par V.

De même, les deux expressions $U = x^m - a^m$ et $V = x - a$, soumises au calcul de la division, donnent l'identité

$$(A) \quad x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}).$$

A la méthode générale précédente nous ajouterons quelques caractères, ou règles de divisibilité, qui permettent de reconnaître, sans qu'il soit nécessaire de faire certains calculs, quelquefois pénibles, que deux polynômes sont, ou ne sont pas, divisibles l'un par l'autre.

Nous désignons, dans ce qui va suivre, par U_x un polynôme entier en x; U_a représente alors la valeur arithmétique prise par cette expression algébrique, quand on remplace la lettre x, par un nombre donné a.

2. Théorème. *Étant donné un polynôme entier* U_x*: 1° si l'on a* $U_a = 0$, U_x *est exactement divisible par* $(x - a)$*; 2° si l'on a* $U_a \neq 0$, *le reste de la division de* U_x*, par* $(x - a)$*, est égal à ce nombre* U_a.

Soit :

$$U_x = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_{p-1} x + A_p;$$

on a alors,

$$U_a = A_0 a^p + A_1 a^{p-1} + \dots + A_{p-1} a + A_p,$$

et, par suite,

$$U_x - U_a = A_0 (x^p - a^p) + A_1 (x^{p-1} - a^{p-1}) + \dots + A_{p-1} (x - a).$$

Les facteurs de A_0, A_1,... A_{p-1} sont tous divisibles par $x - a$, d'après l'identité (A); par conséquent si l'on a $U_a = 0$, U_x est divisible par $x - a$; dans tous les cas on a :

$$U_x - U_a = (x - a) Q,$$

Q étant une fonction entière de x; U_a est donc le reste de la division de U_x par $(x - a)$.

Il résulte de cette remarque que si $U_a = 0$, on peut toujours poser $U_x = (x - a)^h V_x$, h étant un nombre entier positif, au moins égal à 1, et V_x un polynôme entier.

3. Loi des coefficients du quotient. L'identité précédente peut s'écrire

$$U_x - U_a = (x-a)\left\{\begin{array}{l} A_0(x^{p-1}+ax^{p-2}+a^2x^{p-3}+\ldots+a^{p-1}) \\ +A_1(x^{p-2}+ax^{p-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a^{p-2}) \\ +A_2(x^{p-3}+ax^{p-4}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a^{p-3}) \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +A_{p-1} \end{array}\right\}$$

ou

$$U_x - U_a = (x-a)\left\{\begin{array}{r|r|r} A_0x^{p-1}+A_0a & x^{p-2}+A_0a^2 & x^{p-3}+\ldots+A_0a^{p-1} \\ A_1 & +A_1a & +A_1a^{p-2} \\ & +A_2 & \vdots \\ & & \vdots \\ & & +A_{p-1} \end{array}\right\}$$

Les coefficients du quotient vérifient donc la loi suivante: 1° *un coefficient quelconque, celui de* x^{p-k} *par exemple, est égal à* $A_0a^{k-1}+A_1a^{k-2}+\ldots+A_{k-1}$; 2° *entre deux coefficients consécutifs* V_{k+1}, V_k, *on a la relation*

$$V_{k-1}=aV_k+A_k.$$

4. Divisibilité par $(x+a)$. Rien ne suppose, dans ce que nous venons de dire, que a désigne un *nombre positif ou négatif ;* pourtant si on veut mettre en évidence le signe de cette lettre, on pourra dire : 1° *que si* $U_{-a}=0$, U_x *est divisible par* $(x+a)$; 2° *que si l'on suppose* $U_{-a}\gtrless 0$, U_x, *divisé par* $(x+a)$, *donne un reste égal à* U_{-a}.

5. Divisibilité par $(x^p\pm a^p)$. Cherchons maintenant les caractères de divisibilité de U_x par des diviseurs de la forme $(x^p\pm a^p)$, p étant entier et positif.

Le calcul suivant :

$$\begin{array}{l|l} x^m-a^m & x^p-a^p \\ \hline R_1=a^px^{m-p}-a^m & x^{m-p}+a^px^{m-2p}+\ldots \\ R_2=a^{2p}x^{m-2p}-a^m & \\ \ldots\ldots\ldots & \\ R_k=a^{kp}x^{m-kp}-a^m & \end{array}$$

prouve que si la relation $m = kp$ est vérifiée par une valeur entière de k, on a $R_{\frac{m}{p}} = 0$; la division se fait exactement et le quotient renferme $\frac{m}{p}$ termes, qui se succèdent suivant une loi simple, loi rendue évidente par le calcul précédent.

On peut appliquer cette méthode aux exemples analogues: $\frac{x^m + a^m}{x^p + a^p}$, $\frac{x^m + a^m}{x^p + a^p}$.

Le quatrième cas, celui de $\frac{x^m + a^m}{x^p - a^p}$, conduit à une division qui ne peut jamais se faire exactement; en effet, le diviseur s'annule pour $x = a$, et le dividende prend, pour $x = a$, la valeur $2a^m$.

6. Divisibilité par $(x - a)(x - b)$. Cherchons maintenant les caractères de divisibilité de U_x par $(x - a)(x - b)$; nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Théorème. *Pour que le polynôme entier* U_x *soit divisible exactement par le produit* $(x - a)(x - b)$, *en supposant* $a \gtrless b$, *il est nécessaire et suffisant que l'on ait* $U_a = 0$, $U_b = 0$.

En effet, U_x étant divisible par $x - a$, on a (§ 2) $U_a = 0$; on a, de même, $U_b = 0$; mais il faut démontrer que ces conditions sont suffisantes.

Si, dans l'identité

$$U_x = (x - a)V_x;$$

on fait $x = b$, U_b étant nul, il vient

$$0 = (b - a)V_b.$$

Il en résulte $V_b = 0$, puisque b est différent de a.

Ainsi V_x est divisible par $x - b$, et l'on peut écrire :

$$V_x = (x - b)W_x.$$

W_x étant un polynôme entier. On a donc enfin

$$U_x = (x-a)(x-b)W_x,$$

et cette identité prouve que U_x est divisible par le produit

$$(x-a)(x-b).$$

Le théorème proposé est donc démontré ; on l'étend facilement à un nombre quelconque de facteurs binômes différents.

7. Introduction du polynôme dérivé. Ici se présente, dans l'algèbre élementaire, une difficulté, lorsqu'on se propose (c'est le cas particulier du problème précédent) de chercher *les caractères de divisibilité de* U_x *par* $(x-a)^2$. Les deux conditions trouvées : $U_a = 0, U_b = 0$ se réduisent, si $b = a$, à la condition unique, *nécessaire mais non suffisante*, $U_a = 0$. La recherche des conditions suffisantes constitue la difficulté que nous venons de signaler.

Reprenons les conditions du cas général

$$U_a = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \dots + A_m = 0,$$
$$U_b = A_0 b^m + A_1 b^{m-1} + \dots + A_m = 0.$$

On peut remplacer l'une d'elles par la combinaison

$$\frac{U_a - U_b}{a-b} = 0,$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} A_0(a^{m-1} + ba^{m-2} + \dots + b^{m-1}) \\ + A_1(a^{m-2} + ba^{m-3} + \dots + b^{m-2}) \\ \vdots \\ + A_{m-1} \end{array}\right\} = 0.$$

Si nous supposons que *a tende vers b*, cette relation devient, à la limite

$$mA_0a^{m-1} + (m-1)A_1a^{m-2} + \dots + A_{m-1} = 0.$$

Cette remarque étant faite, nous appellerons *polynôme dérivé*, d'un polynôme donné U_x,

$$U_x = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m,$$

un polynôme qu'on déduit de U_x par la loi suivante : 1° *Si* A_kx^{m-k} *est un terme de* U_x, $(m-k)A_kx^{m-k-1}$ *est le terme correspondant du polynôme dérivé ; 2° la constante* A_m *de* U_x *ne paraît pas dans le polynôme dérivé.*

En désignant par U'_x le polynôme dérivé de U_x on a, d'après cette définition,

$$U'_x = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \dots + A_{m-1}.$$

8. Théorème. *Pour qu'un polynôme* U_x *soit divisible exactement par* $(x-a)^2$, *il est nécessaire et suffisant que l'on ait* $U_a = 0$, $U'_a = 0$; *c'est-à-dire qu'il est nécessaire et suffisant que a annule le polynôme proposé et le polynôme dérivé.*

Nous avons déjà reconnu (§ 6), que ces conditions étaient nécessaires ; mais il reste à montrer qu'elles sont suffisantes.

On a :

$$U_x = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m,$$
$$U_a = A_0a^m + A_1a^{m-1} + \dots + A_{m-1}a + A_m ;$$

par suite, puisque $U_a = 0$,

$$\text{(A)} \quad U_x = (x-a)\left\{\begin{array}{l} \quad A_0\left(x^{m-1} + ax^{m-2} + \dots + a^{m-1}\right) \\ + A_1\left(x^{m-2} + ax^{m-3} + \dots + a^{m-2}\right) \\ + \dots\dots\dots\dots \\ + A_{m-1} \end{array}\right\},$$

ou

$$U_x \equiv (x-a)V_x,$$

V_x désignant le polynôme entier placé entre les deux accolades.

On a d'ailleurs

$$V_a = U'_a.$$

Puisqu'on suppose $U'_a = 0$, on a donc aussi $V_a = 0$. Le polynôme V_x est donc divisible par $(x-a)$, et l'on peut poser

$$V_x \equiv (x-a)W_x.$$

On a donc, finalement,

$$U_x \equiv (x-a)^2 W_x;$$

ce qui prouve bien que, si l'on a $U_a = 0$, et $U'_a = 0$; U_x est exactement divisible par $(x-a)^2$.

9. Polynôme dérivé second. On peut généraliser les idées précédentes et après avoir défini le polynôme U', dérivé de U, nous pourrons imaginer, de la même façon, le polynôme dérivé de U'. Nous désignerons ce polynôme par U'' et nous le nommerons *polynôme dérivé second*. Nous avons donc, d'après ces définitions

$$U_x \equiv A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m,$$
$$U'_x \equiv mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots + 2A_{m-2}x + 1 \,.\, A_{m-1},$$
$$U''_x \equiv m(m-1)A_0x^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} + 1.2A_{m-2}.$$

Nous nous proposons maintenant de rechercher les caractères de divisibilité de U, par $(x-a)^3$.

10. Divisibilité par $(x-a)^3$. Théorème. *Pour qu'un polynôme entier U_x soit divisible par $(x-a)^3$, il est nécessaire et suffisant que l'on ait :*

$$U_a = 0, \quad U'_a = 0, \quad U''_a = 0.$$

Soit posé :

$$R_{x,m} = x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \dots + a^m.$$

On a

$$\text{(B)} \qquad R_{a,m} = (m+1)\,a^m,$$

$$\frac{R_{x,m} - R_{a,m}}{x-a} = \frac{x^m - a^m}{x-a} + a\,\frac{x^{m-1} - a^{m-1}}{x-a} + \dots + a^{m-1},$$

et, par suite,

$$\text{(C)} \quad R_{x,m} - (m+1)a^m = (x-a)(R_{x,m-1} + aR_{x,m-2} + \dots + a^{m-1}).$$

La formule (A), (§ 7), peut donc s'écrire :

$$U_a = (x-a)(A_0R_{x,m-1} + A_1R_{x,m-2} + \dots + A_{m-1}).$$

En posant :

$$V_x = A_0R_{x,m-1} + A_1R_{x,m-2} + \dots + A_{m-1},$$

et en tenant compte de l'égalité (B), on a d'abord

$$V_a = A_0ma^{n-1} + A_1(m-1)\,a^{m-2} + \dots + A_{m-2}2a + A_{m-1};$$

puis, en tenant compte de (C),

$$\text{(1)} \quad V_x - V_a = (x-a)\left\{\begin{array}{l} A_0(R_{x,m-2} + aR_{x,m-3} + \dots + a^{m-2}) \\ + A_1(R_{x,m-3} + aR_{x,m-4} + \dots + a^{m-3}) \\ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ + A_{m-3}R_{x,1} + a \\ + A_{m-2} \end{array}\right\},$$

ou

$$V_x - V_a = (x-a)\,W_x.$$

Dans cette identité, W_x désigne l'ensemble des termes, entre accolades, qui suivent le facteur $(x-a)$, dans l'identité (1).

Il est maintenant facile de reconnaitre que l'on a

$$2W_a = U''_a.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned} W_a = A_0(R_{a,m-2} &+ aR_{a,m-3} + \ldots + a^{m-2}) \\ &+ A_1(R_{a,m-3} + aR_{a,m-4} + \ldots + a^{m-3}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ A_{m-3}R_{a,1} \\ &+ A_{m-2}, \end{aligned}$$

ou, en vertu de l'égalité (B),

$$\begin{aligned} W_a = A_0 a^{m-2}&[1 + 2 + \ldots + (m-1)] \\ &+ A_1 a^{m-3}[1 + 2 + \ldots + (m-2)] \\ &+ \ldots\ldots\ldots \\ &+ A_{m-3}a(1+2) \\ &+ A_{m-2}. \end{aligned}$$

D'ailleurs, si l'on pose :

$$S_p = 1 + 2 + 3 + \ldots + p,$$

ou,

$$S_p = p + (p-1) + \ldots + 1,$$

on a :

$$2S_p = p(p+1).$$

En tenant compte de cette relation, on obtient :

$$2W_a = m(m-1)A_0 a^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1 a^{m-3} + \ldots + 2.1A_{m-2},$$

ou, enfin,

$$2W_a = U''_a.$$

La démonstration du théorème énoncé est maintenant très simple. On a successivement établi que l'on avait

$$U_x - U_a \equiv (x-a)V_x,$$
$$V_x - V_a \equiv (x-a)W_x,$$

avec les conditions :

$$V_a = U'_a,$$
$$2W_a = U''_a;$$

on a, par conséquent,

$$U_x = U_a + (x-a)U'_a + (x-a)^2 W_x.$$

Si l'on suppose que l'on ait, à la fois, $U_a = 0$, $U'_a = 0$; U_x est divisible par $(x-a)^2$, et l'on peut poser :

$$U_x = (x-a)^2 W_x.$$

Alors de deux choses l'une : ou l'on suppose $W_a \neq 0$ par suite, $U''_a \neq 0$, et, dans ce cas, U_x n'est pas divisible (par $x-a)^3$; ou, au contraire, on suppose $W_a = 0$, par conséquent $U''_a = 0$, et alors W_x est divisible par $(x-a)^3$. En résumé, les conditions *nécessaires et suffisantes*, pour que V_x soit divisible par $(x-a)^3$, sont

$$U_a = 0, \quad U'_a = 0, \quad U''_a = 0.$$

EXERCICES.

1. *Reconnaître que* U :

$$U = n^2x^{n+2} - (2n^2+2n-1)\,yx^{n+1} + (n+1)^2x^ny^2 - xy^{n+1} - y^{n+2},$$

est divisible par V :

$$V = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

On vérifie que U, U′, U″ s'annulent pour $x = y$.

2. *Calculer le quotient*

$$\frac{1 - x\cos\varphi - x^n\cos n\varphi + x^{n+1}\cos(n-1)\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}.$$

Réponse :

$$1 + x\cos\varphi + x^2\cos 2\varphi + \ldots + x^{n-1}\cos(n-1)\varphi.$$

3. *Calculer le quotient*

$$\frac{x \sin \varphi - x^n \sin n\varphi + x^{n-1} \sin (n-1)\varphi}{1 - 2x \cos \varphi + x^2}.$$

Réponse :

$$x \sin \varphi + x^2 \sin 2\varphi + \ldots x^{n-1} \sin (n-1)\varphi.$$

4. *Démontrer que* $\frac{a^m}{a-b}$ et $\frac{b^m}{a-b}$ *donnent des restes égaux.*

5. *Désignons par* V *et* V′ *deux nombres entiers, différents de* 1; *le plus grand commun diviseur entre les nombres* α, α' (supposés entiers, différents de 1, et non premiers entre eux) *est une puissance exacte de* 2, *toutes les fois que* $y = V^{\alpha} + V'^{\alpha'}$ *est un nombre premier.*

On pose :

$$\alpha = a\delta, \quad \alpha' = a'\delta,$$

δ étant un diviseur commun *impair*, et autre que 1. On a alors :

$$y = (V^{a})^{\delta} + (V'^{\alpha'})^{\delta},$$

et cette expression est divisible par

$$V^{a} + V'^{a'}.$$

6. *Trouver les caractères de divisibilité de*

$$R_{x,p} = x^p + ax^{p-1} + a^2x^{p-2} \ldots + a^p,$$

par

$$R_{x,q} = x^q + ax^{q-1} + a^2x^{q-2} \ldots + a^q.$$

Employer la méthode générale, faire la division, et observer : 1° la loi des restes, 2° celle des termes du quotient.

7. *Reconnaître que* U :

$$U = nx^{n+1} - (n+1)x^n y + y^{n+1}.$$

est exactement divisible par V :

$$V = x^2 - 2xy + y^2.$$

NOTE C

THÉORÈME DE BINET ET DE CAUCHY.

1. Définition. On appelle *déterminant symétrique*, un déterminant dans lequel les éléments placés symétriquement, par rapport à la diagonale principale, sont égaux; on a donc $a_\alpha^\beta = a_\beta^\alpha$, pour toutes les valeurs de α et de β. Si l'on change les lignes en colonnes, et *vice versa*, l'élément b_α^β, du second déterminant, est égal à a_β^α; et, par conséquent, égal à a_α^β. Il en résulte que les déterminants mineurs, relatifs aux éléments a_α^β et a_β^α, sont égaux.

2. Théorème. *Soit* D *le coefficient de l'élément* a_α^β *dans le déterminant* Δ, $D_{\alpha'}^{\beta'}$ *le coefficient de* $a_{\alpha'}^{\beta'}$ *dans le déterminant* D, *on a* :

$$\Delta = a_\alpha^\beta D - \Sigma a_\alpha^{\beta'} a_{\alpha'}^\beta D_{\alpha'}^{\beta'}$$

sous le signe Σ, *les indices* α *et* β *sont invariables*; α' *doit prendre toutes les valeurs* 1, 2, 3, ... *n excepté la valeur* α, *et* β' *toutes les valeurs* 1, 2, 3 ... *n*, *excepté la valeur* β.

En effet, tous les termes de Δ qui contiennent l'élément a_α^β sont compris, par hypothèse, dans le produit $a_\alpha^\beta D$. Les autres termes renferment donc des éléments distincts appartenant, l'un à la ligne α, l'autre à la colonne β. Réunissons tous les termes où se trouvent les éléments $a_\alpha^{\beta'}$ et $a_{\alpha'}^\beta$, et représentons leur somme par $a_\alpha^{\beta'} \cdot a_{\alpha'}^\beta A$. Si, dans chacun de ces termes, on permute les indices β et β', on obtient des termes de signes contraires; la somme de ces nouveaux termes est donc égale à $- a_\alpha^\beta a_{\alpha'}^{\beta'} A$.

D'autre part, ces termes se trouvent dans le produit $a^\beta_\alpha D$, et puisque $D^{\beta'}_{\alpha'}$ est le coefficient de $a^{\beta'}_{\alpha'}$ dans D, leur somme est: $a^\beta_\alpha a^{\beta'}_{\alpha'} D^{\beta'}_{\alpha'}$. On a donc: $A = -D^{\beta'}_{\alpha'}$ et, par suite, dans le déterminant Δ, la somme des termes contenant les éléments $a^{\beta'}_\alpha$ et $a^\beta_{\alpha'}$, est: $-a^{\beta'}_\alpha a^\beta_{\alpha'} D^{\beta'}_{\alpha'}$. Ainsi

$$\Delta = a^\beta_\alpha D - \Sigma a^{\beta'}_\alpha a^\beta_{\alpha'} D^{\beta'}_{\alpha'},$$

3. Corollaire I. Si l'on suppose $\alpha = \beta = 1$, on a $D = \Delta^1_1$; et en appelant $\Delta^{1\beta'}_{1\alpha'}$ le déterminant mineur déduit de Δ^1_1 par la suppression de la ligne, et de la colonne qui se croisent sur l'élément $a^{\beta'}_{\alpha'}$, on a :

$$D^{\beta'}_{\alpha'} = (-1)^{\alpha'-1+\beta'-1}\Delta^{1,\beta'}_{1,\alpha'} = (-1)^{\alpha'+\beta'}\Delta^{1,\beta'}_{1,\alpha'},$$

par suite:

$$\Delta = a^1_1\Delta^1_1 - \Sigma(-1)^{\alpha'+\beta'} a^{\beta'}_1 a^1_{\alpha'}\Delta^{1,\beta'}_{1,\alpha'};$$

ou, en supprimant les accents,

$$\Delta = a^1_1\Delta^1_1 - \Sigma(-1)^{\alpha+\beta} a^\beta_1 a^1_\alpha \Delta^{1,\beta}_{1,\alpha}.$$

Dans cette formule les indices α et β doivent recevoir les valeurs 2, 3, ... n.

4. Corollaire II. Appliquons cette formule à un déterminant symétrique et, à cet effet, considérons séparément les termes, compris sous le signe Σ, pour lesquels on a $\alpha = \beta$, et ceux pour lesquels α et β sont différents. Puisque l'on suppose $a^\alpha_1 = a^1_\alpha$, la somme des premiers est $-\Sigma(-1)^{2\alpha}a^\alpha_1 a^1_\alpha \Delta^{1,\alpha}_{1,\alpha}$, ou $-\Sigma(a^\alpha_1)^2\Delta^{1,\alpha}_{1,\alpha}$. Les autres termes sont égaux deux à deux. En effet, soient deux termes $a^\beta_1 a^1_\alpha \Delta^{1,\beta}_{1,\alpha}$, $a^\alpha_1 a^1_\beta \Delta^{1,\alpha}_{1,\beta}$; ils ont le même signe, celui de $-(-1)^{\alpha+\beta}$; et ils sont égaux, car Δ^1_1 étant un déterminant symétrique, les deux déterminants mineurs relatifs aux éléments a^β_α et a^α_β sont égaux.

Ainsi $\Delta_{1,\alpha}^{1,\beta} = \Delta_{1,\beta}^{1,\alpha}$ et comme $a_1^\beta = a_\beta^1$, et $a_1^\alpha = a_\alpha^1$,

on a, finalement,

$$\Delta = a_1^1 \Delta_1^1 - \Sigma (a_1^\alpha)^2 \Delta_{1,\alpha}^{1,\alpha} - 2\Sigma (-1)^{\alpha+\beta} a_1^\alpha a_1^\beta \Delta_{1,\alpha}^{1,\beta}.$$

Par exemple ;

$$(1^\circ) \quad \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = A(A'A'' - B^2) - B''^2A'' - B'^2A' - 2(-1)^5 B'B''B$$

$$= AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B''$$

$$(2^\circ) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c' & b' \\ b & c' & 0 & a' \\ c & b' & a' & 0 \end{vmatrix} = a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 - 2aba'b' - 2aca'c' - 2bcb'c'.$$

5. Décomposition d'un déterminant en une somme de produits de déterminants. Théorème. *Si tous les éléments d'un déterminant d'ordre n, situés dans les p premières colonnes et les (n — p) dernières lignes, sont nuls, ce déterminant est égal au produit d'un déterminant d'ordre p, par un déterminant d'ordre (n — p).*

Soit le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^p & a_1^{p+1} & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & & a_2^p & a_2^{p+1} & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ a_p^1 & a_p^2 & & a_p^p & a_p^{p+1} & \dots & a_p^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{p+1}^{p+1} & & a_{p+1}^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{p+2}^{p+1} & & a_{p+2}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n^{p+1} & & a_n^n \end{vmatrix}$$

et soit posé :

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^p \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_p^1 & a_p^2 & & a_p^p \end{vmatrix}, \quad \text{et} \quad D' = \begin{vmatrix} a_{p+1}^{p+1} & a_{p+1}^{p+2} & \dots & a_{p+1}^n \\ a_{p+2}^{p+1} & a_{p+2}^{p+2} & & a_{p+2}^n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_n^{p+1} & a_n^{p+2} & & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Je dis que l'on a : $\Delta = DD'$.

En effet, 1° un terme de Δ est le produit d'un terme de D, par un terme de D'. Car un terme de Δ, différent de zéro, contient un élément pris dans chacune des p premières colonnes et dans chacune des p premières lignes, et par suite un élément pris dans chacune des $(n - p)$ dernières lignes et colonnes. Ce terme peut donc s'écrire :

$$\pm \left(a_{\alpha_1}^1 \ a_{\alpha_2}^2 \dots a_{\alpha_p}^p\right)\left(a_{\alpha_{p+1}}^{p+1} \ a_{\alpha_{p+2}}^{p+2} \dots a_{\alpha_n}^n\right)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ désignant, dans un certain ordre, les nombres 1, 2, ... p ; et $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2} \dots \alpha_n$, les nombres $p+1$, $p+2$, ... n. Le nombre des inversions des indices supérieurs est nul ; et le nombre des inversions des indices inférieurs est égal à la somme des nombres d'inversions des deux suites $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ et $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots \alpha_n$. Si ces deux nombres sont de même parité, le terme considéré a le signe $+$; s'ils sont de parités différentes, il a le signe $-$. Or $\left(a_{\alpha_1}^1, a_{\alpha_2}^2, \dots a_{\alpha_p}^p\right)$, et $\left(a_{\alpha_{p+1}}^{p+1}, a_{\alpha_{p+2}}^{p+2}, \dots a_{\alpha_n}^n\right)$ sont, en valeur absolue, des termes de D et de D' et ils doivent être affectés du même signe ou de signes différents, selon que les suites des indices inférieurs sont de même parité, ou de parités différentes. Ainsi, le terme considéré est, en valeur, et en signe, le produit de deux termes des déterminants D et D'.

On voit de même que *réciproquement* le produit de deux termes quelconques de D et D' est un terme du déterminant Δ.

6. Théorème. *Si tous les éléments situés dans les colonnes*

d'indices β_1, β_2, ... β_p et dans les $(n-p)$ lignes d'indices différents de α_1, α_2, ... α_p sont nuls, le déterminant Δ est égal à

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_p+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_p}\,DD'\,;$$

D *désignant le déterminant des éléments situés dans les colonnes β_1, β_2 ... β_p et les lignes α_1 α_2 ... α_p ; (ces éléments étant pris dans le même ordre que dans le déterminant* Δ) ; D′ *représente le déterminant mineur complémentaire de* D, *c'est-à dire celui qu'on forme en supprimant, dans* Δ, *les lignes et les colonnes où sont situés les éléments de* D.

En effet, supposons :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p, \quad \text{et} \quad \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_p.$$

Par des permutations successives de lignes et de colonnes consécutives, amenons les lignes α_1, α_2 ... α_p à être les p premières et, pareillement, les colonnes β_1, β_2, ... β_p, à être les p premières. Pour amener la ligne α_1 à la première place, il faudra effectuer (α_1-1) échanges de deux lignes consécutives ; pour amener la ligne α_2 à la deuxième place, il faudra faire (α_2-2) échanges, et ainsi de suite. Enfin pour amener la ligne α_p à la première place, il faudra faire (α_p-p) échanges. On a ainsi multiplié le déterminant Δ par

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_p-(1+2+3+\cdots+p)}.$$

De même, en amenant les p colonnes considérées aux p premières places, on multiplie le déterminant par :

$$(-1)^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_p-(1+2+3+\cdots+p)}.$$

Soit Δ' le nouveau déterminant, on a, d'après cela,

$$\Delta' = \Delta\,(-1)^{\alpha_1+\alpha_2\cdots\alpha_p+\beta_1\,\beta_2+\cdots+\beta_p-2(1+2+3+\cdots+p)}.$$

ou,

$$\Delta' = \Delta\,(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_p}.$$

Mais nous avons vu (§ 5), que l'on avait $\Delta' = DD'$, on a donc,

$$\Delta = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_p} \times DD'.$$

7. Notations. Soit :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_p, \quad \text{et} \quad \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \cdots \beta_p.$$

Nous désignerons par $\Delta\begin{pmatrix}\beta_1\beta_2\ldots\beta_p\\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\end{pmatrix}$ le déterminant mineur d'ordre $(n-p)$, déduit d'un déterminant Δ, d'ordre n, en supprimant les lignes et colonnes qui ont pour indices $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_p$ et $\beta_1\beta_2\ldots\beta_p$; et par $D\begin{pmatrix}\beta_1\beta_2\ldots\beta_p\\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\end{pmatrix}$ le déterminant complémentaire, celui qui est formé des éléments de Δ pris successivement dans les lignes α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_p$ et les colonnes β_1, $\beta_2 \ldots \beta_p$.

8. Théorème. Un déterminant Δ d'ordre n, a pour valeur

$$(-1)^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_p} \times \Sigma(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p} \times D\begin{pmatrix}\beta_1\beta_2\ldots\beta_p\\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\end{pmatrix} \times \Delta\begin{pmatrix}\beta_1\beta_2\ldots\beta_p\\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\end{pmatrix}$$

en supposant que $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ soient invariables, et rangés par ordre croissant, et qu'on prenne pour α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_p$ toutes les combinaisons, p à p, des nombres 1, 2, 3 ... n, ces nombres étant disposés, dans chaque combinaison, par ordre croissant.

En effet, réunissons tous les termes de Δ qui contiennent p éléments appartenant aux colonnes β_1, β_2, ... β_p, et aux lignes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$; et désignons leur somme par Δ_1. Nous avons donc $\Delta = \Delta_1 + R$; en appelant R, la somme des autres termes. Cela étant, annulons tous les éléments situés dans les colonnes β_1, $\beta_2 \ldots \beta_p$; et dans les lignes autres que α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_p$. Chaque terme de R contenant au moins un de ces

éléments sera nul ; Δ_1 qui n'en contient aucun ne sera pas modifié. Quant à Δ, il devient égal à

$$(-1)^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_p} \times (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p} \times D_{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_p)} \Delta_{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_p)}$$

et ce produit représente la valeur de Δ_1. Il résulte de là que chaque produit donne un certain nombre de termes de Δ. Observons, en outre, que si l'on change la valeur des indices $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$, les indices des colonnes, restant fixes, tous les termes du produit changent ; le théorème sera donc établi, quand on aura prouvé que le nombre total des termes de tous ces produits de déterminants est égal au nombre des termes de Δ, c'est-à-dire égal à $1.2.3. \ldots .n$. Or, dans chaque produit, il y a $1.2 \ldots p \; 1.2 \ldots (n-p)$ termes ; le nombre des produits est $C_n^p = \dfrac{1.2.3 \ldots n}{1.2 \ldots p \; 1.2 \ldots (n-p)}$. Le nombre total des termes contenus dans la somme des produits est donc $C_p^n (n-p)!$; ou $n!$

9. Corollaire. *Un déterminant est nul quand les éléments appartenant à p colonnes et à $(n-p+k)$ lignes sont nuls ;* car on peut décomposer le déterminant en une somme de produits de déterminants d'ordre $(n-p)$ et d'ordre p. Ces déterminants étant tous nuls, comme ayant k lignes, au moins, composées d'éléments nuls.

10. Exemples.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c'' & d'' \\ c''' & d''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c' & d' \\ c''' & d''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a''' & b''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c' & d' \\ c'' & d'' \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c''' & d''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a' & b' \\ a''' & b''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c'' & d'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' & b'' \\ a''' & b''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & p & q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p & q \\ 2q & 0 & 0 & 1 & p \\ p & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & p \\ 2q & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ 1 & p & q \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ 1 & p & q \\ 0 & 1 & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2q & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q & 0 & 0 \\ 1 & p & q \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q & 0 & 0 \\ 1 & p & q \\ 0 & 1 & p \end{vmatrix}.$$

ou :

$$\Delta = -2pq(p^2-q) - p^2(p^3-2pq) - 2q.pq + pq(p^2-q)$$

ou, enfin,

$$\Delta = -p^5 + 5p^3q - 5pq^2.$$

Ce déterminant représente la somme des puissances 5[mes] des racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0.$$

11. Théorème de Binet et de Cauchy. *Soient deux systèmes de np éléments disposés sur n lignes et p colonnes, dans les tableaux rectangulaires suivants :*

$$(\mathrm{U})\quad \left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^p \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^p \end{matrix} \right\|,\quad (\mathrm{V})\quad \left\| \begin{matrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^p \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^p \\ \vdots & & & \\ b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^p \end{matrix} \right\|.$$

Désignons par $C_{\alpha,\beta}$ la somme des produits obtenus en multipliant les éléments de la ligne d'indice α dans le système (U), *par les éléments homologues de la ligne d'indice β, dans le système* (V),

$$C_{\alpha,\beta} = a_\alpha^1 a_\beta^1 + a_\alpha^2 a_\beta^2 + \dots + a_\alpha^p a_\beta^p,$$

et considérons le déterminant :

$$\mathrm{P} = \left| \begin{matrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,n} \\ \vdots & & & \\ C_{n,1} & C_{n,2} & & C_{n,n} \end{matrix} \right|.$$

1° *Si l'on suppose $p < n$; on a* $\mathrm{P} = 0$.

2° *Si $p = n$; les systèmes* (U) *et* (V) *forment deux déterminants* A *et* B, *qui vérifient l'égalité* $\mathrm{AB} = \mathrm{P}$.

3° *Enfin si l'on a* $p > n$; P *est la somme des produits des déterminants formés en prenant n verticales quelconques du système* (U), *et les n verticales homologues du système* (V).

(Ce théorème a été démontré, en même temps, par Binet et par Cauchy.)

Considérons le déterminant Δ, d'ordre $(n+p)$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & -1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & 0 & -1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \\ a_1^p & a_2^p & \dots & a_n^p & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^p \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^p \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Ajoutons à la première colonne, les p dernières colonnes multipliées, respectivement, par $a_1^1, a_1^2, \dots a_1^p$; à la deuxième, les p dernières multipliées, respectivement, par $a_2^1, a_2^2 \dots a_2^p$; etc ... ; et ainsi de suite jusqu'à la n^{me} colonne, à laquelle on ajoute les éléments des p dernières, multipliées par $a_n^1, a_n^2 \dots a_n^p$.

Le déterminant n'est pas altéré et il prend la forme :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 \\ C_{1,1} & C_{1,2} & \dots C_{1,n} & b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 & \dots & b_1^p \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \dots C_{2,n} & b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 & \dots & b_2^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n,1} & C_{n,2} & \dots C_{n,n} & b_n^1 & b_n^2 & b_n^3 & \dots & b_n^n \end{vmatrix}. \quad (2)$$

La valeur de Δ est donc :

$$\Delta = (-1)^{1+2+\ldots+n+(p+1)\ldots+(p+n)} \mathrm{P} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 \end{vmatrix}.$$

d'où,

$$\Delta = (-1)^{1+2+\ldots+n+(p+1)+(p+2)+\ldots+(p+n)} \mathrm{P} (-1)^p,$$

ou,

$$(3) \quad \Delta = (-1)^{(n+1)(p+n)} \mathrm{P}.$$

Distinguons, maintenant, différents cas.

1° *Soit* $p < n$. Sous la forme (1) on reconnait que le déterminant Δ est identiquement nul, on a donc aussi $\mathrm{P} = 0$.

2° *Soit* $n = p$. Dans ce cas, on a

$$\Delta = (-1)^{2n(n-1)} \mathrm{AB},$$

ou,

$$\Delta = \mathrm{AB}.$$

Mais, d'après la formule (3), on a, pour $p = n$,

$$\Delta = (-1)^{2n(n+1)} \mathrm{P},$$

ou,

$$\Delta = \mathrm{P}.$$

Ainsi P est égal au produit des déterminants A et B.

3° *Soit enfin* $p > n$. Décomposons le déterminant Δ, en une somme de produits de déterminants d'ordre p et n, les déterminants d'ordre n étant formés d'éléments pris dans les n premières colonnes. Parmi ces déterminants, les seuls qui ne soient pas nuls sont composés d'éléments pris dans les p premières lignes. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, n nombres distincts rangés par ordre croissant, et pris dans la suite $1, 2, 3, \ldots p$. Désignons les

$(p-n)$ nombres qui restent, nombres rangés en ordre croissant, par $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{p-n}$. Nous avons alors

$$\Delta = (-1)^{1+2+\dots+n} \times \Sigma(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} D\binom{1.2.3\dots n}{\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_n} \times \Delta\binom{1.2\dots n}{\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_n}.$$

D'ailleurs le déterminant d'ordre p, $\Delta\binom{1,2\dots n}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ est égal à un déterminant d'ordre n. En effet, dans chacune des $(p-n)$ premières lignes tous les éléments sont nuls, un seul excepté, celui qui est égal à (-1). Développons ces déterminants par rapport à la première ligne et remarquons que l'élément (-1) est situé dans la colonne de rang γ_1. Soit δ_1 le déterminant obtenu en supprimant : 1° la première ligne, 2° la colonne de rang γ_1; nous pouvons écrire

$$\Delta\binom{1.2\dots n}{\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_n} = (-1)^{\gamma_1-1}\,.\,(-1)\,\delta_1 = (-1)^{\gamma_1}\delta_1.$$

Développons maintenant δ_1, par rapport aux éléments de la première ligne, et observons que tous les éléments de cette ligne sont nuls, excepté celui qui est situé dans la colonne de rang (γ_2-1), élément qui est égal à (-1). Soit δ_2, le déterminant déduit de δ_1, en supprimant la première ligne et la colonne de rang (γ_2-1); on a,

$$\delta_1 = (-1)^{\gamma_2-1}(-1), \quad \delta_2 = (-1)^{\gamma_3-2}\delta_3$$

et ainsi de suite :

$$\delta_3 = (-1)^{\gamma_4-3}\delta_4$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\delta_{p-n-1} = (-1)^{\gamma_{p-n}-(p-n-1)}\delta_{p-n}$$

d'où

$$\Delta\binom{1.2\dots n}{\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_n} = (-1)^{\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_{p-n}-[(1+2+3+\dots+(p-n-1))]}\,\delta_{p-n}$$

$$= (-1)^{\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_{p-n}-\frac{(p-n)(p-n-1)}{2}} \times \delta_{p-n};$$

et, par suite,

$$\Delta = (-1)^{1+2+\ldots+n} \Sigma(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\gamma_1+\cdots+\gamma_{p-n}-\frac{(p-n)(p-n-1)}{2}} D^{(1.2\ldots n)}_{(\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_n)}\,\delta_{p-n}.$$

Observons que

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_{p-n} = 1+2+\ldots+(p-1)+p;$$

cette quantité étant indépendante de α_1, α_2, ... α_n, on a :

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{p(p+1)}{2}-\frac{(p-n)(p-n-1)}{2}} \Sigma D^{(1.2\ldots n)}_{(\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_n)}\,\delta_{p-n};$$

ou, en réduisant l'exposant,

$$\Delta = (-1)^{(n+1)p}\,\Sigma D^{(1.2\ldots n)}_{(\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_n)}\,\delta_{p-n}.$$

D'ailleurs $D^{(1.2\ldots n)}_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)}$ est le déterminant formé, en prenant dans le système (1) les éléments situés dans les colonnes d'indices α_1, α_2 ... α_n, c'est-à-dire le déterminant déduit du système (1) en supprimant les colonnes d'indices $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{p-n}$; δ_{p-n} résulte aussi du système (2), en supprimant les colonnes d'indices $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{p-n}$; ces deux déterminants étant désignés par A et B, pour abréger l'écriture, on a donc :

$$\Delta = (-1)^{n+1}\,\Sigma(AB).$$

En comparant ce résultat à la formule (3), on a, finalement,

$$\pm P = \Sigma(AB).$$

12. Examen du cas où $p = n$. Posons

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ & & & \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \ldots & b_2^n \\ & & & \\ b_n^1 & b_n^2 & \ldots & b_n^n \end{vmatrix};$$

et,

$$P = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,n} & \dots C_{2,n} \\ \vdots & & \\ C_{n,1} & C_{n,2} & \dots C_{n,n} \end{vmatrix},$$

nous avons montré que l'on avait

$$P = AB;$$

en posant

$$C_{\alpha,\beta} = a_\alpha^1 b_\beta^1 + a_\alpha^2 b_\beta^2 + \dots + a_\alpha^n b_\beta^n.$$

On dit alors que P est le produit des deux déterminants A et B, effectué, lignes par lignes. Or on peut changer les lignes en colonnes, et *vice versa*, soit dans l'un des déterminants A et B, soit dans les deux à la fois. Il y a donc, pour le produit de deux déterminants, quatre formes, en général différentes ; ces formes correspondent aux quatre valeurs suivantes de l'élément du déterminant P :

1) $C_{\alpha,\beta} = a_\alpha^1 b_\beta^1 + a_\alpha^2 b_\beta^2 + \dots + a_\alpha^n b_\alpha^n$ } produit par lignes.

2) $C_\alpha^\beta = a_\alpha^1 b_1^\beta + a_\alpha^2 b_2^\beta + \dots + a_\alpha^n b_n^\beta$) produit par lignes

3) $C_\beta^\alpha = a_1^\alpha b_\beta^1 + a_2^\alpha b_\beta^2 + \dots + a_n^\alpha b_\beta^n$) et colonnes.

4) $C^{\alpha,\beta} = a_1^\alpha b_1^\beta + a_2^\alpha b_2^\beta + \dots + a_n^\alpha b_n^\beta$ } produit par colonnes.

On peut donc énoncer la propriété suivante.

Théorème. *Le produit de deux déterminants d'ordre n, est égal à un déterminant d'ordre n, dont les éléments sont les sommes des produits des éléments des lignes ou des colonnes de l'un, par les éléments homologues des lignes ou des colonnes de l'autre.*

13. Remarque. Pour effectuer le produit de deux déterminants d'ordre n et p, $(p<n)$, on transforme le déterminant d'ordre p, en un déterminant égal, d'ordre n.

14. Théorème. *Le carré d'un déterminant est un déter-*

minant symétrique, lorsque les déterminants égaux sont multipliés lignes par lignes ; ou colonnes par colonnes.

On a, en effet :

$$C_{\beta,\alpha} = a_\beta^1 a_\alpha^1 + a_\beta^2 a_\alpha^2 + \dots + a_\beta^n a_\alpha^n$$

et

$$C_{\alpha,\beta} = a_\alpha^1 a_\beta^1 + a_\alpha^2 a_\beta^2 + \dots + a_\alpha^n a_\beta^n.$$

d'où l'on conclut

$$C_{\beta,\alpha} = C_{\alpha,\beta}\,.$$

15. Exemples. Voici maintenant quelques applications des principes précédents.

1°
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ap+bq, & cp+dq \\ ar+bs, & cr+ds \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ap+br, & cp+cr \\ aq+bs, & cq+ds \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ap+cq, & bp+dq \\ ar+cs, & br+ds \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} ap+cr, & bp+dr \\ aq+cs, & bq+ds \end{vmatrix}$$

2°
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & k' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aa'+bb'+cc', & da'+cb'+fc', & ga'+hb'+kc' \\ ad'+be'+cf', & dd'+ee'+ff', & gd'+he'+kf' \\ ag'+bh'+ck', & dg'+ch'+fk', & gg'+hh'+kk' \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{vmatrix} aa'+bd'+cg', & da'+ed'+fg', & ga'+hd'+kg' \\ ab'+bc'+ch', & db'+ee'+fh', & gb'+he'+kh' \\ ac'+bf'+ck', & dc'+ef'+ff', & gc'+hf'+kk' \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$= \begin{vmatrix} aa'+db'+ge', & ba'+eb'+hc', & ca'+fb'+kc' \\ ad'+de'+gf', & bd'+ee'+hf', & cd'+fe'+kf' \\ ag'+dh'+gk', & bg'+eh'+hk', & cg'+fh'+kk' \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} aa'+dd'+gg', & ba'+ed'+hg', & ca'+fd'+kg' \\ ab'+de'+gh', & bb'+ee'+hh', & cb'+fe'+kh' \\ ac'+df'+gk', & bc'+ef'+hk', & cc'+ff'+kk' \end{vmatrix} \quad (4)$$

3°
$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2$$

$$) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2, & aa'+bb'+cc', & aa''+bb''+cc'' \\ aa'+bb'+cc', & a'^2+b'^2+c'^2, & a'a''+b'b''+c'c'' \\ aa''+bb''+cc'', & a'a''+b'b''+c'c'', & a''^2+b''^2+c''^2 \end{vmatrix} \quad \text{(Produit par colonnes.)}$$

u :

$$) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a^2+ba'+ca'', & ab+bb'+cb'', & ac+b'c+cc'' \\ aa'+b'a'+c'a'', & a'b+b'^2+c'b'', & a'c+b'c'+c'c'' \\ aa''+b''a'+c''a'', & a''b+b''b'+c''b'', & a''c+b''c'+c''^2 \end{vmatrix} \quad \text{(Produit par lignes et colonnes.)}$$

u :

$$3) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a^2+a'^2+a''^2, & ab+a'b'+a''b'', & ac+a'c'+a''c'' \\ ab+a'b'+a''b'', & b^2+b'^2+b''^2, & bc+b'c'+b''c'' \\ ac+a'c'+a''c'', & bc+b'c'+b''c'', & c^2+c'^2+c''^2 \end{vmatrix} \quad \text{(Produit par colonnes.)}$$

4°
$$P = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a' & b' \\ d' & e' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a' & b' & 0 \\ d' & e' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} aa'+bb', & da'+eb', & ga'+hb' \\ ad'+be', & dd'+ee', & gd'+he' \\ c & f & k \end{vmatrix}$$

16. Application du théorème de Binet et Cauchy. Considérons deux systèmes composés d'éléments égaux :

$$(1) \quad \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{matrix} \right\|, \quad (2) \quad \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix} \right\|.$$

On a :

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2, & a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \dots a_nb_n, & b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta \\ b_\alpha & b_\beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta \\ b_\alpha . & b_\beta \end{vmatrix}$$

ou, en développant :

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2\right) - \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n\right)^2$$
$$= \Sigma \left(a_\alpha b_\beta - b_\alpha a_\beta\right)^2. \quad \text{(A)}$$

Le signe Σ désignant la somme de toutes les expressions de la forme $(a_\alpha b_\beta - b_\alpha a_\beta)^2$, qu'on obtient en prenant pour α

et β les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons des nombres 1, 2, 3 ... *n*. La formule (A) n'est autre chose que l'identité de Lagrange, dans le cas le plus général.

17. Remarque. *Si les deux systèmes de np éléments, considérés dans le paragraphe 11, sont identiques, le déterminant* P *est égal à une somme de carrés.*

Car A étant égal à B, on a :

$$P = \Sigma A^2.$$

Le nombre des carrés compris sous le signe Σ est égal au nombre des combinaisons de *p* objets, pris *n* à *n*, c'est-à-dire égal à :

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Il en résulte que les *déterminants mineurs principaux de tous les ordres* du déterminant symétrique P, qui est le carré du déterminant Δ, sont des sommes de carrés. Par *déterminants mineurs principaux,* nous entendons désigner ici ceux que l'on obtient en supprimant dans le déterminant proposé un même nombre de lignes et de colonnes affectées des mêmes indices.

Supprimons dans P les lignes et les colonnes d'indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$; on forme un déterminant mineur d'ordre $(n-k)$ qui est composé, d'après la règle de Binet et de Cauchy, avec les éléments de deux systèmes identiques, déduits du système des éléments de Δ, par la suppression des lignes $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$.

18. Déterminants de systèmes adjoints. Soit le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \vdots & & & \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Désignons, suivant une notation adoptée, par A_α^β le coeffi-

cient de l'élément a_α^β; on donne le nom de *déterminant adjoint* au déterminant D:

$$D = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^n \\ \vdots \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

19. Théorème. *Le déterminant adjoint d'un déterminant d'ordre n est égal à la puissance* $(n-1)^{me}$ *de ce déterminant.*

En effet, multiplions Δ par D, et soit $C_{\alpha,\beta}$ un élément quelconque du produit; cet élément a pour valeur:

$$C_{\alpha,\beta} = A_\alpha^1 a_\beta^1 + A_\alpha^2 a_\beta^2 + \dots + A_\alpha^n a_\beta^n.$$

Si l'on imagine que l'on développe Δ en mineurs, par rapport aux éléments de la ligne β, on voit, 1° que $C_{\alpha,\beta}$ est nul quand on a $\alpha \neq \beta$; 2° que $C_{\alpha,\beta} = \Delta$, quand on suppose $\alpha = \beta$. Par suite, le produit considéré a tous ses éléments nuls, excepté ceux de la diagonale principale, lesquels ont pour valeur commune Δ. Ainsi le produit $D\Delta$ est égal à Δ^n; on a donc

$$D = \Delta^{n-1}.$$

20. Théorème. *Soit d, un déterminant mineur d'ordre p du déterminant adjoint* D. *Avec les éléments homologues du système* Δ *on peut former un déterminant de même ordre ayant pour coefficient* C; *ces quantités d,* Δ *et* C, *vérifient l'égalité*

$$d = \Delta^{p-1} C.$$

Considérons le déterminant:

$$d = \begin{vmatrix} A_{\alpha_1}^{\beta_1} & A_{\alpha_1}^{\beta_2} & \dots & A_{\alpha_1}^{\beta_p} \\ A_{\alpha_2}^{\beta_1} & A_{\alpha_2}^{\beta_2} & \dots & A_{\alpha_2}^{\beta_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\alpha_p}^{\beta_1} & A_{\alpha_p}^{\beta_2} & \dots & A_{\alpha_p}^{\beta_p} \end{vmatrix}$$

où l'on suppose $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$, et $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_p$.

On peut écrire le déterminant d sous la forme d'un déterminant d'ordre n,

$$d = \begin{vmatrix} A_{\alpha_1}^{\beta_1} & A_{\alpha_1}^{\beta_2} & \ldots & A_{\alpha_1}^{\beta_p} & A_{\alpha_1}^{\beta_{p+1}} & \ldots & A_{\alpha_1}^{\beta_n} \\ A_{\alpha_2}^{\beta_1} & A_{\alpha_2}^{\beta_2} & \ldots & A_{\alpha_2}^{\beta_p} & A_{\alpha_2}^{\beta_{p+1}} & \ldots & A_{\alpha_2}^{\beta_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\alpha_p}^{\beta_1} & A_{\alpha_p}^{\beta_2} & & A_{\alpha_p}^{\beta_p} & A_{\alpha_p}^{\beta_{p+1}} & \ldots & A_{\alpha_p}^{\beta_n} \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Dans les p premières lignes figurent les éléments de D qui sont situés dans les lignes α_1, α_2, ... α_p. On doit aussi remarquer que dans les $(n-p)$ dernières, les éléments situés sur la diagonale principale sont égaux à l'unité, et que tous les autres éléments sont nuls.

On a d'ailleurs :

$$(3) \quad \Delta = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p} \Delta';$$

en posant :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1}^{\beta_1} & a_{\alpha_1}^{\beta_2} & \ldots & a_{\alpha_1}^{\beta_p} & a_{\alpha_1}^{\beta_{p+1}} & \ldots & a_{\alpha_1}^{\beta_n} \\ a_{\alpha_2}^{\beta_1} & a_{\alpha_2}^{\beta_2} & \ldots & a_{\alpha_2}^{\beta_p} & a_{\alpha_2}^{\beta_{p+1}} & \ldots & a_{\alpha_2}^{\beta_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\alpha_p}^{\beta_1} & a_{\alpha_p}^{\beta_2} & \ldots & a_{\alpha_p}^{\beta_p} & a_{\alpha_p}^{\beta_{p+1}} & \ldots & a_{\alpha_p}^{\beta_n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{\alpha_n}^{\beta_1} & a_{\alpha_n}^{\beta_2} & \ldots & a_{\alpha_n}^{\beta_p} & a_{\alpha_n}^{\beta_{p+1}} & \ldots & a_{\alpha_n}^{\beta_n} \end{vmatrix}.$$

Faisons maintenant le produit de d par Δ', nous obtenons le résultat suivant :

$$d\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta & 0 & \dots & 0 \\ a_{\alpha_1}^{\beta_{p+1}}, & a_{\alpha_2}^{\beta_{p+1}}, & a_{\alpha_3}^{\beta_{p+1}} & \dots & a_{\alpha_{p+1}}^{\beta_{p+1}} & \dots & a_{\alpha_n}^{\beta_{p+1}} \\ a_{\alpha_1}^{\beta_{p+2}}, & a_{\alpha_2}^{\beta_{p+2}}, & a_{\alpha_3}^{\beta_{p+2}}, & \dots & a_{\alpha_{p+1}}^{\beta_{p+2}} & \dots & a_{\alpha_n}^{\beta_{p+2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\alpha_1}^{\beta_n}, & a_{\alpha_2}^{\beta_n}, & a_{\alpha_3}^{\beta_n}, & \dots & a_{\alpha_{p+1}}^{\beta_n} & \dots & a_{\alpha_n}^{\beta_n} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant se réduit (§ 5) au produit :

$$d \times \Delta' = \Delta^p \begin{vmatrix} a_{\alpha_{p+1}}^{\beta_{p+1}}, & a_{\alpha_{p+2}}^{\beta_{p+1}}, & a_{\alpha_{p+3}}^{\beta_{p+1}} & \dots & a_{\alpha_n}^{\beta_{p+1}} \\ a_{\alpha_{p+1}}^{\beta_{p+2}}, & a_{\alpha_{p+2}}^{\beta_{p+2}} & \dots & \dots & a_{\alpha_n}^{\beta_{p+2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\alpha_{p+1}}^{\beta_n} & a_{\alpha_{p+2}}^{\beta_n} & \dots & \dots & a_{\alpha_n}^{\beta_n} \end{vmatrix}.$$

Remplaçons Δ' par sa valeur (3) il vient :

$$d = \Delta^{p-1} \times (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_p+\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_p} \times \Delta_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p)}^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_p)} = \Delta^{p-1}.C.$$

car, (§ 8), la quantité

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_p+\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_p} \times \Delta_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p)}^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_p)},$$

est le coefficient de

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha_1}^{\beta_1} & a_{\alpha_1}^{\beta_2} & \dots & a_{\alpha_1}^{\beta_p} \\ a_{\alpha_2}^{\beta_1} & a_{\alpha_2}^{\beta_2} & \dots & a_{\alpha_2}^{\beta_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\alpha_p}^{\beta_1} & a_{\alpha_p}^{\beta_2} & \dots & a_{\alpha_p}^{\beta_p} \end{vmatrix}$$

21. Exemples. 1° Le déterminant mineur déduit de D, en supprimant la ligne α et la colonne β, est égal à :

$$\Delta^{n-2}(-1)^{\alpha+\beta}a_{\alpha}^{\beta}.$$

On a, en effet,

$$(-1)^{1+2+\dots+(\alpha-1)+(\alpha+1)+\dots+n+1+2+\dots+(\beta-1)+(\beta+1)+\dots+n}$$
$$\times\,\Delta_{(1,2,\dots\alpha-1,\alpha+1,\dots n)}^{(1,2,\dots\beta-1,\beta+1,\dots n)} = (-1)^{\alpha+\beta}a_{\alpha}^{\beta}.$$

2° Soit le déterminant symétrique Δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix},$$

et le déterminant adjoint D,

$$D = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

où l'on suppose :

$$A = a'a'' - b^2, \quad A' = aa'' - b'^2, \quad A'' = aa' - b''^2$$
$$B = b'b'' - ab, \quad B' = bb'' - a'b', \quad B'' = bb' - a''b''.$$

On a les identités :

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} = a''\Delta, \quad \begin{vmatrix} A' & B \\ B & A'' \end{vmatrix} = a\Delta, \quad \begin{vmatrix} A & B' \\ B' & A'' \end{vmatrix} = a'\Delta$$
$$\begin{vmatrix} B'' & B' \\ A' & B \end{vmatrix} = -b'\Delta \quad \begin{vmatrix} B'' & B \\ B' & A'' \end{vmatrix} = -b''\Delta, \quad \begin{vmatrix} A & B' \\ B' & A'' \end{vmatrix} = -b\Delta.$$

Ou, en développant :

$$(a'a'' - b^2)(aa'' - b'^2) - (bb' - a''b'')^2 = a''\Delta$$
$$(aa'' - b'^2)(aa' - b''^2) - (b'b'' - ab)^2 = a\Delta$$
$$(a'a'' - b^2)(aa' - b''^2) - (bb'' - a'b')^2 = a'\Delta$$
$$(b'b'' - ab)(b'b - a''b') - (aa'' - b'^2)(bb'' - a'b') = b'\Delta$$
$$(b''b - a'b')(b'b'' - ab) - (aa' - b''^2)(bb' - a''b'') = b''\Delta$$
$$(bb' - a''b'')(bb'' - a'b') - (a'a'' - b^2)(b'b'' - ab) = b\Delta$$

EXERCICES

1. *Développer le déterminant symétrique.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Réponse :

$$\Delta = A(A'A''D - A'C''^2 - B^2D - C'^2A'' + 2BC'C'') - B''^2(A''D - C''^2)$$
$$- B'^2(A'B - C'^2) - C^2(A'A'' - B^2) + 2B''B'(BD - C'C'')$$
$$- 2B''C(BC'' - A''C') + 2B'C(A'C'' - BC'),$$

ou

$$\Delta = AA'A''D - AB^2D - A'B'^2D - A''B''^2D - A'A''C^2 - AA''C'^2$$
$$- AA'C''^2 + B^2C^2 + B'^2C'^2 + B''^2C''^2 + 2ABC'C'' + 2A'B'CC''$$
$$+ 2A''B''CC' + 2BB'B''D - 2BB'CC' - 2BB''CC'' - 2B'B''C'C''.$$

2. *Reconnaître l'identité :*

$$D^2\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AD - C^2 & B''D - CC' & B'D - CC'' \\ B''D - CC' & A'D - C'^2 & BD - C'C'' \\ B'D - CC'' & BD - C'C'' & A''D - C''^2 \end{vmatrix}.$$

3. *Soit le déterminant*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}.$$

Désignons par A *le coefficient de a,* B *le coefficient de b etc ... Démontrer l'identité*

$$(A+A'+A'')^2-2(a+a'+a'')\Delta = A^2+A'^2+A''^2+2B^2+2B'^2+2B''^2.$$

Pour résoudre cette question, on peut appliquer les identités démontrées au dernier paragraphe de cette note.

4. *Soit le déterminant* Δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix}.$$

Si les éléments de ce déterminant vérifient les relations :

$$\Sigma a_1 b_1 = 0, \quad \Sigma a_1 c_1 = 0, \quad \Sigma b_1 c_1 = 0 \; . \; . \; \Sigma k_1 l_1 = 0;$$

on a :

$$\Delta^2 = \Sigma a_1^2 \Sigma b_1^2 \Sigma c^2 \; \dots \; \Sigma l_1^2.$$

Vérifier cette proposition, qui est une conséquence évidente du théorème de Binet et Cauchy, sur l'exemple numérique suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \\ -7 & 5 & 1 & -5 \\ -7 & 0 & 1 & 10 \end{vmatrix}.$$

(*Catalan.*)

On trouve, en effet,

$$(3000)^2 = (2^2+3^2+4^2+1^2)(1^2+3^2+3^2+1^2)(7^2+5^2+1^2+5^2)$$
$$(7^2+0^2+1^2+10^2).$$

5. *Résoudre les équations :*

$$\begin{aligned} ax + by + cz + dt &= X \\ -bx + ay + dz - ct &= Y \\ -cx - dy + az + bt &= Z \\ -dx + cy - bz + at &= T. \end{aligned}$$

Calculer le déterminant des inconnues, et l'expression U ;

$$U = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

(*Ed. Lucas.*)

Soit Δ, le déterminant des inconnues. On a,

$$\Delta = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

Ce point s'établit facilement en formant Δ^2. On trouve alors,

$$x = \frac{aX - bY - cZ - dT}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$
$$y = \frac{bX + aY - dZ + cT}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$
$$z = \frac{cX + dY + aZ - bT}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$
$$t = \frac{dX - cY + bZ + aT}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

et, par suite :

$$(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2.$$

C'est l'identité d'Euler.

6. *Resoudre, par rapport aux lettres* x, y, z, t, p, q, r, s, *les équations :*

$$\begin{aligned}
ax + by + cz + dt + ep + fq + gr + hs &= X \\
-bx + ay + dz - ct + fp - eq - hr + gs &= Y \\
-cx - dy + az + bt + gp + hq - er - fs &= Z \\
-dx + cy - bz + at + hp - gq + fr - es &= T \\
-ex - fy - gz - ht + ap + bq + cr + ds &= P \\
-fx + ey - hz + gt - bp + aq - dr + cs &= Q \\
-gx + hy + ez - ft - cp + dq + ar - bs &= R \\
-hx - gy + fz + et - dp - cq + br + as &= S
\end{aligned}$$

Calculer le déterminant des inconnues, et l'expression U :

$$U = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2.$$

(*Ed. Lucas.*)

En élevant au carré le déterminant Δ, on trouve

$$\Delta^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^8$$

ou :

$$\Delta = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^4$$

Les valeurs des inconnues sont données par les formules

$$\sqrt[4]{\Delta} \, . \, x = aX - bY - cZ - dT - eP - fQ - gR - hS$$
$$\sqrt[4]{\Delta} \, . \, y = bX + aY + dZ + cT + fP + eQ + hR + gS$$
$$\sqrt[4]{\Delta} \, . \, z = cX + dY + aZ - bT - gP - hQ + eR + fS$$
$$\sqrt[4]{\Delta} \, . \, t = dX - cY + bZ + aT - hP + gQ - fR + eS$$
$$\sqrt[4]{\Delta} \, . \, p = eX + fY + gZ + hT + aP - bQ - cR - dT$$
$$\sqrt[4]{\Delta} \, . \, q = fX - eY + hZ - gT + bP + aQ + dR - cT$$
$$\sqrt[4]{\Delta} \, . \, r = gX - hY - eZ + fT + cP - dQ + aR + bS$$
$$\sqrt[4]{\Delta} \, . \, s = hX + gY - fZ - eT + dP + cQ - bR + aS.$$

NOTE D

THÉORÈME DE M. SYLVESTER

Le théorème de M. Sylvester peut s'énoncer ainsi. *Si une forme quadratique* U, *a été décomposée, de deux manières différentes, en carrés de fonctions linéaires indépendantes, il y a, dans l'une et l'autre de ces décompositions, le même nombre de carrés affectés du signe* +, *et le même nombre de carrés précédés du signe* —.

Nous distinguerons, dans la démonstration qui va suivre, deux cas; suivant que le discriminant de la forme est différent de zéro, ou égal à zéro.

Premier Cas. *Le discriminant n'est pas nul.* La forme U est alors décomposable en n carrés indépendants si, comme nous le supposons, le nombre des variables est égal à n (§ 348).

Supposons que, par deux méthodes différentes, on ait trouvé successivement :

$$(1) \quad U = P_1^2 + \dots + P_\alpha^2 - Q_1^2 \dots - Q_\beta^2,$$

et,

$$(2) \quad U = R_1^2 + \dots + R_{\alpha'}^2 - S_1^2 \dots - S_{\beta'}^2.$$

Nous allons montrer que α et β sont, respectivement, égaux à α' et à β'.

Nous savons déjà que l'on a :

$$\alpha + \beta = n, \text{ et } \alpha' + \beta' = n.$$

Si l'on suppose $\alpha < \alpha'$, on a, nécessairement, $\beta' < \beta$. **Puisque** $\alpha + \beta = n$, on a donc :

$$\alpha + \beta' < n.$$

Cette remarque étant faite, considérons les équations :

$$P_1 = 0, \dots P_\alpha = 0; \quad S_1 = 0, \dots S_{\beta'} = 0.$$

Le nombre des variables est supérieur à celui des équations, puisque $\alpha + \beta'$ est inférieur à n ; elles admettent donc une infinité de solutions, différentes de zéro. Soit $x'_1, \dots x'_n$: l'une de ces solutions. Les identités (1) et (2) donnent :

$$P_1^2 + \dots + P_\alpha^2 - Q_1^2 \dots - Q_\beta^2 = R_1^2 + \dots + R_{\alpha'}^2 - S_1^2 \dots - S_{\beta'}^2.$$

Dans cette identité, remplaçons $x_1, \dots x_n$; respectivement par $x'_1, \dots x'_n$ il vient :

$$-Q_1'^2 \dots - Q_\beta'^2 = S_1'^2 + \dots + R_{\alpha'}'^2.$$

Il résulte de là, en particulier, que $Q'_1, \dots Q'_\beta$ sont des quantités nulles. Mais alors les équations

$$P_1 = 0, \dots P_\alpha = 0; \quad Q_1 = 0, \dots Q_\beta = 0;$$

admettent une solution différente de zéro. Ces n formes P_1, $\dots P_\alpha$: $Q_1, \dots Q_\beta$, ne sont donc pas indépendantes, conclusion qui est contraire à l'hypothèse que nous avons faite.

On ne peut donc pas supposer $\alpha < \alpha'$; ou pour le même motif, $\alpha' < \alpha$; on a donc $\alpha = \alpha'$; et par suite, $\beta = \beta'$.

Second Cas. *Le discriminant est nul.* Les notations précédentes étant conservées, on a encore, pour des raisons connues (§ 352). $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$. Nous poserons $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = z$; en supposant, maintenant, $z < n$.

Soit :

$$P_1 = a_1^1 x_1 + \dots + a_n^1 x_n,$$

. . . .

$$
\begin{aligned}
P_\alpha &= a_1^\alpha x_1 \quad + \ldots + a_n^\alpha x_n ; \\
Q_1 &= a_1^{\alpha+1} x_1 + \ldots + a_n^{\alpha+1} x_n , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_\beta &= a_1^\zeta x_1 \quad + \ldots + a_n^\zeta x_n ;
\end{aligned}
$$

et considérons le tableau rectangulaire

$$
\left\| \begin{matrix} a_1^1 & \ldots & a_\zeta^1 & \ldots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^\zeta & \ldots & a_\zeta^\zeta & \ldots & a_n^\zeta \end{matrix} \right\| \quad (\zeta < n)
$$

Dans ce tableau, un déterminant d'ordre ζ est certainement différent de zéro, autrement les fonctions P et Q seraient dépendantes, linéairement. Posons donc :

$$
\Delta = \left| \begin{matrix} a_1^1 & \ldots & a_\zeta^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^\zeta & \ldots & a_\zeta^\zeta \end{matrix} \right| , \ (\Delta \neq 0)
$$

et considérons les fonctions :

$$
(1) \quad P_1, \ldots P_\alpha ; \quad Q_1 \ldots Q_\beta ; \quad x_{\zeta+1}, \ldots x_n .
$$

Je dis que ces fonctions sont indépendantes. Supposons, en effet, que l'on puisse trouver des coefficients λ, tels que l'on ait,

$$
(2) \quad \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_\alpha P_\alpha + \ldots + \lambda_\zeta Q_\beta + \lambda_{\zeta+1} x_{\zeta+1} + \ldots + \lambda_n x_n \equiv 0 .
$$

En égalant à zéro les coefficients des variables $x_1, \ldots x_\zeta$; on a, d'abord,

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 a_1^1 + \ldots + \lambda_\zeta a_1^\zeta &= 0 , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
\lambda_1 a_\zeta^1 + \ldots + \lambda_\zeta a_\zeta^\zeta &= 0 .
\end{aligned}
$$

Le déterminant Δ de ces équations est différent de zéro ;

elles ne sont donc vérifiées que pour des valeurs des coefficients λ, qui sont toutes nulles. Mais alors l'identité (2) exige que l'on ait aussi :

$$\lambda_{\sigma+1} = 0 \ \dots \ \lambda_n = 0.$$

Ainsi les fonctions (1) sont indépendantes. Ceci posé, considérons la forme quadratique :

$$(3) \quad V = U + (x_{\sigma+1})^2 + \dots + (x_n)^2 ;$$

V est la somme de n carrés indépendants :

$$P_1, \dots P_\alpha; \quad Q_1 \dots Q_\beta; \quad x_{\sigma+1}, \dots x_n.$$

Si l'on supposait $\alpha \neq \alpha'$, en remplaçant dans (3) successivement U, au moyen des formules (1) et (2), on aurait, pour V, deux décompositions renfermant des nombres différents de carrés affectés du signe +. Nous avons établi, dans la première partie de cette démonstration, que cette hypothèse n'était pas admissible.

NOTE E

SUR LES IMAGINAIRES

Dans l'exposition que nous avons faite du calcul des expressions imaginaires (Leçon 11), pour généraliser le calcul des radicaux, nous sommes convenus *d'appliquer aux expressions imaginaires toutes les règles démontrées généralement pour les quantités réelles* (1).

Cette convention n'est pas admise par tout le monde; ou du moins ne l'est que dans une mesure plus restreinte que celle que nous avons employée. Nous indiquerons rapidement, dans cette note, comment on peut présenter, autrement que nous l'avons fait, dans la leçon citée, les premiers principes du calcul des expressions imaginaires.

1. Définition des Imaginaires. Considérons une identité dans laquelle entre la variable x, et prenons pour amener l'idée que nous avons en vue, une identité ne renfermant que des puissances paires de x; par exemple, l'identité :

$$(x^2 + 3)(x^2 - 4) = x^4 - x^2 - 12.$$

Les deux membres prennent des valeurs égales quand on donne à x une valeur arithmétique, positive ou négative, quelconque. Imaginons maintenant qu'on remplace la lettre x^2, par le nombre (-1). L'identité donne lieu encore à une égalité, qu'il est facile de vérifier, mais dont l'existence est évidente

1. Bertrand, *Algèbre élémentaire*, p. 174.

à priori, puisque en posant $x^2 = z$, l'identité

$$(z+3)(z-4) \equiv z^2 - z - 12,$$

est vérifiée pour toutes les valeurs positives ou négatives de z.

Examinons maintenant, de plus près, l'opération que nous avons faite: nous avons remplacé x^2 par -1 et il n'y avait, à cela, nul empêchement, puisque l'identité considérée par nous, ne présentait que des puissances paires de x. Ainsi on peut dire que cette identité est vérifiée *non seulement pour des valeurs positives ou négatives de x, mais encore pour des valeurs négatives de x^2.*

La généralisation des identités, conduit ainsi à envisager ces valeurs négatives de x^2, qui ne correspondent pas à une valeur arithmétique de x. Pour les distinguer de celles-ci, nous leur donnerons le nom d'*expressions imaginaires*, et nous désignerons en particulier, par i, celle de ces expressions dont le carré est égal à -1.

Considérons maintenant une identité renfermant, dans ses deux membres, des puissances impaires de x. On peut par un groupement convenable, écrire cette identité sous la forme :

$$f_1(x) + xf_2(x) \equiv \varphi_1(x) + x\varphi_2(x)$$

en supposant :

$$f_1(x) \equiv \varphi_1(x),$$
$$f_2(x) \equiv \varphi_2(x),$$

les fonctions f_1, f_2 ; φ_1, φ_2 ne renfermant que des puissances paires de x. En remplaçant x^2 par -1 ; f_1, f_2, φ_1, φ_2 prennent des valeurs arithmétiques, bien déterminées, égales deux à deux, et le premier membre devenant égal à $A + Bx$, le second membre prend la valeur identique $A + Bx$.

Ainsi les identités subsistent, même pour ces valeurs singulières de x que nous avons nommées imaginaires, et quand, dans l'identité de deux fonctions entières, on remplace x par i le premier membre prend la forme $A + Bi$; le second membre la forme $A' + B'i$, les égalités $A = A'$ $B = B'$ étant vérifiées.

2. Égalité des Imaginaires. Deux expressions imaginaires $a + bi$, $c + di$, sont égales, par définition, lorsque l'on a $a = b$, $c = d$; ainsi, de l'égalité,

$$(1) \quad a + bi = c + di,$$

on déduit

$$(2) \quad a = b, \quad c = d.$$

Si l'on compare les égalités (1) et (2) on voit que la définition précédente revient à celle-ci : *dans le calcul des imaginaires, la lettre i est considérée comme représentant une quantité variable, dont le carré est égal à — 1.*

Nous ferons ici cette convention dont l'utilité nous paraît plus facile à vérifier par la suite, qu'à motiver *à priori.*

3. Opérations algébriques. 1° *Addition et soustraction.* Le calcul algébrique de l'addition effectuée sur les expressions imaginaires $a + bi$, $a' + b'i$, ... donne, en traitant i comme une variable,

$$(a + bi) + (a' + b'i) + \ldots = (a + a' + \ldots) + (b + b' + \ldots)\, i.$$

Cette identité constitue l'addition des imaginaires et si l'on représente le résultat par $x + yi$, on a :

$$x = a + a' + \ldots$$
$$y = b + b' + \ldots$$

Pour les mêmes raisons, la soustraction des imaginaires $a + bi$, $a' + b'i$, est définie par l'identité :

$$a + bi - (a' + b'i) = a - a' + (b - b')\, i.$$

2° *Multiplication.* Considérons les deux expressions imaginaires $a + bi$, $c + di$; traitons i comme une variable, nous avons :

$$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + i(bc + ad).$$

Faisons maintenant $i^2 = -1$ et nous obtenons, pour le produit $(a + bi)(c + di)$, le résultat suivant ;

$$ac - bd + i(bc + ad).$$

Remarque I. *On peut intervertir l'ordre des facteurs imaginaires.*

Prenons deux facteurs imaginaires $a+bi$, $c+di$: nous voulons établir l'identité

$$(a+bi)(c+di)=(c+di)(a+bi).$$

D'après ce que nous venons de voir nous avons

$$(1)\quad (a+bi)(c+di)=ac-bd+i(bc+ad).$$

Prenons maintenant le produit $(c+di)(a+bi)$; en lui appliquant la même règle nous trouvons

$$(2)\quad (c+di)(a+bi)=(ac-bd)+i(bc+ad).$$

En comparant (1) et (2), nous voyons que les deux seconds membres sont identiques ; il en est donc de même des premiers membres.

Remarque II. *On peut multiplier par une même expression imaginaire les deux membres d'une égalité.*

Si l'on a,

$$(1)\quad a+bi=a'+b'i,$$

je dis qu'on a, pareillement,

$$(a+bi)(\alpha+\beta i)=(a'+b'i)(\alpha+\beta i).$$

En effet, le premier membre est égal, d'après ce que nous venons de voir, à :

$$a\alpha-b\beta+i(b\alpha+a\beta),\qquad \text{(A)}$$

le second est égal à

$$a'\alpha-b'\beta+i(b'\alpha+a'\beta).\qquad \text{(B)}$$

Mais l'égalité (1) donne $a=a'$, et $b=b'$; les résultats (A) et (B) sont donc identiques.

3° *Division.* Nous définirons la division de la manière suivante : *Diviser $a+bi$ par $c+di$, c'est trouver une expression imaginaire $x+yi$, x et y étant réels, tels que l'on ait.*

$$a+bi=(c+di)(x+yi).$$

Cette égalité peut s'écrire, d'abord,

$$a + bi = cx - dy + i(dx + cy);$$

on a donc:

$$cx - dy = a,$$
$$dx + cy = b.$$

Ces équations donnent les valeurs des inconnues x, y;

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Si nous convenons d'indiquer par $\frac{a + bi}{c + di}$, le quotient cherché, nous aurons donc, finalement,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Remarque III. *On peut multiplier, par la même expression imaginaire $\alpha + \beta i$, les deux termes d'une fraction; ces termes étant réels ou imaginaires.*

Soit $\frac{U}{V}$ une fraction; U et V désignant des expressions, réelles ou imaginaires, de la forme $a + bi$. Nous venons de démontrer qu'il existait une expression $x + yi$, telle que l'égalité

$$U = V(x + yi),$$

soit vérifiée. Multiplions ses deux membres par $\alpha + \beta i$, nous avons

$$U(\alpha + \beta i) = V(x + yi)(\alpha + \beta i).$$

D'autre part, nous savons qu'on peut intervertir l'ordre des facteurs imaginaires; nous avons donc

$$U(\alpha + \beta i) = V(\alpha + \beta i)(x + yi).$$

Cette égalité prouve que l'on peut considérer $U_1 = U(\alpha + \beta i)$ et $V_1 = V(\alpha + \beta i)$, comme des expressions imaginaires, et

ces expressions sont telles qu'il existe une imaginaire $x+yi$ qui, après avoir multiplié V_1, reproduit U_1. Ainsi $x+yi$ est le quotient de U_1 par V_1, et l'on a bien :

$$\frac{U}{V}=\frac{U_1}{V_1}.$$

Remarque IV. On déduit de la remarque précédente un moyen commode d'effectuer le quotient de deux expressions imaginaires. Il suffit de multiplier, haut et bas (comme nous l'avons dit dans la leçon XI, § 128) les deux termes de la fraction proposée par l'expression conjuguée du dénominateur.

Pour la suite que comporte l'exposition du calcul et des propriétés des expressions imaginaires, nous ne pouvons que renvoyer à la leçon citée.

FIN

ERRATA

Page 30 ; ligne 11 (en remontant) :
au lieu de $(x+a)6$; lisez $(x+a^6)$.
— 79 — 3 (en remontant) :
au lieu de a' : lisez a''.
— Id. — Dans le tableau qui correspond à la règle de Sarrus, à la troisième ligne,
au lieu de a', b', c' ; lisez a'', b'', c''.
— 88 — 3 au lieu de x_m ; lisez x_n.
— 334 — 7 (en remontant) :
au lieu de $\varphi(x_0) \gtrless 0$; lisez $\varphi'(x_0) \gtrless 0$.
— 367 — 4 (en remontant) :
au lieu de $\frac{X^{2p}}{e^X}$ lisez $\frac{X^{2p}}{e^{X^4}}$.




AUG 28 1886
JAN 5 1887
OCT 21 1887
DEC